# CÁLCULO

Volumen 1

Segunda Edición

Robert T. Smith
Roland B. Minton

Mc Graw Hill

A 303.2
S55
2003
V. 1
e. 5

Doc 17648

BIBLIOTECA ALONSO GAMO
19 SET. 2003
INVENTARIO

## CÁLCULO

No está permitida la reproducción total o parcial de este libro, su tratamiento informático, la transmisión de ninguna otra forma o por cualquier medio, ya sea electrónico, mecánico, por fotocopia, por registro u otros métodos, sin el permiso previo y por escrito de los titulares del copyright.

Derechos reservados © 2003, respecto de la segunda edición en español, por
**McGRAW-HILL-INTERAMERICANA DE ESPAÑA, S. A. U.**
Edificio Valrealty
Basauri, 17, 1.ª planta
28023 Aravaca (Madrid)

ISBN: 84-481-3861-9
Depósito legal: M. 26.192-2003

Traducido de la segunda edición en inglés de la obra:
CALCULUS
de Robert T. Smith y Roland B. Minton

ISBN: 0-07-239848-5 (Edición original)

Copyright © 2002 por The McGraw-Hill Companies, Inc.

ISBN MÉXICO 970-10-4759-1

Editora: Concepción Fernández
Editora de mesa: Susana Santos
Diseño de cubierta: Design Master DIMA
Compuesto en: FER Fotocomposición

1234567890
Impreso en México

09876532104
Printed in Mexico

The McGraw-Hill Companies

# ACERCA DE LOS AUTORES

Robert T. Smith es director del Departamento de Matemáticas en la Universidad Millersville de Pennsylvania, donde es profesor desde 1987. Con anterioridad, fue profesor en el Instituto Politécnico de Virginia. Alcanzó el grado de doctor en la Universidad de Delaware en 1982.

Ha centrado su interés en problemas aplicados de Ingeniería y Física. Ha publicado numerosos artículos de investigación sobre aplicaciones de las ecuaciones diferenciales y sobre problemas computacionales de la tomografía por rayos X. Es miembro de la American Mathematical Society, de la Mathematical Association of America y de la Society for Industrial and Applied Mathematics.

El profesor Smith vive en Lancaster, Pennsylvania, con su esposa, Pam, y sus hijos, Katie y Michael. Cuando dispone de tiempo libre, le gusta jugar al voleibol, al tenis o al *softball*. También entrena un equipo juvenil de fútbol. Actualmente se plantea como reto aprender a jugar al golf lo suficientemente bien como para no quedar en última posición en el torneo anual que disputan matemáticos y estadísticos.

Roland Minton es profesor de Matemáticas en el Roanoke College desde 1986. Antes perteneció al Instituto Politécnico de Virginia. Doctor por la Universidad Clemson en 1982, fue galardonado en 1998 con el premio al docente ejemplar por el Roanoke College.

El doctor Minton ha supervisado numerosos proyectos de investigación entre sus estudiantes sobre los aspectos científicos del deporte, la teoría de la complejidad y los fractales. Ha publicado varios trabajos sobre el uso de las calculadoras y ejemplos deportivos en Matemáticas, así como una monografía sobre teoría de control. Ha disfrutado becas de formación del State Council de Virginia para la enseñanza superior. Es miembro de la Mathematical Association of America y de la American Mathematical Society, entre otras.

El profesor Minton vive en Salem, Virginia, con su esposa, Jan, y sus hijos, Kelly y Greg. En su tiempo de ocio le gusta jugar al golf y seguir cualquier evento deportivo en televisión (incluso si el tiempo no lo permite). Jan también es profesora de Matemáticas en el Roanoke College, muy activa en aspectos pedagógicos. El apretado calendario familiar incluye la participación en una orquesta y partidos de *crosse* y fútbol. Entre sus aficiones favoritas, los hermanos Marx, el guitarrista Danny Gatton y las novelas de misterio de Kinky Friedman.

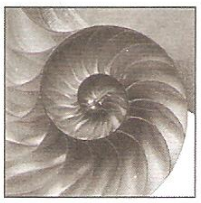
Aparte de la primera edición del Cálculo, que ya fue traducida al español, los profesores Smith y Minton han publicado juntos tres libros con McGraw-Hill: *Discovering Calculus with the HP-28 and the HP-48, Discovering Calculus with the TI-81 and the TI-85* y *Discovering Calculus with the Casio fx-7700 and the Casio fx-8700.*

*A Pam, Katie y Michael*
*A Jan, Kelly y Greg*
*A nuestros padres*
*Gracias por su amor y su inspiración.*

# CONTENIDO

*Prefacio* xi

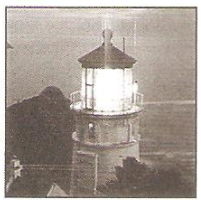
## CAPÍTULO 0 PRELIMINARES 1



0.1 Los números reales y el plano cartesiano 2
0.2 Rectas y funciones 9
0.3 Calculadoras gráficas y programas de cálculo simbólico (PCS) 20
0.4 Resolución de ecuaciones 28
0.5 Funciones trigonométricas 33
0.6 Funciones exponenciales y logarítmicas 41
- Ajuste de una curva a datos experimentales 49

0.7 Transformaciones de funciones 52
0.8 Preliminares del Cálculo 59

## CAPÍTULO 1 LÍMITES Y CONTINUIDAD 67



1.1 El concepto de límite 68
1.2 Cálculo de límites 76
1.3 Continuidad y sus consecuencias 85
1.4 Límites infinitos y límites en el infinito 95
- Límites en el infinito 97

1.5 La definición rigurosa de límite 103
- Exploración gráfica del concepto de límite 107
- Límites infinitos y límites en el infinito 109

1.6 Límites y pérdida de cifras significativas 114
- Representación de números en las calculadoras 115

## CAPÍTULO 2 LA DERIVADA 123

2.1 Recta tangente y velocidad 124
- El caso general 126
- Velocidad 127

2.2 La derivada 135
- Derivación numérica 141
- Notaciones alternativas para la derivada 140

2.3 Cálculo de derivadas: la regla de las potencias 145
- La regla de las potencias 145
- Reglas básicas de derivación 148
- Derivadas de orden superior 149
- Aceleración 150

2.4 Reglas del producto y del cociente 153
- Regla del producto 154
- La regla del cociente 156
- Aplicaciones 159

2.5 Derivadas de funciones trigonométricas 162
- Aplicaciones 167

2.6 Derivadas de funciones exponenciales y logarítmicas 170
- Derivadas de las funciones exponenciales 170
- La derivada del logaritmo natural 174

2.7 La regla de la cadena 176

2.8 Derivación implícita y ritmos relacionados 182
- Ritmos relacionados 187

2.9 El teorema del valor medio 191

**CAPÍTULO 3 APLICACIONES DE LA DERIVADA 201**

3.1 Aproximaciones lineales y la regla de L'Hôpital 202
- Aproximación lineal 203
- La regla de L'Hôpital 206

3.2 El método de Newton 210

3.3 Valores máximos y mínimos 216

3.4 Funciones crecientes y decrecientes 225
- Lo que se ve no siempre es lo que parece 227

3.5 Concavidad 232

3.6 Trazado de curvas 240

3.7 Optimización 249

3.8 Ritmos de cambio en aplicaciones 258

**CAPÍTULO 4 INTEGRACIÓN 269**

4.1 Primitivas 270

4.2 Sumas y notación sigma 281
- Principio de inducción matemática 285

4.3 Área 287

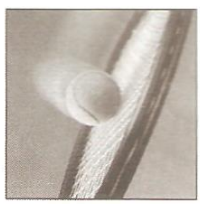
4.4 La integral definida 294
- Valor medio de una función 302

4.5 El teorema fundamental del Cálculo 307

4.6 Integración por sustitución 316
- Sustitución en integrales definidas 321

4.7 Integración numérica 324
- La regla de Simpson 328
- Cotas de error para la integración numérica 330

**CAPÍTULO 5 APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA 339**



5.1 Área entre curvas 340

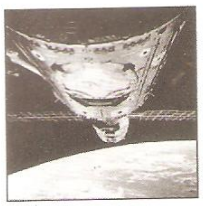
5.2 Volumen 347
- Volumen por rodajas (o rebanadas) 348
- El método de los discos 351
- El método de las arandelas 353

5.3 Volumen por capas cilíndricas 360

5.4 Longitud de arco y área de superficies 367
- Longitud de arco 367
- Área de superficies 370

5.5 Movimiento de proyectiles 374
5.6 Trabajo, momentos y fuerza hidrostática 383
5.7 Probabilidad 395

**CAPÍTULO 6 EXPONENCIALES, LOGARITMOS Y OTRAS FUNCIONES TRASCENDENTES 407**



6.1 La función logaritmo natural 408
6.2 Funciones inversas 414
6.3 La función exponencial 422
- Derivada de la exponencial 424

6.4 Problemas de crecimiento y decrecimiento 429
- Interés compuesto 434

6.5 Ecuaciones diferenciales separables 438
- Crecimiento logístico 441

6.6 El método de Euler 445
6.7 Las funciones trigonométricas inversas 454
6.8 Cálculo de las funciones trigonométricas inversas 459
- Integrales que contienen funciones trigonométicas inversas 461

6.9 Las funciones hiperbólicas 465
- Funciones hiperbólicas inversas 468
- La catenaria 469

**CAPÍTULO 7 TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN 475**

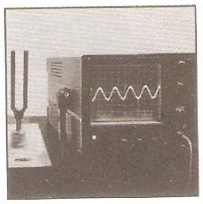
7.1 Repaso de fórmulas y técnicas 476
7.2 Integración por partes 480
7.3 Técnicas trigonométricas de integración 486
- Integrales con potencias de funciones trigonométricas 486
- Sustituciones trigonométricas 490

7.4 Integración de funciones racionales por descomposición en fracciones simples 495
7.5 Tablas de integrales y PCS 502
- Cómo utilizar las tablas de integrales 502
- Integración con un programa de cálculo simbólico (PCS) 506

7.6 Formas indeterminadas y la regla de L'Hôpital 511
- Otras formas indeterminadas 514

7.7 Integrales impropias 518
- Integrales impropias con integrando discontinuo 518
- Integrales impropias con un límite de integración infinito 522
- Un criterio de comparación 527

**CAPÍTULO 8 SERIES 533**



8.1 Sucesiones de números reales 534
8.2 Series 546
8.3 El criterio integral y criterios de comparación 557
- Criterios de comparación 561

8.4 Series alternadas 567
- Estimación de la suma de una serie alternada 571

8.5 Convergencia absoluta y el criterio del cociente 574
- El criterio del cociente 576

8.6 Series de potencias 582
8.7 Series de Taylor 589
■ Demostración del teorema de Taylor 599
8.8 Aplicaciones de las series de Taylor 601
8.9 Series de Fourier 608
■ Funciones con período distinto de $2\pi$ 615
■ Series de Fourier y sintetizadores de música 619

**APÉNDICE A DEMOSTRACIONES DE ALGUNOS TEOREMAS 627**

**APÉNDICE B SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS IMPARES 639**

**BIBLIOGRAFÍA 671**

**CRÉDITOS 679**

**ÍNDICE 681**

# PREFACIO

El amplio debate acerca de la reforma del Cálculo ha tenido un impacto notable sobre los autores de textos. En respuesta a ese debate, hemos escrito un libro moderno, pensado para estudiantes de Matemáticas, Física, Química, Ingeniería y campos relacionados.

El libro se dirige al estudiante medio, con un bagaje escaso en ciertos aspectos y necesitado de motivación, con el propósito de que sea inteligible, no una simple enciclopedia de fórmulas de cálculo. Por esa razón utilizamos un estilo coloquial que los revisores han comparado a una buena lección en el aula. Nuestras ideas docentes han ido tomando cuerpo a lo largo de más de veinte años en diversos centros, públicos y privados, desde una Escuela de Arte hasta grandes Escuelas de Ingeniería.

Con el fin de alcanzar los objetivos docentes planteados, hemos pedido su opinión a profesores de Cálculo de todos los rincones de Estados Unidos, en especial los puntos fuertes y débiles que aprecian en otros libros y en éste. Al preparar esta segunda edición, igual que en la primera, hemos aprovechado las innumerables aportaciones de revisores altamente cualificados elegidos para que nos ayudaran en el proyecto. Sus sugerencias han sido esenciales tanto en la primera edición como en la actual. Agradecemos sinceramente el tiempo y el esfuerzo que han dedicado a esa tarea.

## NUESTRA FILOSOFÍA

Estamos muy de acuerdo con el movimiento de reforma del Cálculo. En particular, creemos en la **regla del cuatro**: los conceptos deben ser presentados de forma **gráfica**, **numérica**, **algebraica** y **verbal** siempre que sea posible. Es más, cabe añadir a esa lista «en términos de **física**», ya que la elaboración de modelos físicos es parte importante de las habilidades que deben adquirirse. Asimismo, si bien el currículo de Cálculo pedía reformas, no hay que arrojar por la borda todo aquello que funcionaba bien. En ese sentido, nuestro libro es una exposición moderna de los temas tradicionales del Cálculo. El orden de presentación es el habitual, pero incorpora la tecnología y ejercicios que invitan a la reflexión.

Una de las claves en la reforma ha consistido en realzar la resolución de problemas, analizar aplicaciones realistas y formular problemas con solución abierta. Hay ejercicios de este tipo, así como ejercicios que exigen redactar una respuesta razonada, al final de casi todas las secciones. Encontrará también un abanico de aplicaciones más extenso que en la mayoría de los textos tradicionales, algunas de situaciones muy próximas al estudiante, con el fin de motivar nuevos conceptos e ilustrar los ya definidos. Así, hemos incluido numerosos ejemplos de deportes en los que el estudiante se involucre fácilmente.

Aunque las calculadoras aparecen por todas partes, no hemos dejado que sean la guía del curso. Creemos que el libro debe estar dominado por los conceptos. Tampoco hemos caído en la tentación de detallar todo cuanto la tecnología informática es capaz de hacer, excepto cuando afecta directamente al aprendizaje. Hemos tratado de que las calculadoras sirvan de apoyo para entender el Cálculo tal como se utiliza hoy día.

La tarea más dura cuando se prepara un libro nuevo de Cálculo es ponerse realmente a escribirlo. Hemos compaginado un nivel adecuado de informalidad con una discusión honesta de las dificultades. Además de las nociones y aplicaciones del Cálculo, se discute

con frecuencia qué procedimiento es más práctico, dónde encuentra obstáculos el estudiante medio, etc. Hemos intentado la máxima claridad en cada ejemplo, aplicación y ejercicio.

El libro ofrece cambios significativos. Con el uso de calculadoras, un estilo de redacción directo y un espectro amplio de aplicaciones prácticas, esperamos haber cubierto los objetivos fundamentales de la reforma del Cálculo. Al mismo tiempo, mantenemos el tronco común a los textos tradicionales, de modo que los profesores podrán enseñar desde un material que les es familiar aportando tecnologías y aplicaciones actualizadas.

## DESARROLLO DE LOS CONCEPTOS

Nos hemos esforzado en reconsiderar cuál era el mejor camino para desarrollar cada uno de los conceptos clásicos del Cálculo con el fin de centrar la atención en ellos motivando al mismo tiempo su estudio.

Fruto de ese planteamiento es la incorporación temprana de las funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas. Todos los estudiantes las conocen de antemano y había que aprovechar esa ventaja. Se introducen en el Capítulo 2, junto a las demás reglas de derivación. No podemos justificar las derivadas de tales funciones tan pronto, pero sí aportar evidencia numérica y pruebas algebraicas casi completas.

Esta introducción temprana permite citar aplicaciones más variadas e interesantes de la derivación (gráficas incluidas) y la integración. El análisis de esas funciones se completa en el Capítulo 6 con la definición del logaritmo natural como una integral y la demostración de las reglas de derivación. A partir de ese momento, se atan los cabos sueltos y esas funciones trascendentes quedan establecidas sobre una base teórica firme. Así, pues, al final del camino no hemos sacrificado rigor matemático y los estudiantes han tenido ocasión de aprender a manejar y aplicar una gama de funciones más amplia en los primeros capítulos.

En el mismo orden de ideas, la presentación algebraica de nociones básicas viene acompañada por métodos numéricos. Por ejemplo, insistimos en el cálculo del área mediante sumas de Riemann, pero usamos particiones regulares exclusivamente. No aparece la norma de una partición hasta la definición de las integrales múltiples (Capítulo 13). Para entonces, el estudiante se sentirá cómodo con la integral definida como límite de sumas y ese refinamiento no hará sino reforzar su grado de comprensión. Hacemos énfasis en que (sin el teorema fundamental del Cálculo) el límite de las sumas de Riemann se puede evaluar para muy pocas funciones. Además, invitamos a explorar ese aspecto numéricamente, sin restringirnos a polinomios de grado bajo, de manera tal que se aprecie cómo los valores de las sumas tienden a un límite. Así, el mismo problema se contempla desde perspectivas distintas y es más fácil entender los conceptos subyacentes. Además, se pone en manos del estudiante la integración numérica, un instrumento eficaz en diversas aplicaciones.

En nuestra opinión, las técnicas de integración son muy importantes. De ahí que hayamos insistido en ayudar a distinguir entre integrales de aspecto similar y elegir el método de integración más adecuado en cada caso. Resulta fundamental prestar atención a los detalles y a la sofisticación requerida por este proceso. No hemos pretendido ser exhaustivos en las técnicas de integración, habida cuenta del uso generalizado de los programas de cálculo simbólico (PCS). En la Sección 7.5 comentamos el uso de las tablas de integrales y de los PCS.

Hemos incluido varias secciones que no se encuentran en los libros típicos de Cálculo y una investigación minuciosa de algunos temas específicos. Eso permite a cada profesor planificar el curso según sus preferencias y los intereses de sus alumnos. Por ejemplo, la Sección 1.6 discute los errores por pérdida de cifras significativas, cómo realizan las operaciones aritméticas las calculadoras y por qué se producen ciertos errores en la aproximación numérica de límites. La Sección 3.8 contiene, junto a otras más tradicionales, aplicaciones de la derivada relativas a velocidad de reacción química y al ritmo cardíaco. Las ecuaciones diferenciales separables y el crecimiento logístico se discuten en la Sección 6.5, los campos de direcciones y el método de Euler en la Sección 6.6. El Capítulo 8, tras las series de potencias y de Taylor, se cierra con un estudio de las series de Fourier.

## CÁLCULO Y TECNOLOGÍA INFORMÁTICA

No vemos las calculadoras como un artificio o como un reclamo. Tampoco creemos que un curso de Cálculo deba girar en torno a ellas. Más bien deben ser incorporadas como algo natural en el desarrollo del Cálculo. De hecho, no aparecen por doquier en el libro, sino sólo donde lo consideramos apropiado. Esperamos que el lector tenga acceso a una calculadora gráfica o a un programa de cálculo simbólico (PCS). Hacemos alusiones genéricas utilizando las capacidades que comparten la casi totalidad de las calculadoras o de los PCS.

Un peligro que acecha tras el uso de las calculadoras es que el estudiante se convierta en un obseso de las teclas y las pulse sin reflexión alguna. Luchamos contra ese riesgo haciendo que desempeñen un papel complementario en el aprendizaje y apuntando errores que puede producir su uso incontrolado. Aprovechamos la tecnología para centrar el foco de atención en las conexiones sutiles, difíciles a veces, entre distintas nociones del Cálculo. Si el estudiante las entiende bien, utilizará el Cálculo con más frutos que quien se limite a los métodos algebraicos simplemente. Llevando al estudiante a mirar las cosas desde distintos niveles, mejorará su aprendizaje y ganará en iniciativa para atacar problemas por sí mismo.

Hemos decidido no separar los ejercicios que requieren calculadora al final de cada sección a fin de que el estudiante reconozca cuándo es conveniente. El icono que acompaña a esos ejercicios le evita tomar la decisión por su cuenta. El texto guía hacia un uso adecuado de la tecnología. Por esa razón, algunas secciones llevan un icono distintivo.

Dando por supuesto que el estudiante tiene acceso a gráficas en calculadora o PCS, nuestro primer paso en la resolución de problemas es mirar una gráfica para tener una idea de cuál puede ser la solución. Visualizar un problema es una ayuda esencial y recurrimos a ello con frecuencia.

Una de las ventajas de disponer de gráficas obtenidas por tecnología es que podemos resolver problemas más realistas. Las funciones involucradas no siempre son fáciles, pero sus ceros o sus extremos se pueden aproximar gráfica y numéricamente. Además, conceptos como la convergencia de las series de Taylor son mucho más claros a la vista de una gráfica. Lo mismo cabe decir de las series de Fourier, un instrumento clave para entender buena parte del mundo digital que nos rodea.

## COMENTARIOS SOBRE EL CONTENIDO

La gran mayoría de los temas de este libro son los que han definido el currículo del Cálculo en los últimos treinta años, que sigue vigente. Sin embargo, hay varias modificaciones relevantes en la tabla de contenidos. Vamos a comentar los objetivos básicos de cada capítulo.

### Capítulo 0. Preliminares

Los profesores deben decidir si cubren todo, parte o nada de este material preliminar, centrado en aspectos algebraicos o de trigonometría usados a menudo en el libro. Repasa, en particular, las propiedades básicas de las funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas. Las Secciones 0.3 y 0.4 familiarizan al lector con el uso de calculadoras gráficas o PCS. La Sección 0.5 presenta las funciones trigonométricas, que serán objeto de análisis detallado en la Sección 6.7. Si se desea, pueden adjuntarse a este Capítulo 0 las Secciones 6.2 y 6.7 sin afectar al resto de su contenido. La Sección 0.6 introduce las funciones exponenciales y logarítmicas usadas por todas partes en lo que sigue. La Sección 0.8 ofrece una mirada rápida sobre la frontera que separa el Cálculo de las matemáticas previas a él.

### Capítulo 1. Límites y continuidad

Este capítulo define dos nociones fundamentales: límites y continuidad. Los límites se introducen gráfica y numéricamente (Sección 1.1) junto con algunas reglas para su evalua-

ción (Sección 1.2). La definición rigurosa, formal, del concepto de límite aparece en la Sección 1.5, aunque no es estrictamente necesaria en el resto del curso. La Sección 1.6, independiente de las demás, analiza la fiabilidad gráfica y numérica de las calculadoras y PCS.

## Capítulo 2. La derivada

El Capítulo 2 define la derivada y presenta las reglas básicas de derivación, entre ellas las reglas del producto, del cociente y de la cadena. Se introducen las derivadas de las funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas, lo que amplía de manera notable el abanico de ejemplos y ejercicios en los que aplicar esas técnicas de derivación.

## Capítulo 3. Aplicaciones de la derivada

El Capítulo 3 empieza con las aproximaciones lineales, la regla de L'Hôpital (tratada con más detalle en el Capítulo 7) y el método de Newton. La interpretación gráfica minuciosa de la derivada viene seguida por secciones sobre optimización y ritmos de cambio.

## Capítulo 4. Integración

El Capítulo 4 comienza con el proceso de la «antiderivación», o sea, con el cálculo de primitivas. Se usa tecnología para evaluar las sumas de Riemann e investigar su convergencia y se describen métodos de integración numérica. El cálculo de la velocidad a partir de la distancia es un tema recurrente en este capítulo.

## Capítulo 5. Aplicaciones de la integral definida

El capítulo centra su atención en las fórmulas integrales, la construcción sistemática de sumas aproximantes y el posterior paso al límite para obtener la integral definida. Contiene las aplicaciones físicas tradicionales, trabajo, presión de un fluido y fuerza, a las que se añaden el impulso, los momentos y el centro de masa. Incluye, asimismo, secciones dedicadas al movimiento de proyectiles y a la probabilidad. El objetivo común consiste en utilizar sumas de Riemann para calcular cantidades de interés.

## Capítulo 6. Exponenciales, logaritmos y otras funciones trascendentes

Revisitamos estas funciones y demostramos por fin sus fórmulas de derivación, introducidas mucho antes con el fin de poder analizar aplicaciones interesantes en los capítulos precedentes. La investigación del crecimiento o decrecimiento exponencial conduce de manera natural a las ecuaciones diferenciales de primer orden.

Entre los autores de libros de Cálculo hay mucha discrepancia a la hora de tratar las ecuaciones diferenciales. Según nuestra experiencia, exigen un dominio razonable de la integración. Por eso discutimos las ecuaciones separables en la Sección 6.5, dos capítulos después de la integral, aprovechando los fenómenos de tipo exponencial. Para que el texto sea lo más flexible posible, sin embargo, elegimos situar este material antes que las técnicas de integración. Las funciones trigonométricas inversas y las hiperbólicas también se estudian en este capítulo.

### Capítulo 7. Técnicas de integración

Partimos de la base de que los estudiantes deben adquirir habilidad en la integración a la par que aprenden a elegir entre las técnicas disponibles. Por supuesto, siempre se puede recurrir a un PCS para hallar una primitiva. Incluimos sólo las técnicas más importantes, dejando que cada profesor decida si debe añadir alguna otra. Volvemos a estudiar la regla de L'Hôpital para adaptarla a las necesidades impuestas por las integrales impropias.

### Capítulo 8. Series

Al estudiar las series, se hace uso frecuente de gráficas y tablas de cálculos para ayudar a la comprensión de este espinoso concepto. La Sección 8.8 introduce numerosas aplicaciones, interesantes y accesibles, de las series de Taylor. Asimismo, debido a su relevancia en el trabajo de científicos e ingenieros, se ha incluido una sección relativa a las series de Fourier, citando además varias aplicaciones de la vida real.

## CAMBIOS EN LA SEGUNDA EDICIÓN

Todas las secciones y los rasgos pedagógicos de esta edición han sido sometidos a escrutinio. Al prepararla, hemos recibido la ayuda de un extenso panel de revisores, así como numerosos comentarios de usuarios y no usuarios acerca de la primera edición. Entre los cambios efectuados, atendiendo muchas veces a sus sugerencias, cabe citar:

Capítulo 3. Se ha ampliado la sección 3.1 usando aproximaciones lineales para introducir la regla de L'Hôpital en el caso $\frac{0}{0}$. Un tratamiento más completo de las formas indeterminadas y de la regla de L'Hôpital se verá en la Sección 7.6. Como resultado de esta modificación, hemos sacado de la Sección 3.1 el método de Newton, que configura ahora la sección 3.2.

Capítulo 4. Hemos añadido una discusión de las cotas de error en la integración numérica (Sección 4.7).

Capítulo 8. Hemos añadido cómo se usa una integral impropia para acotar el resto de las series a las que se aplica el criterio integral y una sección nueva con aplicaciones de las series de Taylor (Sección 8.8). Se ha ampliado también la lista de criterios de convergencia con el criterio de la raíz (Sección 8.5).

Ejemplos. Hay muchos ejemplos nuevos en esta edición, especialmente en lugares donde los revisores han sugerido que era conveniente una explicación adicional.

Ejercicios. Cada conjunto de ejecicios ha sido revisado con especial preocupación por dejar cubiertos todos los niveles de dificultad. En particular, hemos aumentado de forma significativa los ejercicios de dificultad moderada.

Presentación. Todas las explicaciones, demostraciones y deducciones han sido reconsideradas y un sinfín de modificaciones aportan, confiemos en ello, más claridad a la exposición.

Notas históricas. Se incluye información biográfica sobre matemáticos prominentes y sus contribuciones al desarrollo del Cálculo. Varias docenas de ellos aparecen en los márgenes del libro junto a breves reseñas biográficas.

Tecnología (calculadoras). Se hace énfasis frecuente en el uso de calculadoras y PCS con abundantes gráficas y tablas de valores obtenidas con esos medios.

## AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, y de modo muy especial, deseamos agradecer a nuestra editora *sponsor*, Maggie Rogers, por su apoyo y sus consejos a lo largo de esta extensa y estimulante tarea.

Agradecimiento que hacemos extensivo a nuestro primer editor, Jack Shira, por la confianza depositada en nuestro proyecto. Deseamos dar las gracias también a nuestros editores de desarrollo, Michelle Munn y Kris Swanson, por su duro trabajo editorial y su continuo apoyo. Esta obra nunca hubiera llegado a término sin la profesionalidad y los incansables esfuerzos de Maggie, Michelle y Kris. Es difícil pensar en personas más agradables que ellos para colaborar. Nuestro reconocimiento también a nuestros editores de los seis últimos años, Bill Barter, J. P. Lenney y Denise Schanck.

Un proyecto de esta envergadura exige la colaboración de un enorme número de personas con talento. El equipo de editores de desarrollo de la edición previa, Glenn y Meg Turner, de Burrston House, puso en marcha todas las revisiones. El equipo de producción de McGraw-Hill, en particular la jefa de proyecto, Jill Peter, elaboró los calendarios y nos ayudó a diseñar el texto. El equipo de soporte técnico de Laurel Technical Services, con Carrie Mallery a la cabeza, así como Elka Block y Frank Purcell, de Twin Prime Editorial, hicieron numerosas sugerencias para mejorar los ejercicios. Los expertos en TEX de Interactive Composition Corporation elaboraron el libro actual a partir de los archivos originales en TEX. George Morris y el personal de Scientific Illustrator se encargaron de las figuras. Un proyecto como éste no se puede llevar a buen puerto sin los comentarios y críticas constructivas de nuestros revisores, pasados y presentes. Les hemos consultado desde asuntos básicos hasta figuras. Gracias a su juicio certero, ha sido posible aportar mejoras abundantes al libro.

Muy agradecidos a los revisores de la primera edición:

David Anderson, *University of Tennessee*
Wilma Anderson, *University of Nebraska-Omaha*
Robert Beezer, *University of Puget Sound*
Neil Berger, *University of Illinois*
Mike Bonnano, *Suffolk Community College*
George Bradley, *Duquesne University*
Moody Chu, *North Carolina State University*
Raymond Clapsadle, *University of Memphis*
Joe Diestel, *Kent State University*
Dan Drucker, *University of Puget Sound*
Eugene Enneking, *Portland State University*
Ronald Grimmer, *Southern Illinois University*
Mel Hausner, *New York University*
Johnny Henderson, *Auburn University*
Robert Horvath, *El Camino College*
Gail Kaufmann, *Tufts University*
Hadi Kharaghani, *University of Lethbridge (Alberta)*
Masato Kimura, *College of William and Mary*
Robert Knott, *University of Evansville*
Jon Lee, *University of Kentucky*
John Maginnis, *Kent State University*
Chris McCord, *University of Cincinnati*
Remigijus Mikulevicius, *University of Southern California*
Mike Montano, *Riverside Community College*
Christina Pereyra, *University of New Mexico*
Linda Powers, *Virginia Tech*
Joe Rody, *Arizona State University*
Rod Smart, *University of Wisconsin–Madison*
Jerry Stonewater, *Miami University of Ohio*
Juan Tolosa, *Richard Stockton College*
Paul Weichsel, *University of Illinois*
Marvin Zeman, *Southern Illinois University*

Y nuestro especial aprecio a quienes han aportado sus ideas a esta segunda edición:

Alisher S. Abdullayev, *American River College*
Edward Aboufadel, *Grand Valley State University*
Shair Ahmad, *University of Texas at San Antonio*
Tom Akers, *University of Missouri–Rolla*
Tuncay Aktosun, *North Dakota State University*
Gerardo Aladro, *Florida International University*
Ariyadasa Aluthge, *Marshall University*
Michael R. Anderson, *West Virginia State College*
Tamas Antal, *Ohio State University*
Seth Armstrong, *Arkansas State University*
León Arriola, *Western New Mexico University*
Nuh Aydin, *Ohio State University*
Prem N. Bajaj, *Wichita State University*
Robert Bakula, *Ohio State University*
Rachel Belinsky, *Morris Brown College*
Chris Black, *Seattle University*
Karen Bolinger, *Clarion University of Pennsylvania*
Robert Brabenec, *Wheaton College*
Dave Bregenzer, *Utah State University*
C. Allen Brown, *Wabash Valley College*
Linda K. Buchanan, *Howard College*
James Caggiano, *Arkansas State University*
Jorge Alberto Calvo, *North Dakota State University*

James T. Campbell, *University of Memphis*
Jianguo Cao, *University of Notre Dame*
Florin Catrina, *Utah State University*
Deanna M. Caveny, *College of Charleston*
Maurice J. Chabot, *University of Southern Maine*
Wai Yuen Chan, *University of Science and Arts of Oklahoma*
Mei-Chu Chang, *University of California–Riverside*
Benito Chen, *University of Wyoming*
Karin Chess, *Owensboro Community College*
Dominic P. Clemence, *North Carolina Agricultural and Technical State University*
Barbara Cortzen, *DePaul University*
Julane B. Crabtree, *Johnson County Community College*
Ellen Cunningham, *Saint Mary-of-the-Woods College*
Daniel J. Curtin, *Northern Kentucky University*
Sujay Datta, *Northern Michigan University*
Gregory Davis, *University of Wisconsin–Green Bay*
Shusen Ding, *Seattle University*
Michael Dorff, *University of Missouri–Rolla*
Michael M. Dougherty, *Penn State Berks*
Judith Downey, *University of Nebraska at Omaha*
Tevian Dray, *Oregon State University*
Bennett Eisenberg, *Lehigh University*
Alan Elcrat, *Wichita State University*
Sherif T. El-Helaly, *Catholic University of America*
David L. Fama, *Germanna Community College*
Judith Hanks Fethe, *Pellissippi State Technical Community College*
Earl D. Fife, *Calvin College*
José D. Flores, *University of South Dakota*
Teresa Floyd, *Mississippi College*
William P. Francis, *Michigan Technological University*
Michael Frantz, *University of LaVerne*
Chris Gardiner, *Eastern Michigan University*
Charles H. Giffen, *University of Virginia*
Kalpana Godbole, *Michigan Technological University*
Michael Green, *Metropolitan State University*
Harvey Greenwald, *California Polytechnic State University*
Laxmi N. Gupta, *Rochester Institute of Technology*
Joel K. Haack, *University of Northern Iowa*
H. Allen Hamilton, *Delaware State University*
John Hansen, *Iowa Central Community College*
John Harding, *New Mexico State University*
John Haverhals, *Bradley University*
Sue Henderson, *Georgia Perimeter College*
Guy T. Hogan, *Norfolk State University*
Jack Howard, *Clovis Community College*
Cornelia Wang Hsu, *Morgan State University*
Shirley Huffman, *Southwest Missouri State University*
Hristo V. Kojouharov, *Arizona State University*
Emanuel Kondopirakis, *Cooper Union*
Kathryn Kozak, *Coconino County Community College*
Kevin Kreider, *University of Akron*
Tor A. Kwembe, *Chicago State University*
Joseph Lakey, *New Mexico State University*
Melvin D. Lax, *California State University-Long Beach*
James W. Lea, *Middle Tennessee State University*
William L. Lepowsky, *Laney College*
Fengshan Liu, *Delaware State University*
Yung-Chen Lu, *Ohio State University*
Stephen A. MacDonald, *University of Southern Maine*
Michael Maller, *Queens College*
Nicholas A. Martin, *Shepherd College*
Paul A. Martin, *University of Wisconsin Colleges*
Alex Martin McAllister, *Centre College*
Daniel McCallum, *University of Arkansas at Little Rock*
Philip McCartney, *Northern Kentucky University*
Michael J. McConnell, *Clarion University of Pennsylvania*
David McKay, *California State University, Long Beach and Orange Coast College, Costa Mesa*
Aaron Melman, *University of San Francisco*
Gordon Melrose, *Old Dominion University*
Richard Mercer, *Wright State University*
Scott Metcalf, *Eastern Kentucky University*
Allan D. Mills, *Tennessee Technological University*
Jeff Mock, *Diablo Valley College*
Laura Moore-Mueller, *Green River Community College*
Shahrooz Moosavizadeh, *Norfolk State University*
Kandasamy Muthevel, *University of Wisconsin–Oshkosh*
Kouhestani Nader, *Prairie View A & M University*
Sergey Nikitin, *Arizona State University*
Terry A. Nyman, *University of Wisconsin–Fox Valley*
Altay Özgener, *Elizabethtown Community College*
Bent E. Petersen, *Oregon State University*
Cyril Petras, *Lord Fairfax Community College*
Donna Pierce, *Washington State University*
Jim Polito, *North Harris College*
Yiu Tong Poon, *Iowa State University*
Evelyn Pupplo-Cody, *Marshall University*
Anthony Quas, *University of Memphis*
Doraiswamy Ramachandran, *California State University–Sacramento*
William C. Ramaley, *Fort Lewis College*
W. Ramasinghage, *Ohio State University*

M. Rama Mohana Rao, *University of Texas at San Antonio*
Nandita Rath, *Arkansas Tech University*
S. Barbara Reynolds, *Cardinal Stritch University*
Errol Rowe, *North Carolina Agricultural and Technical State University*
Harry M. Schey, *Rochester Institute of Technology*
Charles Seebeck, *Michigan State University*
George L. Selitto, *Iona College*
Shagi-Di Shih, *University of Wyoming*
Mehrdad Simkani, *University of Michigan-Flint*
Eugenia A. Skirta, *University of Toledo*
Scott Smith, *Columbia College*
Alex Smith, *University of Wisconsin-Eau Claire*
Frederick Solomon, *Warren Wilson College*
V. K. Srinivasan, *University of Texas at El Paso*
Mary Jane Sterling, *Bradley University*
Adam Stinchcombe, *Adirondack Community College*
Jeff Stuart, *University of Southern Mississippi*
D'Loye Swift, *Nunez Community College*
Randall J. Swift, *Western Kentucky University*
Lawrence Sze, *California Polytechnic State University*
Wanda Szpunar-Lojasiewicz, *Rochester Institute of Technology*
Fereja Tahir, *Eastern Kentucky University*
J. W. Thomas, *Colorado State University*
Juan Tolosa, *Richard Stockton College of New Jersey*
Michael M. Tom, *Louisiana State University*
William K. Tomhave, *Concordia College*
Stefania Tracogna, *Arizona State University*
Jay Treiman, *Western Michigan University*
Patricia Treloar, *University of Mississippi*
Thomas C. Upson, *Rochester Institute of Technology*
Richard G. Vinson, *University of South Alabama*
David Voss, *Western Illinois University*
Mu-Tao Wang, *Stanford University*
Richard A. Weida, *Lycoming College*
Michael Weiner, *Penn State Altoona*
Alan Wilson, *Kaskaskia College*
Michael Wilson, *University of Vermont*
Jim Wolper, *Idaho State University*
Jiahong Wu, *University of Texas at Austin*
DaGang Yang, *Tulane University*
Xiao-Dong Zhang, *Florida Atlantic University*
Jianqiang Zhao, *University of Pennsylvania*

Aparte de ellos, un cierto número de colegas ha invertido tiempo y esfuerzo para crear o mejorar partes del manuscrito. Queremos dar las gracias especialmente a Bill Ergle, Ben Huddle, Jack Steehler, Deana Carideo, Jan Minton, Chris Lee, Jeff Spielman y Richard Grant, del Roanoke College, por compartir su experiencia en Cálculo y en sus aplicaciones; a Tom Burns, de General Electric, por ayudarnos en una aplicación industrial; a Dorothee Blum (Millersville University), que revisó una versión preliminar; a Chuck Denlinger y Ron Umble (Millersville University), por numerosas conversaciones sobre el Cálculo; a Bruce Ikenaga (Millersville University), por compartir sus conocimientos de $T_EX$ y Corel Draw, y Pam Vercellone-Smith, por su ayuda en aspectos relacionados con la Biología. Estamos, asimismo, agradecidos a Dorothee Blum, Bob Buchanan, Chuck Denlinger, Bruce Ikenaga, Kit Kittappa, Tim McDevitt y Zhoude Shao, de la Millersville University, por las mejoras que aportaron a la primera edición. Y a todos nuestros estudiantes, que a lo largo de los años (y a veces sin saberlo) han servido para experimentar muchas ideas, algunas que tuvieron éxito y otras que no han llegado a plasmarse en este libro. Finalmente, agradecemos el soporte de la Millersville University Faculty Grants Committee y de la Millersville University Faculty Professional Development Committee por la concesión de ayudas y a la Millersville University por el beneficio de un año sabático. Estas ayudas han supuesto un aporte de tiempo crítico para la elaboración de la primera edición de esta obra, que los autores agradecen profundamente.

En último término, este libro es de nuestras familias, a las que debemos su cariño y su inspiración durante el largo tiempo que ha durado este proyecto. Su comprensión, tanto en sentido técnico como personal, ha sido esencial para nosotros. Escribir un libro de esta magnitud no hubiera sido posible sin su colaboración. Ellos son la razón de todo cuanto hacemos. Por tanto, es justo expresar nuestra gratitud especialmente a nuestras esposas, Pam Vercellone-Smith y Jan Minton; a nuestros hijos, Katie y Michael Smith y Kelly y Greg Minton, y a nuestros padres, Anne Smith y Paul y Mary Frances Minton.

ROBERT T. SMITH
Lancaster, Pennsylvania

ROLAND B. MINTON
Salem, Virginia

# ÁLGEBRA

## ARITMÉTICA

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \qquad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)} = \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{d}{c}\right) = \frac{ad}{bc}$$

## FACTORIZACIÓN

$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) \qquad x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$$

$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2) \qquad x^4 - y^4 = (x-y)(x+y)(x^2+y^2)$$

## TEOREMA DEL BINOMIO

$$(x+y^2) = x^2 + 2xy + y^2 \qquad (x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

## EXPONENTES

$$x^n x^m = x^{n+m} \qquad \frac{x^n}{x^m} = x^{n-m} \qquad (x^n)^m = x^{nm}$$

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} \qquad (xy)^n = x^n y^n \qquad \left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$$

$$x^{n/m} = \sqrt[m]{x^n} \qquad \sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y} \qquad \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$$

## RECTAS

Pendiente $m$ de la recta en $(x_0, y_0)$ y $(x_1, y_1)$

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

En el punto $(x_0, y_0)$, la pendiente $m$ será

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

La pendiente en la intersección entre $y$ y $b$

$$y = mx + b$$

## FÓRMULA CUADRÁTICA

Si $ax^2 + bx + c = 0$, entonces

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

## DISTANCIA

Distancia $d$ comprendida entre $(x_1, y_1)$ y $(x_2, y_2)$

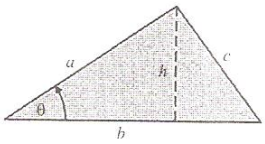
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

# GEOMETRÍA

## TRIÁNGULO

Área $= \frac{1}{2}bh$

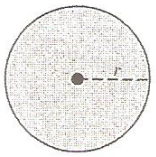
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$




## CÍRCULO

Área $= \pi r^2$

$C = 2\pi r$

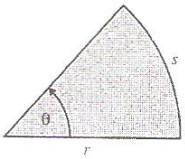



## SECTOR CIRCULAR

Área $= \frac{1}{2}r^2\theta$

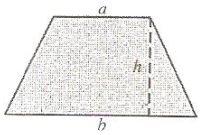
$s = r\theta$

(para $\theta$ sólo en radianes)




## TRAPEZOIDE

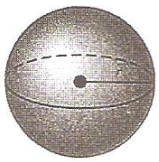
Área $= \frac{1}{2}(a+b)h$




## ESFERA

Volumen $= \frac{4}{3}\pi r^3$

Área $= 4\pi r^2$




## CONO

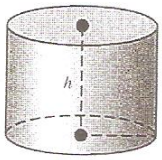
Volumen $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

Área $= \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$

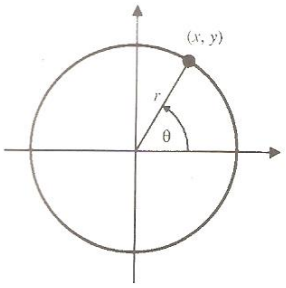
## CILINDRO

Volumen $= \pi r^2 h$

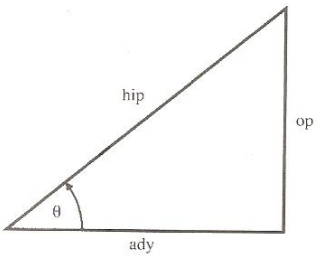
Área $= 2\pi r h$



# TRIGONOMETRÍA




$$\text{sen}\,\theta = \frac{y}{r} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$




$$\text{sen}\,\theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}} \qquad \cos\theta = \frac{\text{ady}}{\text{hip}} \qquad \tan\theta = \frac{\text{op}}{\text{ady}}$$

## IDENTIDADES RECÍPROCAS

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \text{cosec}\,\theta = \frac{1}{\text{sen}\,\theta}$$

## DEFINICIONES

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \text{cosec}\,\theta = \frac{1}{\text{sen}\,\theta}$$

## IDENTIDADES DE PITÁGORAS

$$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad \tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta \qquad 1 + \cot^2\theta = \text{cosec}^2\theta$$

## IDENTIDADES DE COFUNCIONES

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \text{sen}\,\theta \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta$$

## DIRECTO/OPUESTO

$$\text{sen}(-\theta) = \text{sen}\,\theta \qquad \cos(-\theta) = \cos\theta \qquad \tan(-\theta) = \tan\theta$$

## ÁNGULO DOBLE

$$\text{sen}\,2\theta = 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta \qquad \cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta \qquad \cos 2\theta = 1 - 2\,\text{sen}^2\theta$$

## ÁNGULO MITAD

$$\text{sen}^2\,\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \qquad \cos^2\,\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

## SUMA

$$\text{sen}(a + b) = \text{sen}\,a\cos b + \cos a\,\text{sen}\,b \qquad \cos(a + b) = \cos a\cos b - \text{sen}\,a\,\text{sen}\,b$$

## RESTA

$$\text{sen}(a - b) = \text{sen}\,a\cos b - \cos a\,\text{sen}\,b \qquad \cos(a - b) = \cos a\cos b + \text{sen}\,a\,\text{sen}\,b$$

## SUMA

$$\text{sen}\,u + \text{sen}\,v = 2\,\text{sen}\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2} \qquad \cos u + \cos v = 2\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$$

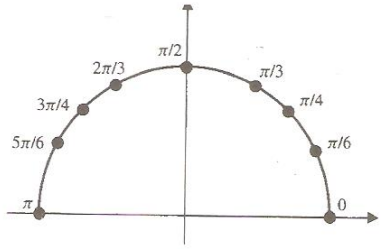
## PRODUCTO

$$\text{sen}\,u\,\text{sen}\,v = \frac{1}{2}[\cos(u - v) - \cos(u + v)]$$

$$\cos u\cos v = \frac{1}{2}[\cos(u - v) + \cos(u + v)]$$

$$\text{sen}\,u\cos v = \frac{1}{2}[\text{sen}(u + v) + \text{sen}(u - v)]$$

$$\cos u\,\text{sen}\,v = \frac{1}{2}[\text{sen}(u + v) - \text{sen}(u - v)]$$




Radianes

$$\text{sen}(0) = 0 \qquad \cos(0) = 1$$

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \qquad \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\text{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \qquad \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{sen}(\pi) = 0 \qquad \cos(\pi) = -1$$

$$\text{sen}(2\pi) = 0 \qquad \cos(2\pi) = 1$$

# FÓRMULAS DE DERIVACIÓN

## REGLAS GENERALES

$$\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)] = f'(x)+g'(x) \qquad \frac{d}{dx}[f(x)-g(x)] = f'(x)-g'(x) \qquad \frac{d}{dx}[cf(x)] = cf'(x)$$

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x))g'(x) \qquad \frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x)+f(x)g'(x) \qquad \frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

## REGLAS DE POTENCIAS

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1} \qquad \frac{d}{dx}(c) = 0 \qquad \frac{d}{dx}(cx) = c \qquad \frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

## EXPONENCIALES

$$\frac{d}{dx}[e^x] = e^x \qquad \frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a \qquad \frac{d}{dx}[e^{u(x)}] = e^{u(x)}u'(x) \qquad \frac{d}{dx}[e^{rx}] = r\,e^{rx}$$

## TRIGONOMÉTRICAS

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x \qquad \frac{d}{dx}(\cos x) = \operatorname{sen} x \qquad \frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = \operatorname{cosec}^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = \operatorname{cosec} x \cot x$$

## TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = -\frac{1}{1+x^2} \qquad \frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{cosec}^{-1} x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

## HIPERBÓLICAS

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{senh} x) = \cosh x \qquad \frac{d}{dx}(\cosh x) = \operatorname{senh} x \qquad \frac{d}{dx}(\tanh x) = \operatorname{sech}^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\coth x) = \operatorname{cosec}^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{sech} x) = \operatorname{sech} x \tanh x \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x \coth x$$

## HIPERBÓLICAS INVERSAS

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{senh}^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\cosh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \qquad \frac{d}{dx}(\tanh^{-1} x) = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\frac{d}{dx}(\coth^{-1} x) = \frac{1}{1-x^2} \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{sech}^{-1} x) = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{cosec}^{-1} x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2+1}}$$

# TABLA DE INTEGRALES

## FORMAS QUE CONTIENEN $a + bu$

1. $\int \frac{1}{a+bu}\,du = \frac{1}{b}\ln|a+bu| + c$

2. $\int \frac{u}{a+bu}\,du = \frac{1}{b^2}(a+bu - a\ln|a+bu|) + c$

3. $\int \frac{u^2}{a+bu}\,du = \frac{1}{2b^3}[(a+bu)^2 - 4a(a+bu) + 2a^2\ln|a+bu|] + c$

4. $\int \frac{1}{u(a+bu)}\,du = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{u}{a+bu}\right| + c$

5. $\int \frac{1}{u^2(a+bu)}\,du = \frac{b}{a^2}\ln\left|\frac{a+bu}{u}\right| - \frac{1}{au} + c$

## FORMAS QUE CONTIENEN $(a + bu)^2$

6. $\int \frac{1}{(a+bu)^2}\,du = \frac{-1}{b(a+bu)} + c$

7. $\int \frac{u}{(a+bu)^2}\,du = \frac{1}{b^2}\left(\frac{a}{a+bu} + \ln|a+bu|\right) + c$

8. $\int \frac{u^2}{(a+bu)^2}\,du = \frac{1}{b^3}\left(a+bu - \frac{a^2}{a+bu} - 2a\ln|a+bu|\right) + c$

9. $\int \frac{1}{u(a+bu)^2}\,du = \frac{1}{a(a+bu)} + \frac{1}{a^2}\ln\left|\frac{u}{a+bu}\right| + c$

10. $\int \frac{1}{u^2(a+bu)^2}\,du = \frac{2b}{a^3}\ln\left|\frac{a+bu}{u}\right| - \frac{a+2bu}{a^2u(a+bu)} + c$

## FORMAS QUE CONTIENEN $\sqrt{a + bu}$

11. $\int u\sqrt{a+bu}\,du = \frac{2}{105b^2}(3bu - 2a)(a+bu)^{3/2} + c$

12. $\int u^2\sqrt{a+bu}\,du = \frac{2}{15b^3}(15b^2u^2 - 12abu + 8a^2)(a+bu)^{3/2} + c$

13. $\int u^n\sqrt{a+bu}\,du = \frac{2}{b(2n+3)}u^n(a+bu)^{3/2} - \frac{2na}{b(2n+3)}\int u^{n-1}\sqrt{a+bu}\,du$

14. $\int \frac{\sqrt{a+bu}}{u}\,du = 2\sqrt{a+bu} + a\int \frac{1}{u\sqrt{a+bu}}\,du$

15. $\int \frac{\sqrt{a+bu}}{u^n}\,du = \frac{-1}{a(n-1)}\frac{(a+bu)^{3/2}}{u^{n-1}} - \frac{(2n-5)b}{2a(n-1)}\int \frac{\sqrt{a+bu}}{u^{n-1}}\,du,\ n \neq 1$

16a. $\int \frac{1}{u\sqrt{a+bu}}\,du = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{\sqrt{a+bu}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bu}+\sqrt{a}}\right| + c,\ a > 0$

16b. $\int \frac{1}{u\sqrt{a+bu}}\,du = \frac{2}{\sqrt{-a}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{a+bu}{-a}} + c,\ a < 0$

17. $\int \frac{1}{u^n\sqrt{a+bu}}\,du = \frac{-1}{a(n-1)}\frac{\sqrt{a+bu}}{u^{n-1}} - \frac{(2n-3)b}{2a(n-1)}\int \frac{1}{u^{n-1}\sqrt{a+bu}}\,du,\ n \neq 1$

18. $\int \frac{u}{\sqrt{a+bu}}\,du = \frac{2}{3b^2}(bu - 2a)\sqrt{a+bu} + c$

19. $\int \frac{u^2}{\sqrt{a+bu}}\,du = \frac{2}{15b^3}(3b^2u^2 - 4abu + 8a^2)\sqrt{a+bu} + c$

20. $\int \frac{u^n}{\sqrt{a+bu}}\,du = \frac{2}{(2n+1)b}u^n\sqrt{a+bu} - \frac{2na}{(2n+1)b}\int \frac{u^{n-1}}{\sqrt{a+bu}}\,du$

## FORMAS QUE CONTIENEN $\sqrt{a^2 + u^2},\ a > 0$

21. $\int \sqrt{a^2+u^2}\,du = \frac{1}{2}u\sqrt{a^2+u^2} + \frac{1}{2}a^2\ln|u+\sqrt{a^2+u^2}| + c$

22. $\int u^2\sqrt{a^2+u^2}\,du = \frac{1}{8}u(a^2+2u^2)\sqrt{a^2+u^2} - \frac{1}{8}a^4\ln|u+\sqrt{a^2+u^2}| + c$

23. $\int \frac{\sqrt{a^2+u^2}}{u}\,du = \sqrt{a^2+u^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2+u^2}}{u}\right| + c$

24. $\int \frac{\sqrt{a^2+u^2}}{u^2}\,du = \ln|u+\sqrt{a^2+u^2}| - \frac{\sqrt{a^2+u^2}}{u} + c$

25. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2+u^2}}\,du = \ln|u+\sqrt{a^2+u^2}| + c$

26. $\int \frac{u^2}{\sqrt{a^2+u^2}}\,du = \frac{1}{2}u\sqrt{a^2+u^2} - \frac{1}{2}a^2\ln|u+\sqrt{a^2+u^2}| + c$

27. $\int \frac{1}{u\sqrt{a^2+u^2}}\,du = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{u}{a+\sqrt{a^2+u^2}}\right| + c$

28. $\int \frac{1}{u^2\sqrt{a^2+u^2}}\,du = -\frac{\sqrt{a^2+u^2}}{a^2u} + c$

## FORMAS QUE CONTIENEN $\sqrt{a^2 - u^2},\ a > 0$

29. $\int \sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{1}{2}u\sqrt{a^2-u^2} + \frac{1}{2}a^2\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + c$

30. $\int u^2\sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{1}{8}u(2u^2-a^2)\sqrt{a^2-u^2} + \frac{1}{8}a^4\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + c$

31. $\int \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u}\,du = \sqrt{a^2-u^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}\right| + c$

32. $\int \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u^2}\,du = -\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u} - \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + c$

33. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-u^2}}\,du = \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + c$

34. $\int \frac{1}{u\sqrt{a^2-u^2}}\,du = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}\right| + c$

35. $\int \frac{u^2}{\sqrt{a^2-u^2}}\,du = -\frac{1}{2}u\sqrt{a^2-u^2} + \frac{1}{2}a^2\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + c$

36. $\int \frac{1}{u^2\sqrt{a^2-u^2}}\,du = -\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{a^2u} + c$

## FORMAS QUE CONTIENEN $\sqrt{u^2 - a^2}$, $a > 0$

37. $\int \sqrt{u^2 - a^2}\, du = \frac{1}{2} u\sqrt{u^2 - a^2} - \frac{1}{2} a^2 \ln|u + \sqrt{u^2 + a^2}| + c$

38. $\int u^2\sqrt{u^2 - a^2}\, du = \frac{1}{8} u(2u^2 - a^2)\sqrt{u^2 - a^2} - \frac{1}{8} a^4 \ln|u + \sqrt{u^2 + a^2}| + c$

39. $\int \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u^2}\, du = \sqrt{u^2 - a^2} - a \sec^{-1} \frac{|u|}{a} + c$

40. $\int \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u^2}\, du = \ln|u + \sqrt{u^2 - a^2}| - \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u} + c$

41. $\int \frac{1}{\sqrt{u^2 - a^2}}\, du = \ln|u + \sqrt{u^2 - a^2}| + c$

42. $\int \frac{u^2}{\sqrt{u^2 - a^2}}\, du = \frac{1}{2} u\sqrt{u^2 - a^2} + \frac{1}{2} a^2 \ln|u + \sqrt{u^2 - a^2}| + c$

43. $\int \frac{1}{u\sqrt{u^2 - a^2}}\, du = \frac{1}{a} \sec^{-1} \frac{|u|}{a} + c$

44. $\int \frac{1}{u^2\sqrt{u^2 - a^2}}\, du = \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{a^2 u} + c$

## FORMAS QUE CONTIENEN $\sqrt{2au - u^2}$

45. $\int \sqrt{2au - u^2}\, du = \frac{1}{2}(u - a)\sqrt{2au - u^2} + \frac{1}{2} a^2 \cos^{-1}\left(\frac{a - u}{a}\right) + c$

46. $\int u\sqrt{2au - u^2}\, du = \frac{1}{6}(2u^2 - au - 3a^2)\sqrt{2au - u^2} + \frac{1}{2} a^3 \cos^{-1}\left(\frac{a - u}{a}\right) + c$

47. $\int \frac{\sqrt{2au - u^2}}{u}\, du = \sqrt{2au - u^2} + a \cos^{-1}\left(\frac{a - u}{a}\right) + c$

48. $\int \frac{\sqrt{2au - u^2}}{u^2}\, du = -\frac{2\sqrt{2au - u^2}}{u} - \cos^{-1}\left(\frac{a - u}{a}\right) + c$

49. $\int \frac{1}{\sqrt{2au - u^2}}\, du = \cos^{-1}\left(\frac{a - u}{a}\right) + c$

50. $\int \frac{u}{\sqrt{2au - u^2}}\, du = -\sqrt{2au - u^2} + a \cos^{-1}\left(\frac{a - u}{a}\right) + c$

51. $\int \frac{u^2}{\sqrt{2au - u^2}}\, du = -\frac{1}{2}(u + 3a)\sqrt{2au - u^2} + \frac{3}{2} a^2 \cos^{-1}\left(\frac{a - u}{a}\right) + c$

52. $\int \frac{1}{u\sqrt{2au - u^2}}\, du = \frac{\sqrt{2au - u^2}}{au} + c$

## FORMAS QUE CONTIENEN sen $u$ O cos $u$

53. $\int \operatorname{sen} u\, du = -\cos u + c$

54. $\int \cos u\, du = \operatorname{sen} u + c$

55. $\int \operatorname{sen}^2 u\, du = \frac{1}{2} u - \frac{1}{2} \operatorname{sen} u \cos u + c$

56. $\int \cos^2 u\, du = \frac{1}{2} u + \frac{1}{2} \operatorname{sen} u \cos u + c$

57. $\int \operatorname{sen}^3 u\, du = -\frac{2}{3} \cos u - \frac{1}{3} \operatorname{sen}^2 u \cos u + c$

58. $\int \cos^3 u\, du = \frac{2}{3} \operatorname{sen} u + \frac{1}{3} \operatorname{sen} u \cos^2 u + c$

59. $\int \operatorname{sen}^n u\, du = -\frac{1}{n} \operatorname{sen}^{n-1} u \cos u + \frac{n - 1}{n} \int \operatorname{sen}^{n-2} u\, du$

60. $\int \cos^n u\, du = \frac{1}{n} \cos^{n-1} u \operatorname{sen} u + \frac{n - 1}{n} \int \cos^{n-2} u\, du$

61. $\int u \operatorname{sen} u\, du = \operatorname{sen} u - u \cos u + c$

62. $\int u \cos u\, du = \cos u + u + \operatorname{sen} u + c$

63. $\int u^n \operatorname{sen} u\, du = -u^n \cos u + n \int u^{n-1} \cos u\, du + c$

64. $\int u^n \cos u\, du = u^n \operatorname{sen} u - n \int u^{n-1} \operatorname{sen} u\, du + c$

65. $\int \frac{1}{1 + \operatorname{sen} u}\, du = \tan u - \sec u + c$

66. $\int \frac{1}{1 - \operatorname{sen} u}\, du = \tan u + \sec u + c$

67. $\int \frac{1}{1 + \cos u}\, du = -\cot u + \operatorname{cosec} u + c$

68. $\int \frac{1}{1 - \cos u}\, du = -\cot u - \operatorname{cosec} u + c$

69. $\int \operatorname{sen}(mu) \operatorname{sen}(nu)\, du = \frac{\operatorname{sen}(m - n)u}{2(m - n)} - \frac{\operatorname{sen}(m + n)u}{2(m + n)} + c$

70. $\int \cos(mu) \cos(nu)\, du = \frac{\operatorname{sen}(m - n)u}{2(m - n)} + \frac{\operatorname{sen}(m + n)u}{2(m + n)} + c$

71. $\int \operatorname{sen}(mu) \cos(nu)\, du = \frac{\cos(n - m)u}{2(n - m)} - \frac{\cos(m + n)u}{2(m + n)} + c$

72. $\int \operatorname{sen}^m u \cos^n u\, du = \frac{\operatorname{sen}^{m+1} u \cos^{n+1} u}{m + n} + \frac{m - 1}{m + n} \int \operatorname{sen}^{m-2} u \cos^n u\, du$

## FORMAS QUE INCLUYEN OTRAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

73. $\int \tan u\, du = -\ln|\cos u| + c = \ln|\sec u| + c$

74. $\int \cot u\, du = \ln|\operatorname{sen} u| + c$

75. $\int \sec u\, du = \ln|\sec u + \tan u| + c$

76. $\int \operatorname{cosec} u\, du = \ln|\operatorname{cosec} u - \cot u| + c$

77. $\int \tan^2 u\, du = \tan u - u + c$

78. $\int \cot^2 u\, du = -\cot u - u + c$

79. $\int \sec^2 u\, du = \tan u + c$

80. $\int \csc^2 u\, du = -\cot u + c$

81. $\int \tan^3 u\,du = \frac{1}{2}\tan^2 u + \ln|\cos u| + c$

82. $\int \cot^3 u\,du = -\frac{1}{2}\cot^2 u - \ln|\operatorname{sen} u| + c$

83. $\int \sec^3 u\,du = \frac{1}{2}\sec u \tan u + \frac{1}{2}\ln|\sec u + \tan u| + c$

84. $\int \csc^3 u\,du = -\frac{1}{2}\csc u \cot u + \frac{1}{2}\ln|\csc u - \cot u| + c$

85. $\int \tan^n u\,du = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} u - \int \tan^{n-2} u\,du,\ n \neq 1$

86. $\int \cot^n u\,du = -\frac{1}{n-1}\cot^{n-1} u - \int \cot^{n-2} u\,du,\ n \neq 1$

87. $\int \sec^n u\,du = \frac{1}{n-1}\sec^{n-2} u \tan u + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} u\,du,\ n \neq 1$

88. $\int \csc^n u\,du = -\frac{1}{n-1}\csc^{n-2} u \cot u + \frac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2} u\,du,\ n \neq 1$

89. $\int \frac{1}{1 \pm \tan u}\,du = \frac{1}{2}u \pm \ln|\cos u \pm \operatorname{sen} u| + c$

90. $\int \frac{1}{1 \pm \cot u}\,du = \frac{1}{2}u \mp \ln|\operatorname{sen} u \pm \cos u| + c$

91. $\int \frac{1}{1 \pm \sec u}\,du = u + \cot u \mp \csc u + c$

92. $\int \frac{1}{1 \pm \csc u}\,du = u - \tan u \pm \sec u + c$

## FORMAS QUE INCLUYEN FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

93. $\int \operatorname{sen}^{-1} u\,du = u\operatorname{sen}^{-1} u + \sqrt{1-u^2} + c$

94. $\int \cos^{-1} u\,du = u\cos^{-1} u - \sqrt{1-u^2} + c$

95. $\int \tan^{-1} u\,du = u\tan^{-1} u - \ln\sqrt{1+u^2} + c$

96. $\int \cot^{-1} u\,du = u\cot^{-1} u + \ln\sqrt{1+u^2} + c$

97. $\int \sec^{-1} u\,du = u\sec^{-1} u - \ln\left|u + \sqrt{u^2-1}\right| + c$

98. $\int \csc^{-1} u\,du = u\csc^{-1} u + \ln\left|u + \sqrt{u^2-1}\right| + c$

99. $\int u\operatorname{sen}^{-1} u\,du = \frac{1}{4}(2u^2-1)\operatorname{sen}^{-1} u + \frac{1}{4}u\sqrt{1-u^2} + c$

100. $\int u\cos^{-1} u\,du = \frac{1}{4}(2u^2-1)\cos^{-1} u - \frac{1}{4}u\sqrt{1-u^2} + c$

## FORMAS QUE INCLUYEN $e^u$

101. $\int e^{au}\,du = \frac{1}{a}e^{au} + c$

102. $\int ue^{au}\,du = \left(\frac{1}{a}u - \frac{1}{a^2}\right)e^{au} + c$

103. $\int u^2 e^{au}\,du = \left(\frac{1}{a}u^2 - \frac{2}{a^2}u + \frac{2}{a^3}\right)e^{au} + c$

104. $\int u^n e^{au}\,du = \frac{1}{a}u^n e^{au} - \frac{n}{a}\int u^{n-1} e^{au}\,du$

105. $\int e^{au}\operatorname{sen} bu\,du = \frac{1}{a^2+b^2}(a\operatorname{sen} bu - b\cos bu)e^{au} + c$

106. $\int e^{au}\cos bu\,du = \frac{1}{a^2+b^2}(a\cos bu + b\operatorname{sen} bu)e^{au} + c$

## FORMAS QUE INCLUYEN $\ln u$

107. $\int \ln u\,du = u\ln u - u + c$

108. $\int u\ln u\,du = \frac{1}{2}u^2\ln u - \frac{1}{4}u^2 + c$

109. $\int u^n \ln u\,du = \frac{1}{n+1}u^{n+1}\ln u - \frac{1}{(n+1)^2}u^{n+1} + c$

110. $\int \frac{1}{u\ln u}\,du = \ln|\ln u| + c$

111. $\int (\ln u)^2\,du = u(\ln u)^2 - 2u\ln u + 2u + c$

112. $\int (\ln u)^n\,du = u(\ln u)^n - n\int (\ln u)^{n-1}\,du$

## FORMAS QUE INCLUYEN FUNCIONES HIPERBÓLICAS

113. $\int \operatorname{senh} u\,du = \cosh u + c$

114. $\int \cosh u\,du = \operatorname{senh} u + c$

115. $\int \tanh u\,du = \ln(\cosh u) + c$

116. $\int \coth u\,du = \ln|\operatorname{senh} u| + c$

117. $\int \operatorname{sech} u\,du = \tan^{-1}|\operatorname{senh} u| + c$

118. $\int \operatorname{csch} u\,du = \ln\left|\tanh\frac{1}{2}u\right| + c$

119. $\int \operatorname{sech}^2 u\,du = \tanh u + c$

120. $\int \operatorname{csch}^2 u\,du = -\coth u + c$

121. $\int \operatorname{sech} u\tanh u\,du = -\operatorname{sech} u + c$

122. $\int \operatorname{csch} u\coth u\,du = -\operatorname{csch} u + c$

123. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \operatorname{senh}^{-1} x + c$

124. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \cosh^{-1} x + c$

125. $\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \tanh^{-1} x + c$

126. $\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2+1}}\,dx = -\operatorname{csch}^{-1} x + c$

127. $\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\operatorname{sech}^{-1} x + c$

# CAPÍTULO 0

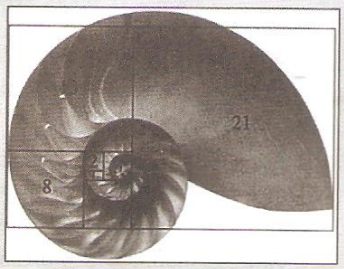
# PRELIMINARES

No es preciso detenerse mucho en las seis primeras secciones de este capítulo. Repasan cuestiones conocidas de antemano, aunque, eso sí, **esenciales** en lo que sigue. Basta estudiarlas lo suficiente para sentirse cómodo con los conceptos y técnicas que aparecen en ellas.

Una buena comprensión requiere fundamentos sólidos. Sin pretender una exposición exhaustiva de las matemáticas previas al Cálculo, recordamos los aspectos más relevantes e introducimos notaciones y terminología de uso frecuente.

Uno de los objetivos más antiguos de las matemáticas es el análisis de poblaciones. El matemático del siglo XVI Leonardo de Pisa (conocido como Fibonacci) analizó un modelo simple de crecimiento de poblaciones dado por la famosa **sucesión de Fibonacci**, 1, 1, 2, 3, 5, 8, . . . , en la que cada número es la suma de los dos que le preceden. La sucesión de Fibonacci hace acto de presencia en una variedad asombrosa de problemas, incluso en la Naturaleza (véase *The Divine Proportion*, de H. E. Huntley), por ejemplo, en la estructura espiral de las conchas de los *Nautilus*.

La investigación matemática sobre el crecimiento de poblaciones ha sido fundamental en la gestión de la fauna salvaje, en las planificaciones gubernamentales, en el control de epidemias y otras muchas áreas. A ese análisis contribuyen los métodos de cálculo que aprenderá a lo largo de este curso.



Concha de los *Nautilus*.

En la página siguiente se pueden ver los datos de población de Estados Unidos medidos en los censos. Para muchas personas, un listado de números es menos ilustrativo que la representación visual de esos datos. Gráficas como la de la figura 0.1 serán tratadas en las Secciones 0.1 y 0.2.

De la figura 0.1 surge una conclusión evidente: la población crece. Una forma de precisar *cómo* está creciendo consiste en ajustar esa gráfica con la de alguna función conocida.

Por ejemplo, los primeros seis o siete puntos parecen estar en una curva que se comba hacia arriba, como un polinomio o una función exponencial. De hecho, veremos en la Sección 0.6 que los datos entre 1800 y 1860 se ajustan bien con una exponencial. En ese tiempo, la tasa de crecimiento anual se mantiene casi constante, ajustándose a una característica de las funciones exponenciales.

Por el contrario, los últimos cuatro o cinco datos parecen estar en una recta. Las funciones lineales, que desempeñan un papel importante en el Cálculo, se estudian en la Sección 0.2.

| Año | Población |
|---|---|
| 1800 | 5.308.483 |
| 1810 | 7.239.881 |
| 1820 | 9.638.453 |
| 1830 | 12.866.020 |
| 1840 | 17.069.453 |
| 1850 | 23.191.876 |
| 1860 | 31.443.321 |
| 1870 | 38.558.371 |
| 1880 | 50.189.209 |
| 1890 | 62.979.766 |
| 1900 | 76.212.168 |
| 1910 | 92.228.496 |
| 1920 | 106.021.537 |
| 1930 | 123.202.624 |
| 1940 | 132.164.569 |
| 1950 | 151.325.798 |
| 1960 | 179.323.175 |
| 1970 | 203.302.031 |
| 1980 | 226.542.203 |
| 1990 | 248.709.873 |

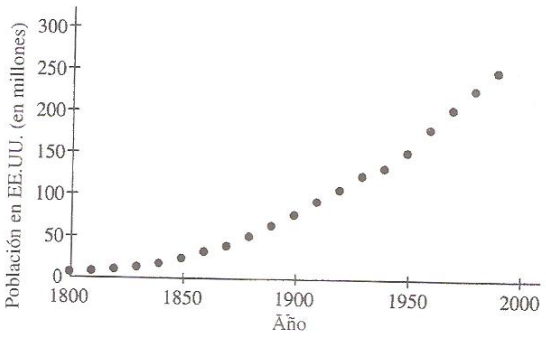



**Figura 0.1**
Población de EE.UU. entre 1800 y 1990.

La interacción entre gráficas y funciones es uno de los principales objetivos de este capítulo. Preste atención a las formas típicas de varias clases de funciones. Combinando las potentes técnicas algebraicas de resolución de ecuaciones con la visualización de gráficas, le será más fácil profundizar en el Cálculo y enfrentarse a problemas matemáticos sacados de la vida real.

## 0.1 LOS NÚMEROS REALES Y EL PLANO CARTESIANO

Aunque las Matemáticas son mucho más que una ciencia de los números, nuestro viaje comienza con los números reales. Puede parecer que ya se conocen lo suficiente, pero queremos repasar las propiedades más relevantes para el Cálculo. Una base sólida en este aspecto ayuda a abordar las abundantes sutilezas que nos irán saliendo al paso.

Los números más familiares son los **enteros**: $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$.

Se llama **racionales** a los números $\frac{p}{q}$, donde $p$, $q$ son enteros, con $q \neq 0$. Por ejemplo, $\frac{2}{3}$, $-\frac{7}{3}$ y $\frac{27}{125}$ son números racionales. Nótese que todo entero $n$ es racional, ya que es cociente de enteros $n = \frac{n}{1}$.

Se llama **irracionales** a todos los números reales que no pueden escribirse como $\frac{p}{q}$, con $p$ y $q$ enteros. Entre ellos se encuentran números muy importates, como $\sqrt{2}$, $\pi$ y $e$.

Los números racionales tienen una expresión decimal que termina o se repite. Así, $\frac{1}{2} = 0{,}5$, $\frac{1}{3} = 0{,}33333\overline{3}$, $\frac{1}{8} = 0{,}125$ y $\frac{1}{6} = 0{,}166666\overline{6}$ son todos racionales. Por el contrario, los irracionales tienen expresiones decimales infinitas que no se repiten, tales como

$$\sqrt{2} = 1{,}4142135623\ldots,$$
$$\pi = 3{,}1415926535\ldots$$

y

$$e = 2{,}7182818284\ldots$$

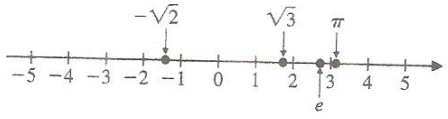



**Figura 0.2**
La recta real.

Se suelen representar los números reales sobre una recta como la de la figura 0.2, que llamaremos **la recta real**, con centro en 0 y que se extiende sin tope en ambas direcciones, positiva (derecha) y negativa (izquierda). Denotaremos el conjunto de los números reales por $\mathbb{R}$.

**Figura 0.3**
Un intervalo cerrado.

Dados números reales $a$ y $b$, con $a < b$, el **intervalo cerrado** $[a, b]$ se define como el conjunto de todos los números reales entre $a$ y $b$, incluidos $a$ y $b$ (**extremos** o puntos terminales del intervalo). Esto es,

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\},$$

como ilustra la figura 0.3, donde los circulitos llenos indican que $a$ y $b$ están incluidos en $[a, b]$.

**Figura 0.4**
Un intervalo abierto.

Y definimos el **intervalo abierto** $(a, b)$ como el conjunto de números entre $a$ y $b$, pero sin incluir $a$ ni $b$. Esto es,

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\},$$

como ilustra la figura 0.4, donde los circulitos huecos indican que $a$ y $b$ no están incluidos en $(a, b)$.

Las siguientes propiedades de los números reales ya serán familiares al lector.

**Teorema 1.1**

Si $a$ y $b$ son números reales, con $a < b$, entonces

(i) Para todo número real $c$, $a + c < b + c$.
(ii) Para cualesquiera números reales $c$ y $d$, si $c < d$, entonces $a + c < b + d$.
(iii) Para todo número real $c > 0$, $a \cdot c < b \cdot c$.
(iv) Para todo número real $c < 0$, $a \cdot c > b \cdot c$.

**Nota 1.1**

Las propiedades del teorema 1.1 se usan para resolver desigualdades.
La (i) dice que a una desigualdad se le puede sumar, en ambos lados, cualquier número.
Las (iii) y (iv) afirman que al multiplicar ambos lados por un número $c$, la desigualdad se conserva si $c > 0$ y se invierte si $c < 0$.

Ilustramos la aplicación del teorema 1.1 resolviendo una desigualdad sencilla.

**Ejemplo 1.1** **Resolución de una desigualdad lineal**

Resolver la desigualdad lineal $2x + 5 < 13$.

**Solución** Despejaremos $x$ gracias a las propiedades del teorema 1.1. En primer lugar, restamos 5 en ambos lados.

$$(2x + 5) - 5 < 13 - 5$$

o sea,

$$2x < 8.$$

Finalmente, divimos entre 2 (como $2 > 0$, la desigualdad se conserva) para obtener

$$x < 4.$$

Muchas veces escribimos la solución de una desigualdad en términos de intervalos. En este caso, $(-\infty, 4)$.

Desigualdades más complicadas se manejan de forma análoga.

**Ejemplo 1.2** **Resolución de una desigualdad doble**

Resolver la desigualdad doble $6 < 1 - 3x \leq 10$.

**Solución** El problema consiste en encontrar los valores de $x$ tales que

$$6 < 1 - 3x \quad \text{y} \quad 1 - 3x \leq 10.$$

Podemos usar las propiedades del teorema 1.1 para despejar $x$, trabajando simultáneamente en las dos desigualdades. Empezamos restando 1.

$$6 - 1 < (1 - 3x) - 1 \leq 10 - 1$$

o sea,

$$5 < -3x \leq 9.$$

Ahora dividimos entre –3. Pero ¡cuidado!, como $-3 < 0$, las dos desigualdades se invierten así que queda

$$\frac{5}{-3} > \frac{-3x}{-3} \geq \frac{9}{-3}$$

o sea,

$$-\frac{5}{3} > x \geq -3.$$

Suele escribirse eso como

$$-3 \leq x < -\frac{5}{3}$$

o, en notación de intervalos, como $\left[-3, -\frac{5}{3}\right)$.

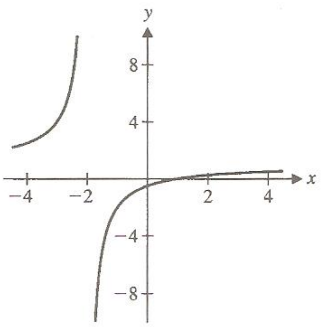
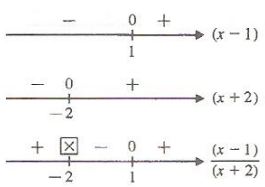



**Figura 0.5**

$$y = \frac{x-1}{x+2}$$




Con frecuencia nos vemos obligados a resolver desigualdades con fracciones, como el ejemplo típico que sigue.

### Ejemplo 1.3 Una desigualdad que contiene una fracción

Resolver la desigualdad $\frac{x-1}{x+2} \geq 0$.

**Solución** La gráfica de la función (figura 0.5) sugiere que la solución incluye todos los $x < -2$ y los $x \geq 1$. Un primer impulso es multiplicar por $(x + 2)$ para evitar la fracción. Mejor que eso, veamos qué significa la desigualdad. Las gráficas sólo dejan ver parte del asunto. Buscamos los $x$ para los que la fracción sea no negativa ($\geq 0$). Hay tres posibilidades: numerador y denominador positivos ambos, negativos ambos o numerador cero.
El esquema del margen indica dónde son $0$, $> 0$, $< 0$ el numerador, el denominador y el cociente. El símbolo "⊠" encima de –2 indica que en $x = -2$ el cociente no está definido. Deducimos que el cociente es no negativo para $x < -2$ y para $x \geq 1$. Por tanto, en notación de intervalos, la solución es $(-\infty, -2) \cup [1, \infty)$.

Otras desigualdades frecuentes afectan a polinomios de grado 2 o mayor. En tales casos, se factoriza el polinomio y se estudia dónde son $> 0$ o $< 0$ los factores, como en el ejemplo siguiente.

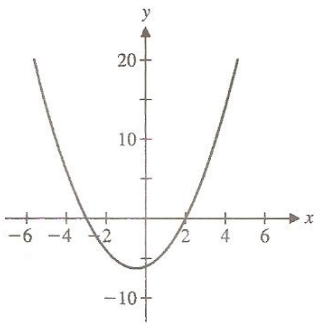
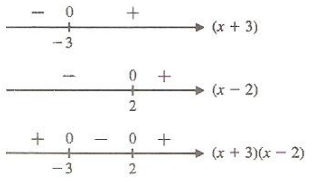



**Figura 0.6**
$y = x^2 + x - 6$




### Ejemplo 1.4 Resolución de una desigualdad cuadrática

Resolver la desigualdad cuadrática

$$x^2 + x - 6 > 0 \tag{1.1}$$

**Solución** La figura 0.6 muestra la gráfica de la expresión de la izquierda. El primer impulso es despejar $x$, pero eso no conduce a nada (¡inténtelo!). Merece la pena interpretar la desigualdad. Buscamos valores $x$ que hagan positiva la función $x^2 + x - 6$, lo cual equivale, factorizando, a que

$$(x + 3)(x - 2) > 0 \tag{1.2}$$

Es decir, buscamos los $x$ que hagan positivo el **producto** de $(x + 3)$ y $(x - 2)$. Eso sólo puede ocurrir si ambos factores tienen el mismo signo. Al margen indicamos dónde son $0$, $> 0$ o $< 0$ cada factor por separado y su producto. Vemos que el producto es positivo siempre que $x < -3$ o $x > 2$. En notación de intervalos, $(-\infty, -3) \cup (2, \infty)$.

**Nota 1.2**

Para toda desigualdad polinómica, el objetivo es el mismo que en el ejemplo 1.4: llevar todos los términos a un mismo lado, dejando 0 en el otro, factorizar a continuación y ver dónde es 0, > 0 o < 0 cada factor.

Sin duda, recordará la siguiente definición.

**Definición 1.1**

El **valor absoluto** de un número real $x$ es $|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$

¡Ojo con esta definición! Si $x$ es negativo, $-x$ es positivo. Así, pues, $|x| \geq 0$ para todo número real $x$. Por ejemplo,

$$|-4| = -(-4) = 4$$

Para todo par de números reales $a$ y $b$,

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|.$$

Sin embargo,

$$|a + b| \neq |a| + |b|,$$

en general. (Basta tomar $a = 5$ y $b = -2$ para comprobarlo).

Ahora bien, siempre es cierto que

$$|a + b| \leq |a| + |b|. \tag{1.3}$$

**Advertencia**

Para cualquier par de números reales $a$ y $b$, $|a - b|$ da la distancia entre $a$ y $b$ (figura 0.7).

La desigualdad (1.3) se llama **desigualdad triangular.** La usaremos más adelante.

La interpretación de $|a - b|$ como distancia entre $a$ y $b$ (véase nota al margen) es muy útil para resolver desigualdades con valores absolutos. Aconsejamos usar esta interpretación para entender el significado de tales desigualdades antes de proceder a su resolución.

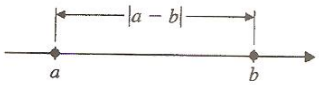



**Figura 0.7**
La distancia entre $a$ y $b$.

**Ejemplo 1.5** **Una desigualdad con un valor absoluto**

Resolver la desigualdad

$$|x - 2| < 5 \tag{1.4}$$

**Solución** Antes de nada, ¿qué dice la desigualdad? Que la **distancia** entre $x$ y 2 debe ser **menor que 5**. Así, pues, buscamos los números $x$ que distan del 2 menos de 5 (véase figura 0.8). Leemos la solución directamente de la figura: $-3 < x < 7$. En notación de intervalos: $(-3, 7)$.

**Figura 0.8**
$|x - 2| < 5$

Muchas desigualdades en las que aparecen valores absolutos se pueden resolver con sólo interpretarlas correctamente, como sucede en el próximo ejemplo.

**Ejemplo 1.6** **Desigualdad con el valor absoluto de una suma**

Resolver la desigualdad

$$|x + 4| \leq 7. \tag{1.5}$$

**Solución** Para interpretarla en términos de distancia, la reescribimos como

$$|x - (-4)| \leq 7.$$

Esto nos dice que la distancia entre $x$ y $-4$ es $\leq 7$, como se indica en la figura 0.9. De ella leemos directamente la solución: $-11 \leq x \leq 3$, es decir, $[-11, 3]$.

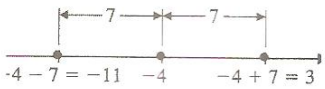



**Figura 0.9**
$|x + 4| \leq 7$

Como alternativa a la interpretación de $|x - a|$ en términos de distancia a la hora de resolver desigualdades, recordemos que para cualquier número $r > 0$, $|x| < r$ equivale a la desigualdad (ya sin valores absolutos)

$$-r < x < r$$

Usamos esta idea en el próximo ejemplo, un nuevo enfoque del ejemplo 1.5.

**Ejemplo 1.7** **Método alternativo para resolver desigualdes**

Resolver la desigualdad $|x - 2| < 5$.

**Solución** Es equivalente a la desigualdad doble

$$-5 < x - 2 < 5.$$

Sumando 2 a cada lado, obtenemos la solución

$$-3 < x < 7$$

que en notación de intervalos es $(-3, 7)$, como antes.

## El plano cartesiano

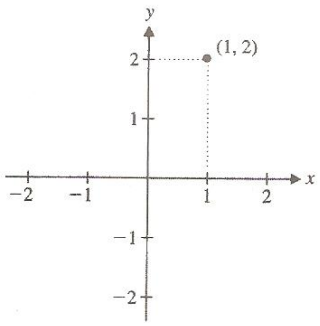



**Figura 0.10**
El plano cartesiano.

El **plano cartesiano** es un instrumento eficaz para explorar relaciones entre números. Con cada par de números reales $x$ e $y$ formamos un **par ordenado** $(x, y)$. Visualizamos el par $(x, y)$ como un punto en dos dimensiones. El plano cartesiano tiene dos rectas numéricas perpendiculares. La horizontal se llama eje $x$, la vertical eje $y$. El punto de intersección es el origen, que corresponde al par $(0, 0)$. Para representar el par $(1, 2)$, partimos del **origen**, avanzamos 1 unidad a la derecha, 2 unidades hacia arriba y marcamos el punto $(1, 2)$ (figura 0.10).

En el próximo ejemplo analizamos unos cuantos datos experimentales marcando sus puntos correspondientes en el plano cartesiano. Es lo que se llama una **gráfica de puntos.**

**Ejemplo 1.8** **Gráfica de datos experimentales**

Dejamos caer un objeto desde lo alto de un edificio y anotamos la distancia recorrida en diversos instantes, como muestra la tabla.

| Tiempo (seg) | 0 | 0,5 | 1,0 | 1,5 | 2,0 |
|---|---|---|---|---|---|
| Distancia (pies) | 0 | 4 | 16 | 36 | 64 |

Representar los puntos en el plano cartesiano y discutir las pautas que se perciben. En particular, usar la gráfica para predecir la distancia recorrida por el objeto en 2,5 segundos.

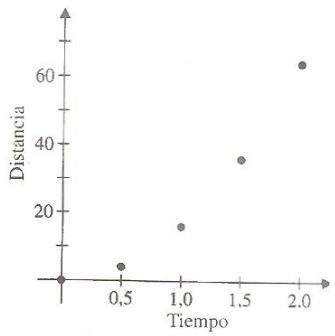



**Figura 0.11**
Puntos representados en el plano.

**Solución** Tomando el tiempo como coordenada $x$ y la distancia como $y$, marcamos los puntos $(0, 0)$, $(0{,}5, 4)$, $(1, 16)$, $(1{,}5, 36)$ y $(2, 64)$, obteniendo la figura 0.11.

Los puntos indican curvatura hacia arriba (tipo parábola). Para predecir el valor de $y$ correspondiente a $x = 2{,}5$, podemos suponer que la gráfica continúa, de modo que ese valor de $y$ estará mucho más alto que 64. Pero ¿cuánto más alto? Los datos enseñan que entre $x = 1{,}5$ y $x = 2$ la altura ha cambiado $64 - 36 = 28$ pies. Debido a la curvatura, la diferencia en altura va creciendo, así que parece razonable pensar que la altura habrá cambiado más de 28.

De hecho, en los datos se adivina una pauta. Las distancias a intervalos de 0,5 segundos son $0^2$, $2^2$, $4^2$, $6^2$ y $8^2$. Una estimación razonable es que la distancia, tras 2,5 segundos, será $10^2 = 100$. Eso daría un incremento de 36 respecto de la distancia en $x = 2$. Es sólo una estimación plausible; otras (98 o 102, digamos) serían también admisibles.

La relación entre datos numéricos y gráficas, del tipo de la que ofrece el ejemplo 1.8, será un tema recurrente en el estudio del Cálculo.

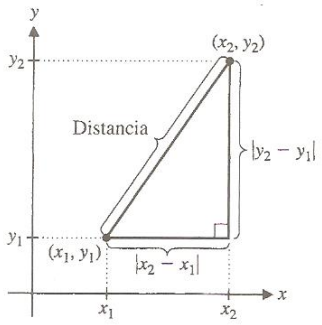



**Figura 0.12**
Distancia.

La fórmula de la distancia entre dos puntos en el plano cartesiano es consecuencia del teorema de Pitágoras.

**Teorema 1.2**
La distancia entre los puntos $(x_1, y_1)$ y $(x_2, y_2)$ en el plano cartesiano viene dada por

$$d\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\} = \sqrt{(x_2 - y_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{1.6}$$

**Demostración**
Hemos colocado los puntos en la figura 0.12 de manera que $(x_2, y_2)$ esté más alto y a la derecha de $(x_1, y_1)$.

En el triángulo rectángulo de la figura vemos que, independientemente de la colocación de los puntos, la longitud del lado horizontal es $|x_2 - x_1|$ y la del vertical $|y_2 - y_1|$. La distancia entre los dos puntos es la hipotenusa, de modo que el teorema de Pitágoras da para ella el valor

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Con la fórmula (1.6) de la distancia podemos analizar varias cuestiones.

**Ejemplo 1.9** **Aplicación de la fórmula de la distancia**

Calcular las distancias entre cada par de puntos (1, 2), (3, 4) y (2, 6). Determinar si estos tres puntos son vértices de un triángulo rectángulo.

**Solución** La distancia entre (1, 2) y (3, 4) es

$$d\{(1, 2), (3, 4)\} = \sqrt{(3 - 1)^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8}.$$

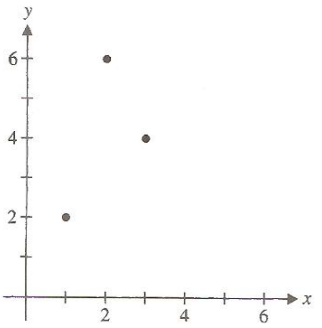



**Figura 0.13**
¿Un triángulo rectángulo?

La distancia entre (1, 2) y (2, 6) es

$$d\{(1, 2), (2, 6)\} = \sqrt{(2 - 1)^2 + (6 - 2)^2} = \sqrt{1 + 16} = \sqrt{17}.$$

Finalmente, la distancia entre (3, 4) y (2, 6) es

$$d\{(3, 4), (2, 6)\} = \sqrt{(2 - 3)^2 + (6 - 4)^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}.$$

En la figura 0.13 no está claro si los puntos producen en (3, 4) un ángulo recto. Ahora bien, si lo fuera, los lados deberían satisfacer el teorema de Pitágoras, es decir,

$$\left(\sqrt{8}\right)^2 + \left(\sqrt{5}\right)^2 = \left(\sqrt{17}\right)^2. \quad \text{¡Esto es incorrecto!}$$

Como esta igualdad no se cumple, el triángulo no es rectángulo.

Nótese de nuevo la interconexión entre técnicas gráficas y algebraicas. Un buen manejo de gráficas y ecuaciones hace el estudio del Cálculo más provechoso y agradable.

## EJERCICIOS 0.1

1. Para comprender la definición 1.1 hay que tener claro que $|x| = -x$ si $x < 0$. Con $x = -3$ como ejemplo, explicar por qué multiplicar un $x$ negativo por $-1$ produce el mismo efecto que tomar el valor absoluto de $x$.

2. Al escribir desigualdades, se suele escribir $-4 < x < 4$ para abreviar en lugar de «$-4 < x$ y $x < 4$». Desgraciadamente, muchos escriben $4 < x < -4$ en lugar de «$4 < x$ o $x < -4$». Explicar por qué esto es incorrecto. (Ayuda: ¿Qué implica la doble desigualdad sobre los números de la izquierda y de la derecha? Allí es preciso escribir «$4 < x$ o $x < -4$»).

3. Explique, a su manera, el resultado del teorema 1.1, suponiendo positivas todas las constantes.

4. Colocamos tres estacas en un campo con el propósito de acotar un terreno en forma de triángulo rectángulo. ¿Cómo podemos saber, utilizando el teorema de Pitágoras, si en verdad forman un triángulo rectángulo?

**En los ejercicios 5-32, resolver la desigualdad.**

5. $3x + 2 < 11$
6. $4x + 1 < -5$
7. $2x - 3 < -7$
8. $3x - 1 < 9$
9. $4 - 3x < 6$
10. $5 - 2x < 9$
11. $4 \le x + 1 < 7$
12. $-1 < 2 - x < 3$
13. $-2 < 2 - 2x < 3$
14. $0 < 3 - x < 1$
15. $x^2 + 3x - 4 > 0$
16. $x^2 + 4x + 3 < 0$
17. $x^2 - x - 6 < 0$
18. $x^2 + 1 > 0$
19. $3x^2 + 4 > 0$
20. $x^2 + 3x + 10 > 0$
21. $|x - 3| < 4$
22. $|2x + 1| < 1$
23. $|3 - x| < 1$
24. $|3 + x| > 1$
25. $|2x + 1| > 2$
26. $|3x - 1| < 4$
27. $\dfrac{x+2}{x-2} > 0$
28. $\dfrac{x-4}{x+1} < 1$
29. $\dfrac{x^2 - x - 2}{(x+4)^2} > 0$
30. $\dfrac{3 - 2x}{(x+1)^2} < 0$
31. $\dfrac{-8x}{(x+1)^3} < 0$
32. $\dfrac{x-2}{(x+2)^3} > 0$

**En los ejercicios 33-38, hallar la distancia entre los puntos.**

33. (2, 1), (4, 4)
34. (2, 1) (–1, 4)
35. (–1, –2), (3, –2)
36. (1, 2), (3, 6)
37. (0, 2), (–2, 6)
38. (4, 1), (2, 1)

**En los ejercicios 39-42, determinar si los puntos forman un triángulo rectángulo.**

39. (1, 1), (3, 4), (0, 6)
40. (0, 2), (4, 8), (–2, 12)
41. (–2, 3), (2, 9), (–4, 13)
42. (–2, 3), (0, 6), (–3, 8)

**En los ejercicios 43-46, los datos corresponden a poblaciones en varios instantes. Representar los puntos, discutir si siguen alguna pauta clara y predecir la población en el próximo paso.**

43. (0, 1250), (1, 1800), (2, 2450), (3, 3200)
44. (0, 3160), (1, 3250), (2, 3360), (3, 3490)
45. (0, 4000), (1, 3990), (2, 3960), (3, 3910)
46. (0, 2100), (1, 2200), (2, 2100), (3, 1700)
47. Las calculadoras manejan un número finito de cifras. Explicar por qué sus cálculos sólo producen números racionales.
48. En el ejemplo 1.8 hemos dicho que la tendencia de los datos a «curvarse hacia arriba» significa incrementos mayores en valores sucesivos de $y$. ¿Por qué?
49. Los griegos antiguos analizaron la música matemáticamente. Hallaron que tubos y cuerdas de longitudes $L$ y $\frac{L}{2}$ dan tonos cuya mezcla es agradable. Se dice que esos tonos están separados una **octava**. En general, los tonos armoniosos se producen en tubos o cuerdas con razón racional entre sus longitudes. Así, tubos de longitudes $L$ y $\frac{2}{3}L$ forman una **quinta**. En un teclado de piano, 12 quintas son igual a 7 octavas. Un fallo en la afinación del piano, conocido como ***comma* de Pitágoras**, proviene del hecho de que 12 quintas con razón de longitud total $\left(\frac{2}{3}\right)^{12}$ no es igual a 7 octavas con razón $\left(\frac{1}{2}\right)^{7}$. Probar que la diferencia es aproximadamente del 1,3%.
50. Para que las 12 teclas de una octava tengan exactamente las mismas razones de longitud (véase ejercicio 49), la razón entre dos longitudes consecutivas debería ser un número $x$ tal que $x^{12} = 2$ (¿por qué?), o sea, $x = \sqrt[12]{2}$, que es irracional. Explicar por qué sería difícil obtener una cuerda de la longitud adecuada.
51. Puede ser difícil demostrar que un número es irracional. Cuenta la leyenda que la irracionalidad de $\sqrt{2}$ impactó tanto a los pitagóricos que decidieron no hacerla pública. La demostración se hace por **contradicción**: imaginamos que $\sqrt{2}$ es racional y entonces probamos que eso no es posible. Si $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ para ciertos enteros $p$ y $q$ (suponemos la fracción simplificada, sin factores comunes entre $p$ y $q$), elevando al cuadrado se obtendría $2 = \frac{p^2}{q^2}$. Explicar por qué eso implica que $p$ es par. Sustituyendo $p = 2r$ se obtiene $2 = \frac{4r^2}{q^2}$, es decir, $q^2 = 2r^2$. Razonar que esto sólo es posible si $q$ es par. Puesto que $p$ y $q$ no pueden ser pares ambos (¿por qué?), concluimos que $\sqrt{2}$ es irracional.
52. Vamos a probar lo afirmado en el texto: la escritura decimal de un número racional termina o es periódica. Para empezar con un ejemplo concreto, compruebe a mano que $\frac{1}{7} = 0{,}142857142857$. Nótese que en cuanto volvemos a encontrar un resto 1 hemos acabado, pues estamos igual que al inicio, así que la situación se repite. Para un $\frac{p}{q}$ genérico hay sólo $q$ posibles restos (0, 1, 2, ..., $q - 1$), así que en algún momento se repetirá un resto. Argumente por qué la expresión decimal termina o es periódica.
53. Los números irracionales pueden parecer excepcionales frente a los racionales que usamos habitualmente. Nada más lejos de la verdad. Imagine que toma un número real al azar. Lo crea o no, ¡es casi seguro que será irracional! En efecto, suponga que toma al azar un número entre 0 y 1 escribiendo su expresión decimal dígito a dígito. (Si empieza por un 4, siga con un 6, etc., estará tomando 0,46...). Si continúa eligiendo los dígitos al azar, ¿cuál es la probabilidad de repetir infinitas veces un grupo de dígitos? Si no ocurre tal repetición, el número será irracional.

| Año | Población EE.UU. |
|---|---|
| 1960 | 179.323.175 |
| 1970 | 203.302.031 |
| 1980 | 226.542.203 |
| 1990 | 248.709.873 |

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 0 | 179 |
| 10 | 203 |
| 20 | 227 |
| 30 | 249 |

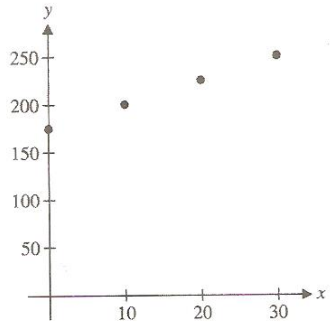



**Figura 0.14**
Datos de población.

# 0.2 RECTAS Y FUNCIONES

## Ecuaciones de rectas

El Gobierno de Estados Unidos elabora un censo de población cada diez años, un dato esencial en la planificación política, en especial en el área de la Seguridad Social. La tabla muestra los datos de las últimas décadas.

Para evitar el manejo de datos tan grandes, se transforman. Denotando por $x$ los años transcurridos desde 1960 y simplificando los datos por redondeo, la población en 1960 ($x = 0$) era $y = 179$ (millones), en 1970 ($x = 10$) era $y = 203$ (millones), etc. También se pueden simplificar los datos por truncación (guardando sólo algunos dígitos). Por truncación, las poblaciones en 1980 y 1990 serían 226 y 248, mientras que por redondeo son 227 y 249.

Los datos simplificados pueden verse en la tabla adjunta y sus puntos marcados en la figura 0.14. Parece que los puntos están en una recta (comprobarlo con una regla). Para ver si son, en efecto, **colineales**, podemos usar la fórmula de la distancia para averiguar si la distancia entre los puntos extremos es la suma de las distancias entre pares consecutivos. Como tantas veces, la figura sugiere algo, pero es necesario un análisis adicional para llegar a la conclusión precisa.

Como alternativa, podemos considerar el incremento de población en cada década. Entre 1960 y 1970 fue de 24 millones (para pasar del primer punto al segundo incrementamos $x$ en 10 e $y$ en 24). Entre 1980 y 1990, el crecimiento fue sólo de 22 millones (del segundo punto al tercero $x$ crece 10 e $y$ crece 22). Como el crecimiento no es constante, los puntos no están en una recta. De haber estado en una recta, $y$ habría crecido 22 de nuevo (¿por qué?). Este argumento está relacionado con la noción de pendiente.

---

**Definición 2.1**
Si $x_1 \neq x_2$, la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(x_1, y_1)$ y $(x_2, y_2)$ es el número

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{2.1}$$

Cuando $x_1 = x_2$, la recta que pasa por $(x_1, y_1)$ y $(x_2, y_2)$ es **vertical** y su pendiente **no está definida**.

---

Se suele decir que la pendiente es «el cambio en $y$ dividido entre el cambio en $x$», escrito $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, o también $\dfrac{\text{ascenso}}{\text{avance}}$ (véase figura 0.15a).

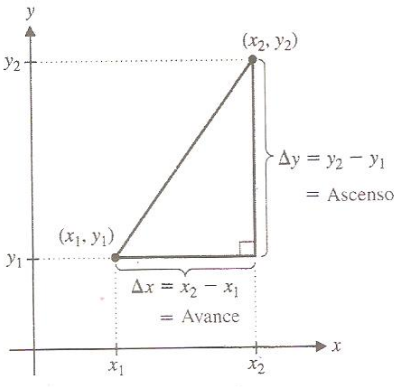



**Figura 0.15a**
Pendiente.

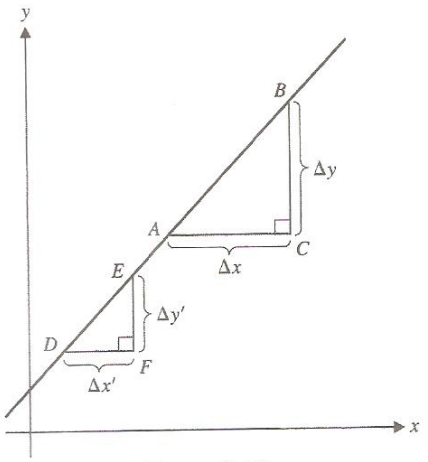



**Figura 0.15b**
Triángulos semejantes y pendiente.

La pendiente de una recta da el mismo valor sea cual sea el par de puntos elegido para calcularla. En la figura 0.15b (donde la recta tiene pendiente positiva) los triángulos rectán-

gulos $\Delta ABC$ y $\Delta DEF$ son semejantes. Y recordemos que en triángulos semejantes, las razones entre sus lados son iguales. Eso significa que

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y'}{\Delta x'},$$

de modo que la pendiente es la misma para todo par de puntos de la recta. (Es más, la recta es la única curva con pendiente constante). Conviene advertir que una recta es horizontal si, y sólo si, su pendiente es cero.

### Ejemplo 2.1 Pendiente de una recta

Calcular la pendiente de la recta que pasa por los puntos (4, 3) y (2, 5).

**Solución** De acuerdo con (2.1), es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-3}{2-4} = \frac{2}{-2} = -1.$$

### Ejemplo 2.2 Aplicación de la pendiente: puntos colineales

Averiguar, usando la noción de pendiente, si los puntos (1, 2), (3, 10) y (4, 14) son colineales.

**Solución** La pendiente de la recta que une (1, 2) con (3, 10) es

$$m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{10-2}{3-1} = \frac{8}{2} = 4.$$

Y la pendiente de la recta que une (3, 10) con (4, 14) es

$$m_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{14-10}{4-3} = 4.$$

De la igualdad de las pendientes se deduce que los puntos son colineales.

Si de una recta conocemos un punto y la pendiente, ya podemos dibujarla. Basta encontrar un segundo punto, como enseña el próximo ejemplo.

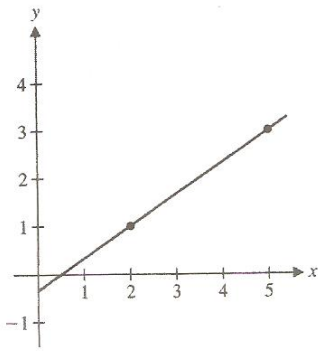



**Figura 0.16a**
Gráfica de una recta.

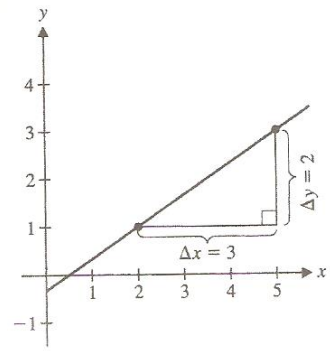



**Figura 0.16b**
Uso de la pendiente para hallar un segundo punto.

### Ejemplo 2.3 Trazado de una recta

Una recta pasa por el punto (2, 1) con pendiente $\frac{2}{3}$. Hallar otro punto de la recta y dibujarla.

**Solución** Como la pendiente viene dada por $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, hacemos $m = \frac{2}{3}$, $y_1 = 1$ y $x_1 = 2$, con lo que obtenemos

$$\frac{2}{3} = \frac{y_2 - 1}{x_2 - 2}.$$

Podemos elegir libremente la coordenada $x$ del segundo punto. Así, para hallar el punto correspondiente a $x_2 = 5$, sustituimos este valor y resolvemos. De

$$\frac{2}{3} = \frac{y_2 - 1}{5-2} = \frac{y_2 - 1}{3},$$

obtenemos $2 = y_2 - 1$, es decir, $y_2 = 3$. Un segundo punto es (5, 3). La figura 0.16a muestra la gráfica de la recta. Un método alternativo para encontrar un segundo punto consiste en usar la pendiente

$$m = \frac{2}{3} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Pendiente $\frac{2}{3}$ significa que si nos movemos 3 unidades hacia la derecha, debemos ascender 2 unidades para seguir en la recta (figura 0.16b).

En el ejemplo 2.3, la elección de $x = 5$ ha sido arbitraria. Cualquier otro valor de $x$ sirve. Además, como $x$ puede ser cualquier número real, podemos dejar $x$ como variable y escribir la ecuación que cumple cualquier punto $(x, y)$ de la recta. En el caso general de una recta que pasa por el punto $(x_0, y_0)$ con pendiente $m$, se sigue de (2.1) que

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0}. \tag{2.2}$$

Multiplicando ambos lados de (2.2) por $(x - x_0)$, obtenemos

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

o sea,

$$\boxed{y = m(x - x_0) + y_0.} \tag{2.3}$$

Se dice que (2.3) es la **forma punto-pendiente** de la ecuación de la recta. Con esos dos datos se halla una ecuación para cualquier recta no vertical.

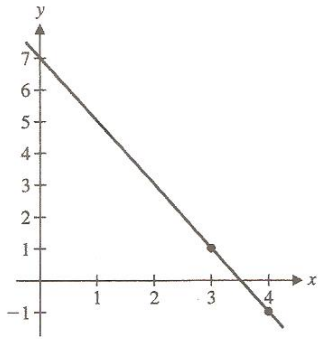



**Figura 0.17**
$y = -2(x - 3) + 1$.

### Ejemplo 2.4 Ecuación de una recta conocidos un punto y la pendiente

Hallar una ecuación para la recta que pasa por (3, 1) con pendiente –2. Dibujar la recta.

**Solución** Haciendo en (2.3) $m = -2$, $x_0 = 3$, $y_0 = 1$, obtenemos la ecuación de la recta:

$$y = -2(x - 3) + 1. \tag{2.4}$$

Para dibujarla, marcamos el punto (3, 1) y un segundo punto obtenido tomando cualquier valor de $x$. Con $x = 4$, resulta $y = -2(4 - 3) + 1 = -1$. Por tanto, un segundo punto es (4, –1) y ya es fácil trazar la recta (figura 0.17).

En el ejemplo 2.4 siente uno la tentación de simplificar la expresión (2.4), pero suele ser preferible manejarla tal como está. En ocasiones, es más conveniente la **forma pendiente-intersección**,

$$y = mx + b,$$

donde $m$ es la pendiente y $b$ la $y$-intersección de la recta. En el ejemplo 2.4, operando en (2.4) se llega a $y = -2x + 6 + 1$, o sea,

$$y = -2x + 7$$

En la figura 0.17 vemos que la recta corta al eje $y$ en $y = 7$.

### Ejemplo 2.5 Ecuación de una recta conocidos dos de sus puntos

Hallar una ecuación para la recta que pasa por los puntos (2, 6) y (–2, 4).

**Solución** Para (2.1), la pendiente es

$$m = \frac{4 - 6}{-2 - 2} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

Ahora podemos usar cualquiera de los puntos en (2.3) para encontrar la ecuación de la recta. Usando el punto (2, 6), obtenemos

$$y = \frac{1}{2}(x - 2) + 6$$

Insistimos en que no hay necesidad de reescribirla efectuando las operaciones.

El próximo teorema presenta un resultado familiar sobre rectas paralelas y perpendiculares.

**Teorema 2.1**

Dos rectas (no verticales) son **paralelas** si tienen la misma pendiente. Además, dos rectas verticales cualesquiera son paralelas.

Dos rectas (no verticales), de pendientes $m_1$ y $m_2$, son **perpendiculares** si el producto de sus pendientes es $-1$ (esto es, $m_1 \cdot m_2 = -1$). Además, toda recta horizontal y toda recta vertical son perpendiculares.

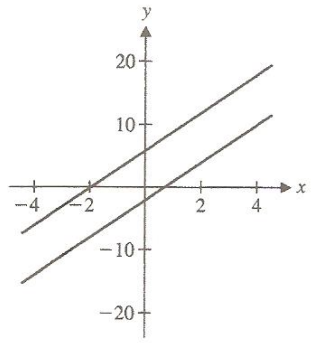



**Figura 0.18**
Rectas paralelas.

Puesto que la pendiente de una recta se ve directamente en su ecuación, saber si dos rectas son paralelas o perpendiculares es muy fácil, como ilustran los ejemplos siguientes.

**Ejemplo 2.6** **Ecuación de una recta paralela**

Hallar una ecuación de la recta paralela a $y = 3x - 2$ que pasa por el punto $(-1, 3)$.

**Solución** En la ecuación de la recta vemos que su pendiente es $m = 3$. Así, pues, la ecuación de la recta pedida es

$$y = 3[x - (-1)] + 3$$

o simplemente $y = 3(x + 1) + 3$. La figura 0.18 muestra ambas rectas.

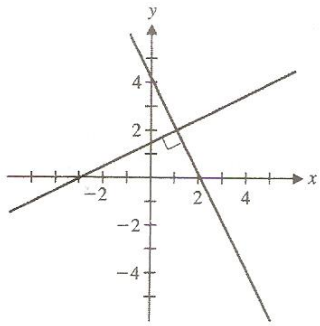



**Figura 0.19**
Rectas perpendiculares.

**Ejemplo 2.7** **Ecuación de una recta perpendicular**

Hallar una ecuación de la recta perpendicular a $y = -2x + 4$ que corta a ésta en el punto $(1, 2)$.

**Solución** La pendiente de $y = -2x + 4$ es $-2$. Por tanto, la pendiente de toda recta perpendicular es $-1/(-2) = \frac{1}{2}$. Como la recta buscada pasa por el punto $(1, 2)$, su ecuación es

$$y = \frac{1}{2}(x - 1) + 2.$$

La figura 0.19 muestra las dos rectas.

Volvemos ahora al inicio de la sección para estimar la población de Estados Unidos en el año 2010 mediante la ecuación de una recta.

**Ejemplo 2.8** **Estimación de la población mediante una recta**

A la vista de los datos de población de los censos de 1960, 1970, 1980 y 1990, estimar la población en Estados Unidos para el año 2010.

**Solución** Vimos, al comienzo de la sección, que los puntos de la tabla no eran exactamente colineales, pero casi, así que ¿por qué no usar la recta que une los dos últimos puntos (20, 227) y (30, 249) (los datos de 1980 y 1990) para estimar la población del año 2010? (Es un ejemplo sencillo de un procedimiento general llamado **extrapolación**). La pendiente de la recta que pasa por esos dos puntos es

$$m = \frac{249 - 227}{30 - 20} = \frac{22}{10} = \frac{11}{5}.$$

La ecuación de la recta es, en consecuencia,

$$y = \frac{11}{5}(x - 30) + 249.$$

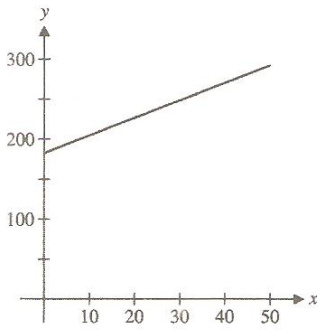



**Figura 0.20**
Población.

Si prolongamos la recta (figura 0.20) hasta $x = 50$ (el año 2010), obtenemos la estimación

$$\frac{11}{5}(50 - 30) + 249 = 293.$$

Por tanto, la población estimada es de 293 millones de habitantes.

Hasta ahora hemos analizado relaciones entre gráficas y ecuaciones de rectas. Este proceso puede extenderse a otras curvas. De hecho, la mayor parte de este capítulo de introducción se dedica a explorar ese tipo de conexiones. Antes de nada, necesitamos varias definiciones básicas.

## Funciones

Sean $A$ y $B$ dos subconjuntos de la recta real.

**Definición 2.2**

Una **función** $f$ es una regla que asigna exactamente un elemento $y$ de $B$ a cada elemento $x$ de $A$. En tal caso, escribimos $y = f(x)$.

El conjunto $A$ se denomina **dominio** de $f$.

El conjunto de todos los valores $f(x)$ en $B$, esto es, $\{f(x) | x \in A\}$, se llama **recorrido** (o imagen) de $f$.

Salvo que se especifique explícitamente otra cosa, consideraremos como dominio de una función el mayor conjunto de números reales para los cuales la función tenga sentido.

Diremos que $x$ es la **variable independiente** e $y$ la **variable dependiente**.

**Nota 2.1**

Con frecuencia, las funciones se definen mediante una fórmula, tal como $f(x) = 3x + 2$, pero en general cualquier correspondencia que asigne exactamente un $y$ a cada $x$ define una función.

Por **gráfica** de la función $f$ entendemos la gráfica de la ecuación $y = f(x)$. Consta de todos los puntos $(x, y)$, con $x$ en el dominio de $f$ e $y$ en su recorrido, tales que $y = f(x)$.

No toda curva es gráfica de una función, ya que en las gráficas de funciones hay un único valor de $y$ correspondiente a un valor de $x$. En consecuencia, podemos determinar gráficamente si una curva es gráfica de una función usando el **criterio de la recta vertical**: si alguna recta vertical corta a la curva en más de un punto, la curva no es gráfica de una función.

**Ejemplo 2.9** **Aplicación del criterio de la recta vertical**

Determinar si las curvas de la figura 0.21 son gráficas de funciones.

**Solución** La circunferencia de la figura 0.21a no es gráfica de función porque una recta vertical en $x = 0{,}5$ la corta dos veces (figura 0.22a). La curva de la figura 0.21b sí lo es a pesar de subir y bajar varias veces. Aunque hay rectas horizontales que la cortan en varios puntos, las rectas verticales, como la trazada en $x = 1{,}2$, la cortan sólo una vez (figura 0.22b).

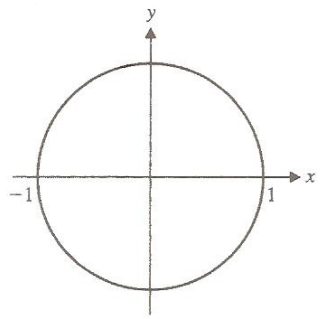



**Figura 0.21a**

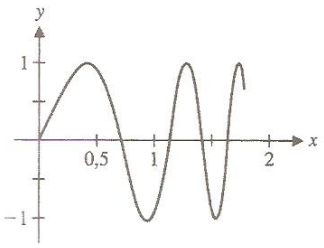



**Figura 0.21b**

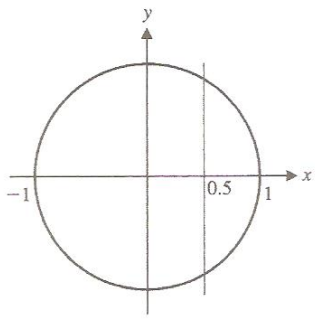



**Figura 0.22a**
La curva no pasa el criterio de la recta vertical.

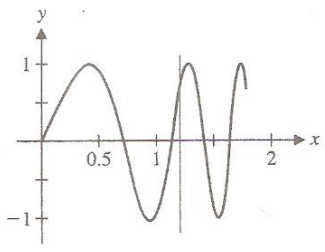



**Figura 0.22b**
La curva pasa el criterio de la recta vertical.

Algunas funciones ya son conocidas a este nivel y hablaremos de ellas brevemente en las secciones 0.5 y 0.6. Las funciones con las que estamos más familiarizados son las polinómicas, las más sencillas de manejar por estar definidas en términos estrictamente aritméticos.

**Definición 2.3**
Un **polinomio** es cualquier función expresable en la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

donde $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números reales (los **coeficientes** del polinomio) con $a_n \neq 0$ y donde $n \geq 0$ es un entero (el **grado** del polinomio).

El dominio de cualquier polinomio es toda la recta real. La gráfica de todo polinomio lineal (grado 1) $f(x) = ax + b$ es una recta.

**Ejemplo 2.10** **Polinomios**

He aquí varios ejemplos de polinomios:

$f(x) = 2$ (polinomio de grado 0 o **constante**)
$f(x) = 3x + 2$ (polinomio de grado 1 o **lineal**)
$f(x) = 5x^2 - 2x + 1$ (polinomio de grado 2 o **cuadrático**)
$f(x) = x^3 - 2x + 1$ (polinomio de grado 3 o **cúbico**)
$f(x) = -6x^4 + 12x^2 - 3x + 13$ (polinomio de grado 4 o **cuártico**)

y

$f(x) = 2x^5 + 6x^4 - 8x^2 + x - 3$ (polinomio de grado 5 o **quíntico**).

Las figuras 0.23a-0.23f muestran las gráficas de estos seis polinomios.

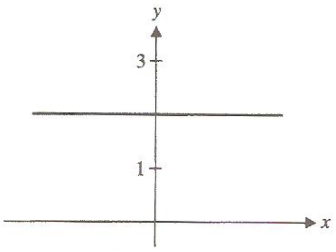



**Figura 0.23a**
$f(x) = 2$.

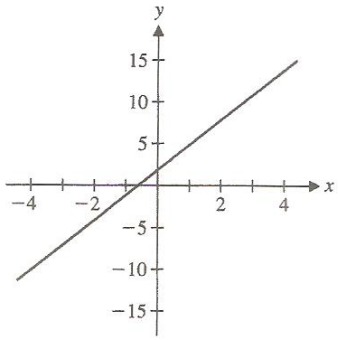



**Figura 0.23b**
$f(x) = 3x + 2$.

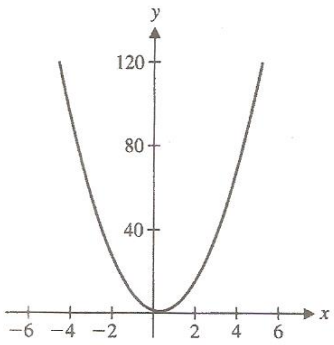



**Figura 0.23c**
$f(x) = 5x^2 - 2x + 1$.

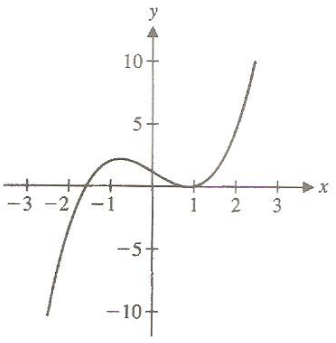



**Figura 0.23d**
$f(x) = x^3 - 2x + 1$.

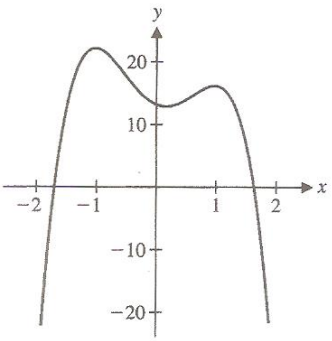



**Figura 0.23e**
$f(x) = -6x^4 + 12x^2 - 3x + 13$.

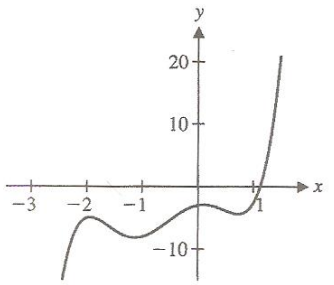



**Figura 0.23f**
$f(x) = 2x^5 + 6x^4 - 8x^2 + x - 3$.

**Definición 2.4**
Cualquier función expresable como cociente

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

de dos polinomios $p$ y $q$ se dice que es una función **racional**.

Al ser $p$ y $q$ polinomios, están definidos para todo $x$. En consecuencia, la función racional $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ está definida para todos los $x$ tales que $q(x) \neq 0$.

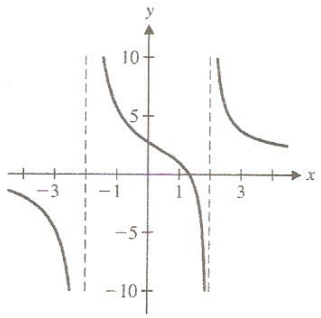



**Figura 0.24**
$f(x) = \dfrac{x^2 + 7x - 11}{x^2 - 4}$.

**Ejemplo 2.11** **Una función racional**

Hallar el dominio de la función racional

$$f(x) = \frac{x^2 + 7x - 11}{x^2 - 4}.$$

**Solución** La función, cuya gráfica muestra la figura 0.24, tiene como dominio los valores $x$ que no anulan el denominador. Puesto que

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$$

el denominador es cero si, y sólo si, $x = \pm 2$. Por tanto, el dominio de $f$ es

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pm 2\} = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \infty).$$

La función **raíz cuadrada** se define como de costumbre. Por $y = \sqrt{x}$ entendemos el número $y \geq 0$ tal que $y^2 = x$. En particular, $\sqrt{4} = 2$. ¡Cuidado! No caiga en el error de escribir igualdades incorrectas tales como $\sqrt{4} = \pm 2$, algo muy frecuente. Aunque $2^2 = 4$ y $(-2)^2 = 4$ también, el símbolo $\sqrt{4}$ denota la raíz cuadrada positiva de 4. Es decir, $\sqrt{x}$ es una función con dominio y recorrido $[0, \infty)$. En particular, conviene recordar que

$$\sqrt{x^2} = |x|.$$

Puesto que $\sqrt{x^2}$ es el número *no negativo* cuyo cuadrado es $x^2$, se trata de $|x|$ y no de $x$. Podemos decir que

$$\sqrt{x^2} = x, \textbf{ sólo si } x \geq 0.$$

**Advertencia**

Si permitiéramos que $\sqrt{x}$ tomase valores positivos y negativos, no sería una función.

**Ejemplo 2.12** **Dominio de funciones raíz cuadrada o cúbica**

Hallar los dominios de $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ y $g(x) = \sqrt[3]{x^2 - 4}$.

**Solución** (a) Como las raíces pares sólo están definidas para números no negativos, $f(x)$ está definida sólo cuando $x^2 - 4 \geq 0$, esto es, cuando $x^2 \geq 4$, lo cual ocurre si $x \geq 2$ o $x \leq -2$. Así, pues, el dominio de $f$ es $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$.

(b) Las raíces impares están definidas siempre, de manera que el dominio de $g(x)$ es toda la recta real, $(-\infty, \infty)$.

Saber interpretar la gráfica de una función es importante incluso cuando no hay fórmula conocida para la función.

**Ejemplo 2.13** **Interpretación de una gráfica**

La gráfica de la figura 0.25 muestra el espesor de nieve en una estación de esquí en la primera quincena de enero. La estación dispone de cañones de nieve artificial con el fin de mantener un espesor de al menos 55 cm. ¿Qué días fue necesario ponerlos en funcionamiento?

**Solución** No hay respuesta «única» a este tipo de cuestiones, pero la respuesta ha de ser plausible y consistente con los datos. En este caso, cabe suponer que los cañones sólo se usan para mantener el espesor en 55 cm. Bajo tal hipótesis, nevó los días 4, 7, 11 y 14. Tras la fuerte nevada del día 7, el espesor descendió unos 6 cm en un día. No fue necesaria la nieve artificial los días 8 y 9.

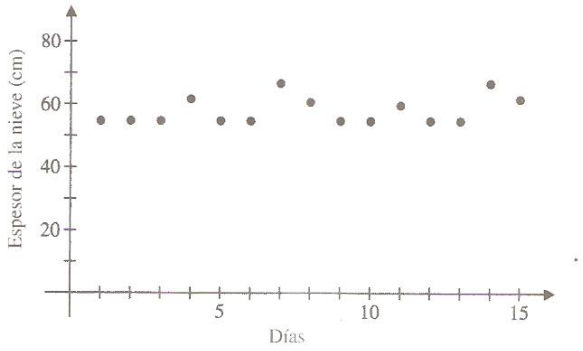



**Figura 0.25**
Espesor de la nieve.

Siguiendo con el argumento, los días 5 y 15 no fue necesaria tampoco. Los días 1, 2, 3, 6, 10 y 13 sí fue necesario el funcionamiento de los cañones a pleno rendimiento, y el día 12, sólo parcialmente.

---

Puede discutirse si el ejemplo 2.13 entra dentro de las matemáticas, ya que los cursos de matemáticas suelen centrarse en ecuaciones y cálculos. El uso de hipótesis y deducción forma parte, sin duda, de las matemáticas. La transición entre una gráfica y un problema de la vida real es un ejemplo de **modelo matemático**. Las matemáticas pueden parecer a veces aisladas, alejadas de la vida cotidiana, pero cada vez más (incluido el Cálculo) desempeñan un papel básico en nuestra sociedad tecnológica.

---

## EJERCICIOS 0.2

1. Dados tres puntos $A$, $B$ y $C$, explicar por qué son necesariamente colineales si la distancia de $A$ a $B$ más la de $B$ a $C$ es igual a la distancia de $A$ a $C$.

2. Si la pendiente entre los puntos $A$ y $B$ es igual que la pendiente entre $B$ y $C$, razonar por qué esos tres puntos han de ser colineales.

3. Explicar el criterio de la recta vertical en términos de la definición de función.

4. Comparar las dos formas de la ecuación de una misma recta: $y = 2{,}4(x - 1{,}8) + 0{,}4$ e $y = 2{,}4x - 3{,}92$. Con $x = 1{,}8$, ¿cuál usaría para calcular $y$? ¿Y con $x = 0$? Para $x = 8$, ¿presenta alguna ventaja una de ellas sobre la otra? ¿Puede ver rápidamente la pendiente en las dos? Explicar por qué ninguna forma de la ecuación es «mejor» que la otra.

**En los ejercicios 5-12, averiguar si los puntos son colineales.**

5. (1, 2), (3, 6), (0, 0)
6. (1, 1), (3, 5), (0, –1)
7. (2, 1), (0, 2) (4, 0)
8. (3, 2), (4, 0), (1, 6)
9. (3, 1), (4, 4), (5, 8)
10. (1, 2), (2, 5), (4, 8)
11. (4, 1), (3, 2), (1, 3)
12. (3, 2), (0, 1), (6, 3)

**En los ejercicios 13-20, hallar la pendiente de la recta que pasa por los dos puntos dados.**

13. (1, 2), (3, 6)
14. (0, 1), (2, 7)
15. (1,2), (3, 3)
16. (0, 1), (3, 8)
17. (3, –6), (1, –1)
18. (1, –2), (–1, –3)
19. (0,3, –1,4), (–1,1, –0,4)
20. (1,2, 2,1), (3,1, 2,4)

**En los ejercicios 21-30, hallar un segundo punto de la recta con pendiente $m$ y punto $P$, dibujar la recta y encontrar una ecuación para ella.**

21. $m = 2$, $P = (1, 3)$
22. $m = 2$, $P = (3, 1)$
23. $m = -2$, $P = (1, 4)$
24. $m = -1$, $P = (2, 1)$
25. $m = 0$, $P = (-1, 1)$
26. $m = 0$, $P = (2, -1)$

27. $m = \frac{1}{2}$, $P = (2, 1)$

28. $m = -\frac{1}{4}$, $P = (-2, 1)$

29. $m = 1{,}2$, $P = (2{,}3, 1{,}1)$

30. $m = 0{,}8$, $P = (1{,}2, 0{,}4)$

**En los ejercicios 31-40, determinar si las rectas son paralelas, perpendiculares o ninguna de ambas cosas.**

31. $y = 3(x - 1) + 2$ e $y = 3(x + 4) - 1$

32. $y = 2(x - 3) + 1$ e $y = 4(x - 3) + 1$

33. $y = -2(x + 1) - 1$ e $y = \frac{1}{2}(x - 2) + 3$

34. $y = 3(x - 1) + 1$ e $y = -\frac{1}{3}(x + 2) - 2$

35. $y = 2x - 1$ e $y = -2x + 2$

36. $y = 4x + 3$ e $y = 4x - 5$

37. $y = 4x - 2$ e $y = \frac{1}{4}x + 1$

38. $y = 3x + 1$ e $y = -\frac{1}{3}x + 2$

39. $x + 2y = 1$ y $2x + 4y = 3$

40. $x + 2y = 1$ y $2x - y = 3$

**En los ejercicios 41-46, hallar una ecuación de la recta que pasa por el punto indicado y es (a) paralela o (b) perpendicular a la recta dada.**

41. $y = 2(x + 1) - 2$ en $(2, 1)$

42. $y = 3(x - 2) + 1$ en $(0, 3)$

43. $y = 1$ en $(0, -1)$

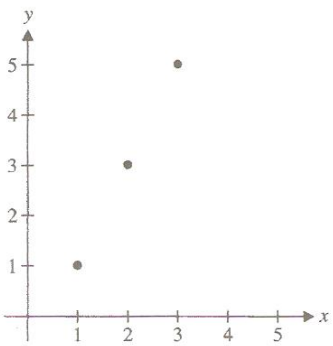
44. $x = 2$ en $(0, 1)$

45. $y = 2x + 1$ en $(3, 1)$

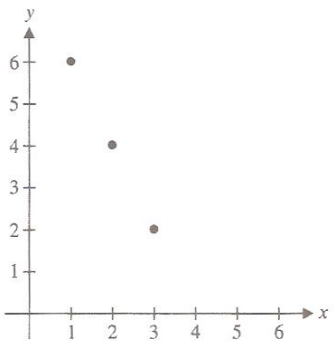
46. $y = -x + 2$ en $(1, 2)$

**En los ejercicios 47-52, hallar una ecuación de la recta que pasa por los puntos que se especifican. Calcular la coordenada $y$ del punto de la recta correspondiente a $x = 4$.**

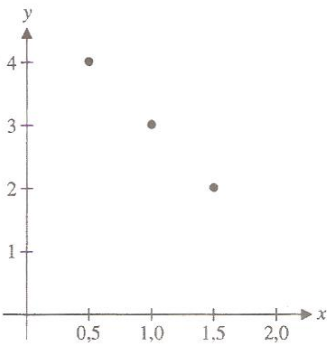
47.



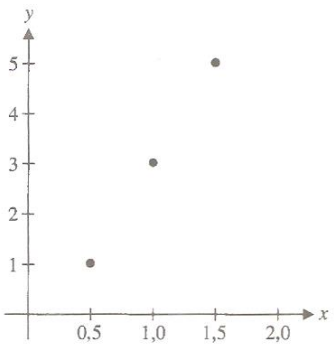

48.



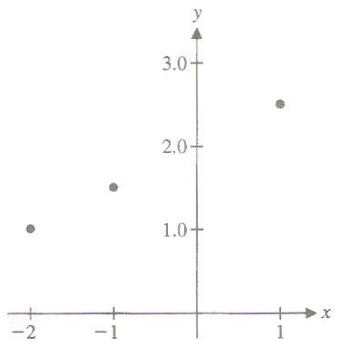

49.



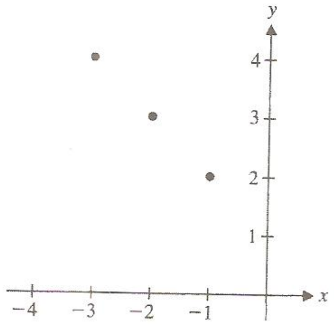

50.




51.

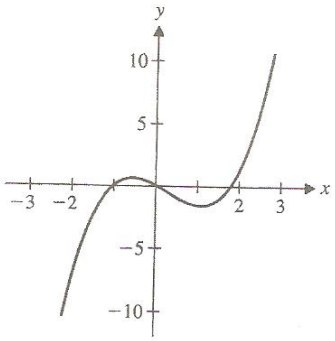


52.

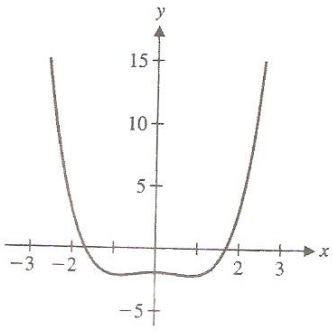



**En los ejercicios 53-58, usar el criterio de la recta vertical para averiguar si la curva es o no una gráfica de función.**

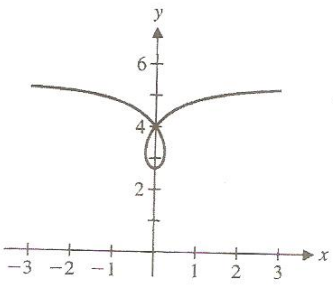
53.



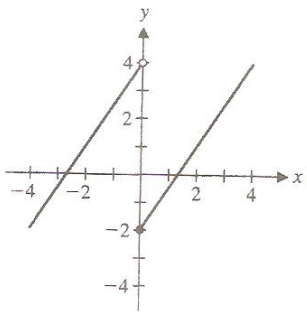

54.



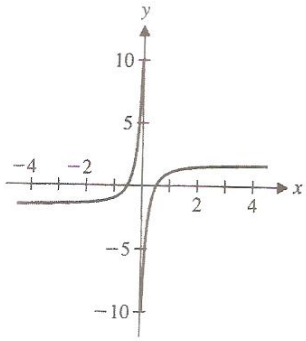

55.



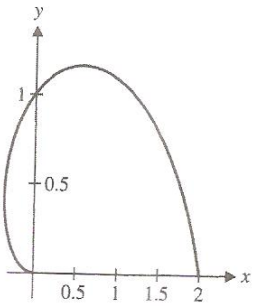

56.




57.




58.




**En los ejercicios 59-66, identificar la función como polinómica, racional, ambas cosas o ninguna de ellas.**

59. $f(x) = x^3 - 4x + 1$

60. $f(x) = -2x^4 - 3x^2 + 1$

61. $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x + 1}$

62. $f(x) = \dfrac{x^3 + 4x - 1}{x^4 - 1}$

63. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

64. $f(x) = x^3 - 3\sqrt{x} + 1$

65. $f(x) = 3 - 2x + x^4$

66. $f(x) = 2x - x^{2/3} - 6$

**En los ejercicios 67-74, determinar el dominio de la función.**

67. $f(x) = \sqrt{x + 2}$

68. $f(x) = \sqrt{2x + 1}$

69. $f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$

70. $f(x) = \sqrt[3]{4x - 3}$

71. $f(x) = \dfrac{4}{x^2 - 1}$

72. $f(x) = \dfrac{4x}{x^2 + 2x - 6}$

73. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

74. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

**En los ejercicios 75-78, hallar los valores indicados de la función.**

75. $f(x) = x^2 - x - 1$; $f(0), f(2), f(-3), f(1/2)$

76. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$; $f(0), f(2), f(-2), f(1/2)$

77. $f(x) = \sqrt{x+1}$; $f(0), f(3), f(-1), f(1/2)$

78. $f(x) = \dfrac{3}{x}$; $f(1), f(10), f(100), f(1/3)$

**En los ejercicios 79-82 se describe una situación física. Establecer un dominio adecuado para la variable que se especifica.**

79. Construcción de un aparcamiento; $x$ = anchura del aparcamiento.

80. Construcción de un aparcamiento en un terreno cuadrado de 200 × 200 metros; $x$ = anchura del aparcamiento.

81. Ventas de una nueva caja de bombones; $x$ = cajas vendidas el primer mes.

82. Ventas de una nueva caja de bombones; $x$ = precio de la caja.

**En los ejercicios 83-86, discutir si $y$ es una función de $x$.**

83. $y$ = calificación obtenida en un examen, $x$ = horas de estudio.

84. $y$ = probabilidad de tener cáncer de pulmón, $x$ = número de cigarrillos fumados al día.

85. $y$ = peso de una persona, $x$ = minutos diarios de ejercicio físico.

86. $y$ = velocidad de un objeto que cae, $x$ = peso del objeto.

87. La figura A muestra más datos de la estación de esquí del ejemplo 2.13. ¿Qué días hubo que usar los cañones de nieve artificial?

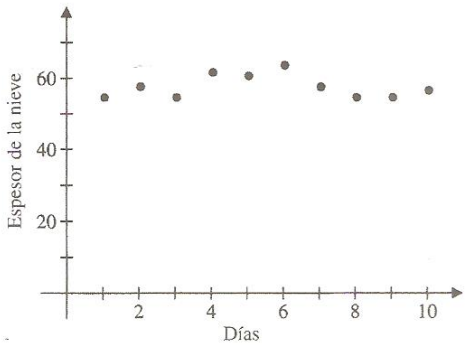



**Figura A**
Espesor de la nieve.

88. La figura B muestra los beneficios diarios de un negocio en función del tiempo. En ese período de tiempo, el negocio recibió dos pedidos importantes y pagó a un proveedor. Identificar cuándo ocurrieron esos hechos. Si se debe otro pago al proveedor, estimar la altura de la gráfica una vez hecho efectivo.

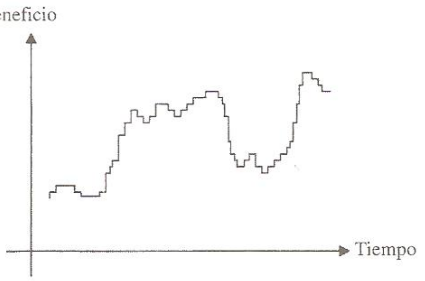



**Figura B**
Ingresos.

89. La figura C muestra la velocidad de un ciclista en función del tiempo. En las zonas planas, ¿qué hace el ciclista? ¿Y cuando la gráfica sube o baja? Identificar las porciones de la gráfica correpondientes a escaladas o descensos.

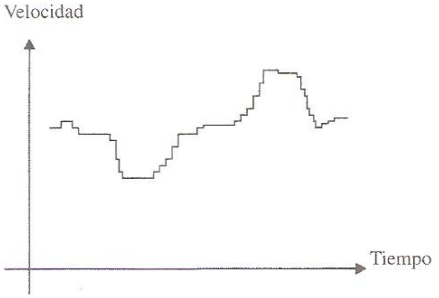



**Figura C**
Velocidad de un ciclista.

90. La figura D muestra la población de un país en función del tiempo en un período en el que experimentó dos entradas masivas de inmigrantes, una guerra y una plaga. Identificar esos acontecimientos en la gráfica.

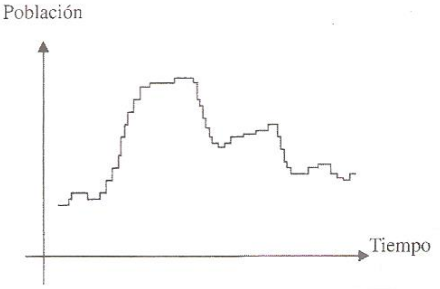



**Figura D**
Población.

**En los ejercicios 91-94, describir brevemente un escenario realista de cómo cambia cada cantidad con el tiempo y esbozar una gráfica que se ajuste a la descripción (marcar los puntos interesantes).**

91. Consumo de electricidad en una ciudad (día y noche).

92. Temperatura de una patata recién colocada en un horno.

93. Su nivel de atención escuchando la radio (incluyendo anuncios, buena música y canciones deplorables).

94. Velocidad en una carretera (incluir atascos y semáforos).

95. El punto de ebullición del agua (en grados Fahrenheit) a altura $h$ (en miles de pies sobre el nivel del mar) viene dado por $B(h) = -1{,}8h + 212$. Hallar en qué altura $h$ el agua hierve a 98,6°. ¿Por qué esta altura sería peligrosa para los humanos?

96. Una **transformación lineal** es cualquier función $f$ tal que $f(a+b) = f(a) + f(b)$ y $f(cx) = cf(x)$. Probar que $f(x) = 3x + 2$ no es una transformación lineal, pero que $f(x) = 3x$ sí lo es. [$f(x) = 3x + 2$ es una **transformación afín**].

97. Una pelota de golf, golpeada con un hierro 9, gira a 9.100 rpm si es de compresión 120 y a 10.000 rpm si es de compresión 60. Supuesto que el ritmo de giro sea función lineal de la compresión, ¿a cuántas rpm gira una de compresión 90?

98. Los golfistas profesionales utilizan pelotas de compresión 100. Con las datos del ejercicio 97, estimar el ritmo de giro de una de ellas.

99. Una máquina puede ampliar una fotografía de 4 × 6 a una de 8 × 12 doblando cada dimensión o reducir ésta a una 8 × 10 quitando 1 cm por cada extremo. Explicar cómo se puede ampliar una de $3\frac{1}{2} \times 5$ a tamaño 8 × 10. Un amigo regresa de Escocia con una foto en la que se ve al monstruo del lago Ness en la franja de 0,25 cm de la derecha. Usando su procedimiento para ampliar a 8 × 10, ¿quedaría cortado Nessie?

100. La capacidad del cuerpo humano para ciertas tareas disminuye con la edad. El libro *Sex and the Origins of Death*, de William Clark, presenta estadísticas de ese tipo. Por ejemplo, la fertilidad femenina cae, como media, de un 100% a los 30 años hasta un 0% a los 50 años. Denotando la edad por $x$ y el porcentaje de fertilidad por $y$, probar que $y = -5(x - 50)$, para $30 \le x \le 50$, supuesto que $y$ es función lineal de $x$. Probar que el 50% de fertilidad se alcanza a los 40 años. En las siguientes situaciones, calcular qué edad corresponde al 50% de capacidad.

(a) La capacidad pulmonar cae del 100% a los 20 años hasta el 40% a los 80.
(b) El ritmo cardíaco máximo cae del 100% a los 20 años hasta el 68% a los 80.
(c) La captación de oxígeno cae del 100% a los 20 años al 30% a los 80.
(d) La velocidad de transmisión neuronal cae del 100% a los 20 años al 80% a los 80.

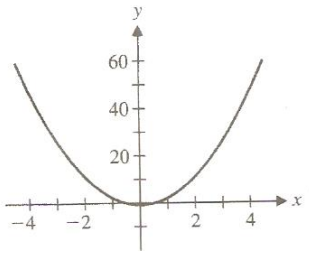



**Figura 0.26a**
$y = 3x^2 - 1$.

### Nota del traductor

A lo largo del libro utilizaremos la palabra *calculadora* para referirnos tanto a calculadoras gráficas como a ordenadores personales. Asimismo, la frecuente aparición del término «programa de cálculo simbólico» hace aconsejable abreviar mediante las siglas PCS de ahora en adelante.

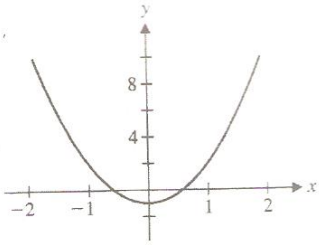



**Figura 0.26b**
$y = 3x^2 - 1$.

## 0.3 CALCULADORAS GRÁFICAS Y PROGRAMAS DE CÁLCULO SIMBÓLICO (PCS)

La relación entre las funciones y sus gráficas es central en el Cálculo. Las calculadoras gráficas y los ordenadores permiten investigar esa relación para una amplia gama de funciones. Al uso de estos instrumentos se dedica esta sección.

Vimos en la sección 0.2 que las gráficas de las funciones lineales son rectas. Tal vez recuerde que las de los polinomios cuadráticos son **parábolas**. Uno de los objetivos de esta sección es adquirir familiaridad con las gráficas de otras funciones. Y la mejor manera es experimentar con un ejemplo tras otro.

### Ejemplo 3.1 Una gráfica en calculadora

Representar en una calculadora la gráfica de $f(x) = 3x^2 - 1$.

**Solución** Debe obtenerse una gráfica inicial como la de la figura 0.26a, una parábola abierta hacia arriba. Las gráficas se usan para localizar puntos relevantes, como intersecciones con los ejes, máximos, etc. Esos puntos se ven mejor haciendo **zoom** en un tramo pequeño de valores de $x$. La figura 0.26b muestra valores de $x$ desde –2 a 2 y valores de $y$ desde –2 a 10.

En ella vemos que la parábola toca fondo en el punto (0, –1), aproximadamente, y corta al eje $x$ en $x = -0{,}5$ y en $x = 0{,}5$. Podemos ser más precisos con un poco de álgebra. Recordemos que una $x$-intersección es un punto donde $y = 0$, esto es, $f(x) = 0$. Resolviendo $3x^2 - 1 = 0$, obtenemos $x^2 = \frac{1}{3}$, es decir, $x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} \approx \pm 0{,}57735$.

Nótese la interrelación entre gráfica y álgebra en el ejemplo 3.1. La gráfica sugiere valores aproximados y el álgebra da los valores exactos. (Cabe añadir que como $\sqrt{\frac{1}{3}} \approx 0{,}577$, nuestra estimación a ojo de 0,5 no era especialmente buena). Además, el zoom permite apre-

ciar mejor detalles particulares de la gráfica. Pero, en general, ¿cómo saber cuál es la mejor ventana? Por ejemplo, las figuras 0.26a y 0.26b indican una parábola, pero ¿cómo saber si hay detalles interesantes que no se captan en ellas? Dicho de forma breve: no estaremos seguros si no recurrimos al Cálculo.

Antes de investigar nuevas gráficas, veamos qué es realmente una gráfica generada en una calculadora. Las calculadoras no dibujan gráficas, aunque las llamamos así, sino que iluminan pequeños elementos de la pantalla, denominados **píxeles**. Si los píxeles son suficientemente pequeños, la imagen parece continua.

Por **ventana gráfica** entendemos el rectángulo determinado por el conjunto de valores de $x$ e $y$ representado. La ventana puede afectar mucho al aspecto de la gráfica. Por ejemplo, si $x$ varía entre $-2$ y 2 y la pantalla de la calculadora admite 400 columnas de píxeles, los puntos representados corresponden a $x = -2$, $x = -1{,}99$, $x = -1{,}98$, ... Si hay algún rasgo característico de la función entre $x = -1{,}99$ y $x = -1{,}98$, no lo veremos salvo que hagamos zoom allí. Análogamente, si $y$ varía entre 0 y 3 y hay 600 filas de píxeles en la pantalla, los píxeles corresponderán a $y = 0$, $y = 0{,}005$, $y = 0{,}01$, ... Ahora bien, si $f(-2) = 0{,}0049$ y $f(-1{,}99) = 0{,}0051$, como antes de representar los puntos, los valores de la función son redondeados al valor de $y$ más próximo, no apreciaremos diferencia alguna entre los valores de $y$ en ese par de puntos. Habrá que hacer un zoom para verla.

### Nota 3.1

Las calculadoras siguen dos esquemas para definir la ventana de una función dada.

- **Ventana gráfica fija**: La mayoría representa la gráfica en un rango preseleccionado de valores de $x$ e $y$, salvo que le especifiquemos otra cosa. (La Texas Instruments adopta el rectángulo $-10 \le x \le 10$ y $-10 \le y \le 10$).
- **Ventana gráfica automática**: La mayoría de los PCS adoptan un rango preseleccionado de valores para $x$ y calculan el rango de $y$ de manera tal que los puntos queden ajustados en la pantalla.

Indague cómo actúa su calculadora y úsela de forma rutinaria en lo que sigue. Tanto si utiliza calculadora gráfica como un PCS en su ordenador, será capaz de reconstruir sin dificultad las gráficas que aparecen en este libro.

La finalidad de las gráficas es poner de manifiesto las características de las funciones. Cuáles son esos rasgos relevantes depende del problema en cuestión, pero con frecuencia interesan las intersecciones con los ejes y los **extremos**. El valor $f(M)$ es un **máximo local** de la función $f$ si $f(M) \ge f(x)$ para todo $x$ «próximo» a $x = M$ [más en detalle, si existen $a$ y $b$ con $a < M < b$, tales que $f(M) \ge f(x)$ para todo $x$ tal que $a < x < b$]. Análogamente, se dice que el valor $f(m)$ es un **mínimo local** de la función $f$ si $f(m) \le f(x)$ para todo $x$ «próximo» a $x = m$. Máximos y mínimos locales se llaman, conjuntamente, **extremos locales** (o relativos) de la función. Siempre que sea posible, queremos gráficas que muestren las intersecciones con los ejes y los extremos.

### Ejemplo 3.2 Gráfica de una función

Hallar una gráfica de $f(x) = x^3 + 4x^2 - 5x - 1$ que muestre las intersecciones con los ejes y los extremos.

**Solución** Dependiendo de la calculadora o PCS utilizado, encontrará una gráfica inicial análoga a alguna de las figuras 0.27a y 0.27b.

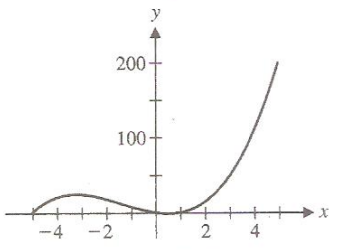



**Figura 0.27a**
$y = x^3 + 4x^2 - 5x - 1$.

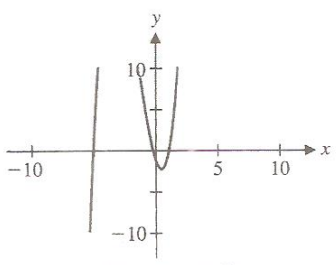



**Figura 0.27b**
$y = x^3 + 4x^2 - 5x - 1$.

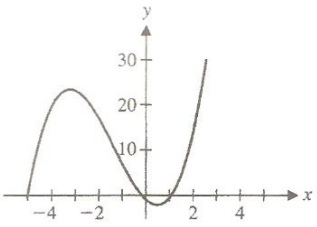



**Figura 0.28**
$y = x^3 + 4x^2 - 5x - 1$

Ninguna de ellas es satisfactoria, aunque ambas indican que, de izquierda a derecha, la gráfica sube hasta un máximo local cerca de $x = -3$, baja hasta un mínimo local cerca de $x = 1$ y vuelve a ascender. Para lograr una gráfica mejor, observemos las dos ventanas. La de la figura 0.27a es $-5 \le x \le 5$ y $-6 \le y \le 203$. La de la figura 0.27b es $-10 \le x \le 10$ y $-10 \le y \le 10$. Da la impresión de que conviene mostrar valores de $y$ mayores que 10, pero no tan grandes como 203, si queremos ver el máximo local. Como todos los detalles significativos parecen ocurrir entre $x = -6$ y $x = 6$, una ventana adecuada es $-6 \le x \le 6$ y $-6 \le y \le 30$, como en la figura 0.28. En ella se aprecian bien las tres intersecciones con el eje $x$, el máximo local y el mínimo local.

La gráfica del ejemplo 3.2 se ha obtenido por prueba y error. Es raro dar con la gráfica perfecta a la primera. Pero, a partir de un primer intento, el **zoom** permitirá ampliar o reducir la ventana para ver los detalles interesantes. Un manejo habitual de la calculadora convierte esta tarea en rutinaria, incluso divertida.

En los ejercicios se piden las gráficas de muchas funciones y discutir las formas de polinomios de grados diversos. Una idea cualitativa previa ayuda a decidir la gráfica correcta. A tal fin, resumimos las gráficas de funciones lineales, cuadráticas y cúbicas.

La gráfica de una función lineal $f(x) = a_1x + a_0$ es una recta de pendiente $a_1$. La figura 0.29a muestra una recta asociada a una función **decreciente** (la recta baja de izquierda a derecha) y la figura 0.29b a una **creciente** (la recta sube de izquierda a derecha).

También es sabido que las gráficas de polinomios cuadráticos de la forma $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ son parábolas, abiertas hacia arriba si $a_2 > 0$ y hacia abajo si $a_2 < 0$ (figuras 0.30a y 0.30b).

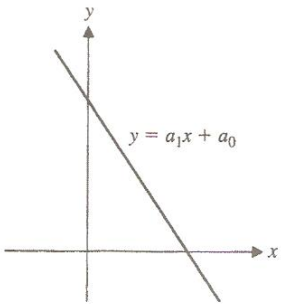



**Figura 0.29a**
Recta, $a_1 < 0$.

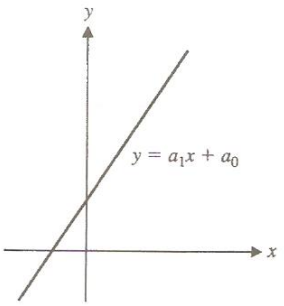



**Figura 0.29b**
Recta, $a_1 > 0$.

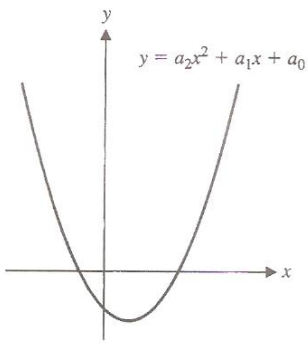



**Figura 0.30a**
Parábola, $a_2 > 0$.

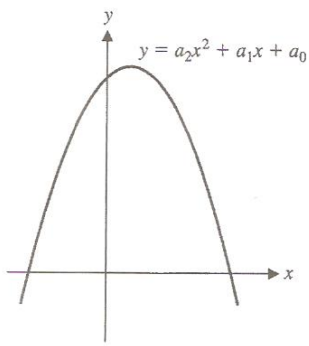



**Figura 0.30b**
Parábola, $a_2 < 0$.

Esas parábolas son crecientes en un intervalo del eje $x$ y decrecientes en otro. Un objetivo importante será, más adelante, averiguar dónde es creciente y dónde decreciente una función dada.

Las gráficas de las funciones cúbicas $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ tienen forma de S. De izquierda a derecha, la función empieza siendo negativa y acaba siendo positiva si $a_3 > 0$ y al contrario si $a_3 < 0$ (figuras 0.31a y 0.31b).

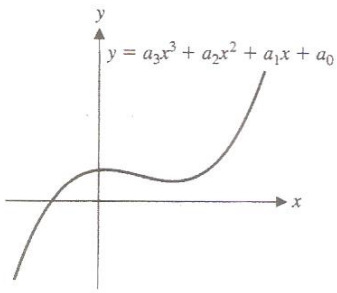



**Figura 0.31a**
Cúbica: un máx, un mín, $a_3 > 0$.

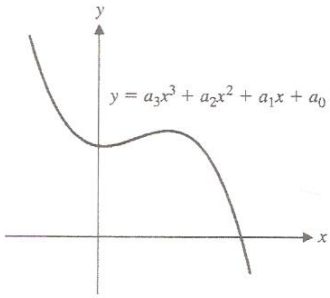



**Figura 0.31b**
Cúbica: un máx, un mín, $a_3 < 0$.

Las cúbicas tienen, por lo general, un máximo y un mínimo, como en las figuras 0.31a y 0.31b. Muchas curvas, incluidas todas las cúbicas, tienen lo que se llama un **punto de inflexión**, donde la curva cambia de estar curvada hacia arriba a estarlo hacia abajo, o viceversa, como en las figuras 0.32a y 0.32b.

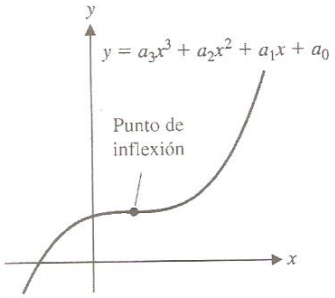



**Figura 0.32a**
Cúbica: ni máx, ni mín, $a_3 > 0$.

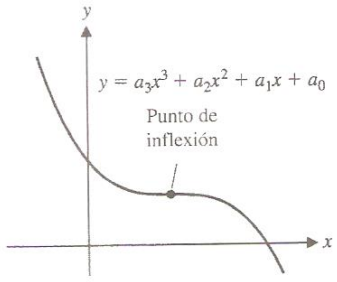



**Figura 0.32b**
Cúbica: ni máx, ni mín, $a_3 < 0$.

Utilizaremos los recursos del Cálculo desarrollados en los próximos capítulos con el propósito de ajustar ventanas gráficas, de manera tal que los rasgos característicos queden a la vista. De momento ya se puede aprovechar la información disponible acerca de algunas funciones simples para resolver ese problema para ellas, como en el ejemplo que sigue.

## Ejemplo 3.3 La gráfica de un polinomio cúbico

Dibujar la gráfica del polinomio cúbico $f(x) = x^3 - 20x^2 - x + 20$.

**Solución** Su gráfica inicial será parecida a una de las figuras 0.33a o 0.33b.

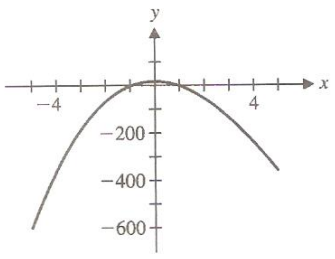



**Figura 0.33a**
$f(x) = x^3 - 20x^2 - x + 20$.

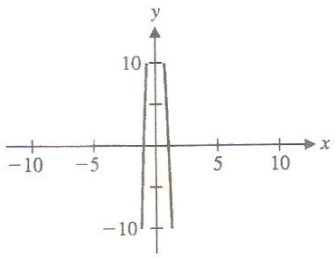



**Figura 0.33b**
$f(x) = x^3 - 20x^2 - x + 20$.

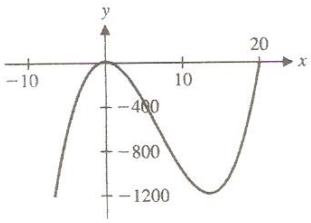



**Figura 0.33c**
$f(x) = x^3 - 20x^2 - x + 20$.

Más que cúbicas, estas dos gráficas parecen parábolas. Para ver la forma de S hay que mirar en una ventana mayor. Pero ¿cuánto mayor? Desgraciadamente, no se puede contestar en general antes de adentrarnos en el Cálculo. Por ahora, hemos de conformarnos con prueba y error, hasta que la gráfica nos recuerde las de las cúbicas. La figura 0.33c ya permite ver el comportamiento **global** de la función. A cambio, hemos perdido detalles del comportamiento **local**, tales como las $x$-intersecciones, más nítidas en las figuras 0.33a y 0.33b.

Las funciones racionales tienen algunas propiedades que no aparecen en polinomios, como vamos a ver en los ejemplos siguientes.

## Ejemplo 3.4 La gráfica de una función racional

Dibujar la gráfica de $f(x) = \dfrac{x-1}{x-2}$ y describir su comportamiento cerca de $x = 2$.

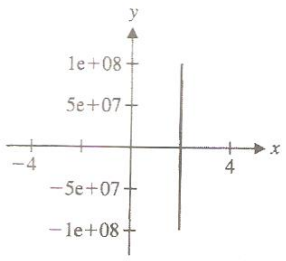



**Figura 0.34a**

$y = \dfrac{x-1}{x-2}$.

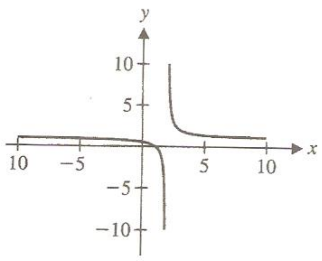



**Figura 0.34b**

$y = \dfrac{x-1}{x-2}$.

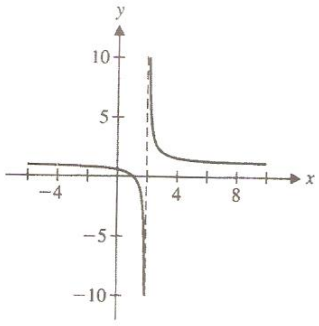



**Figura 0.36**
Asíntota vertical.

**Solución** Su gráfica será análoga a alguna de las figuras 0.34a o 0.34b. Está claro que algo inusual sucede cerca de $x = 2$. Haciendo zoom en esa zona se obtiene algo como las figuras 0.35a o 0.35b.

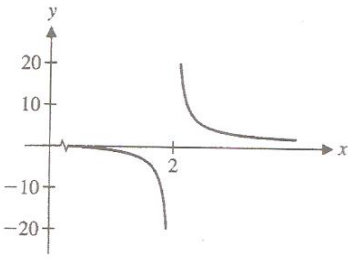



**Figura 0.35a**

$y = \dfrac{x-1}{x-2}$.

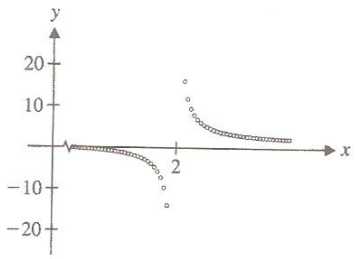



**Figura 0.35b**

$y = \dfrac{x-1}{x-2}$.

En la figura 0.35a, la calculadora utiliza píxeles extra para conseguir una línea conexa, mientras que la figura 0.35b sólo muestra los puntos calculados. En ambas parece que la función se va haciendo más negativa conforme $x$ se acerca al valor 2 por la izquierda y crece más $y$ más cuando $x$ se acerca a 2 por la derecha. Lo mismo corrobora una tabla de valores.

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 1,8 | −4 |
| 1,9 | −9 |
| 1,99 | −99 |
| 1,999 | −999 |
| 1,9999 | −9999 |

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 2,2 | 6 |
| 2,1 | 11 |
| 2,01 | 101 |
| 2,001 | 1001 |
| 2,0001 | 10.001 |

En $x = 2$, $f(x)$ no está definida. Cuando $x$ se acerca a 2 por la izquierda, su gráfica cae bruscamante [se dice que $f(x)$ tiende a $-\infty$], y cuando $x$ se acerca a 2 por la derecha, la gráfica sube bruscamente [se dice que $f(x)$ tiende a $\infty$]. En tales circunstancias, diremos que hay una **asíntota vertical** en $x = 2$. (Las definiremos con más precisión en el Capítulo 1). Suele trazarse una recta vertical de trazo discontinuo para indicar la asíntota (figura 0.36). Puesto que $f(2)$ no está definido, no hay punto marcado en $x = 2$.

Muchas funciones racionales tienen asíntotas verticales. No se marca punto alguno en la asíntota porque la función no está definida en el valor de $x$ correspondiente (ya que ocurre una división entre cero cuando se sustituye ese valor para $x$). Para localizar las posibles asíntotas verticales de una función racional hay que analizar dónde se hace cero su denominador.

### Ejemplo 3.5 Una gráfica con varias asíntotas verticales

Hallar las asíntotas verticales de $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-5x+6}$.

**Solución** El denominador es

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3),$$

así que sólo puede haber asíntotas verticales en $x = 2$ y en $x = 3$. Como esos valores de $x$ no anulan el numerador, hay asíntota vertical en ambos. Una gráfica precipitada generada en calculadora ayuda poco a entender cómo se comporta la función en las proximidades de sus asíntotas (figura 0.37).

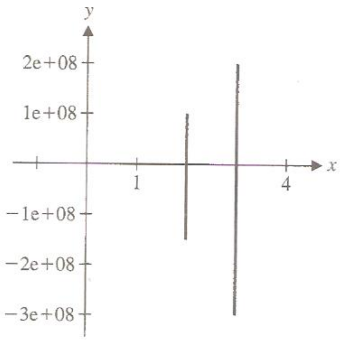



**Figura 0.37**

$$y = \frac{x-1}{x^2-5x+6}.$$

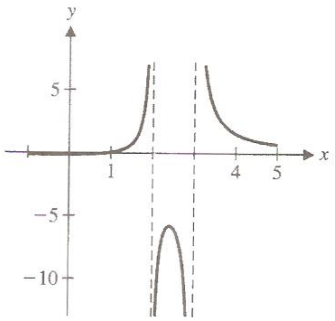



**Figura 0.38**

$$y = \frac{x-1}{x^2-5x+6}.$$

La gráfica mejora con la ventana más pequeña $-1 \le x \le 5$ y $-13 \le y \le 7$ (figura 0.38). Si bien aún es mejorable (en el Capítulo 3 aprenderemos cómo), ya muestra con claridad las asíntotas verticales en $x = 2$ y $x = 3$.

El siguiente ejemplo enseña que no toda función racional tiene asíntotas verticales.

**Ejemplo 3.6** **Una función racional sin asíntotas verticales**

Hallar las asíntotas verticales de $\dfrac{x-1}{x^2+4}$.

**Solución** Como $x^2 + 4 > 0$ para todo $x$ real, es imposible que $x^2 + 4 = 0$. El denominador no se hace cero nunca. Por tanto, no hay asíntotas verticales, como confirma la figura 0.39.

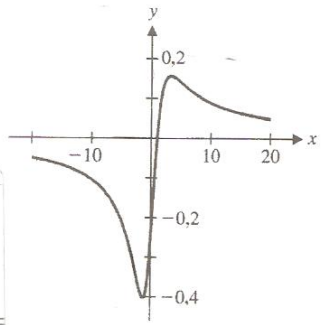



**Figura 0.39**

$$y = \frac{x-1}{x^2+4}.$$

El ejemplo final muestra por qué es necesario analizar si el numerador se anula.

**Ejemplo 3.7** **Una función racional con sólo una asíntota vertical**

Determinar las asíntotas verticales de $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x^2-3x+2}$.

**Solución** El denominador es

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2),$$

así que las posibles asíntotas verticales estarían localizadas en $x = 1$ y en $x = 2$. El numerador $(x^3 - 1)$ no es cero en $x = 2$, luego hay asíntota vertical en $x = 2$. Pero el numerador se hace cero en $x = 1$. Como veremos en la sección 1.1, eso significa que hemos de analizar el comportamiento en las proximidades de $x = 1$ con cuidado. La figura 0.40a, generada con calculadora, muestra la asíntota en $x = 2$, pero ni rastro de asíntota en $x = 1$. Más aún, la imagen ampliada con el zoom (figura 0.40b) deja claro que no existe asíntota vertical en $x = 1$. Y aunque la función no está definida en $x = 1$, la figura 0.40b sugiere que $f(1) \approx -3$. Ésta es una de las limitaciones de las gráficas generadas con calculadora.

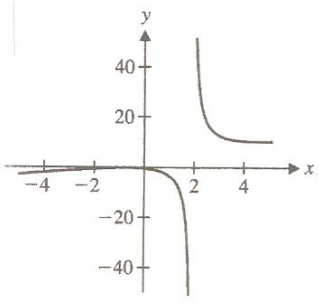



**Figura 0.40a**

$$y = \frac{x^3-1}{x^2-3x+2}.$$

Finalmente, factorizando numerador y denominador se obtiene

$$\frac{x^3-1}{x^2-3x+2} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{x^2+x+1}{x-2},$$

donde es válida la cancelación de los factores $(x - 1)$ si $x \neq 1$. En particular, para $g(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x-2}$, $g(1) = -3$. En consecuencia, la función original, $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x^2-3x+2}$, tiene la misma gráfica que $g(x)$, excepto un hueco en el punto $(1, -3)$, debido a que $f(x)$ no está definida en $x = 1$ (véase figura 0.40c).

4 00272 31110

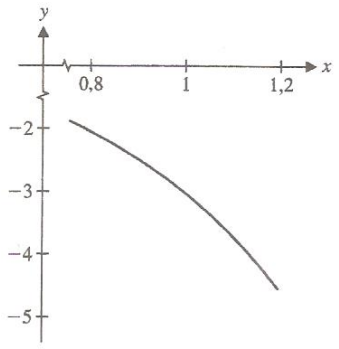



**Figura 0.40b**

$y = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 3x + 2}$.

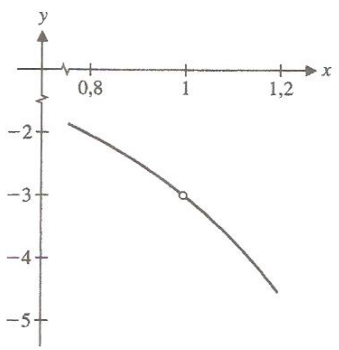



**Figura 0.40c**

$y = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 3x + 2}$.

# EJERCICIOS 0.3

1. Explicar por qué hay una diferencia significativa entre las figuras 0.35a y 0.35b.

2. En la figura 0.35a, la gráfica se acerca por la izquierda a la parte inferior de la asíntota y por la derecha a la parte superior. Usar la tabla de valores de la función, bajo esa figura, para explicar cómo saber si una gráfica se acerca a una asíntota vertical por arriba o por abajo.

3. Discutir las ventajas e inconvenientes de las ventanas gráficas fijas y automáticas. (Ayuda: Considerar una función de la que nada se sabe de antemano y otra de la que se tiene una idea cualitativa previa).

4. Examinar la gráfica de $y = \dfrac{x^3 + 1}{x}$ en las ventanas (a) $-10 \le x \le 10$, (b) $-1000 \le x \le 1000$. Explicar por qué la gráfica de (b) no muestra tantos detalles como la de (a).

**En los ejercicios 5-34, dibujar una gráfica de la función que muestre sus extremos, intersecciones con los ejes y asíntotas.**

5. $f(x) = x^2 - 1$
6. $f(x) = 3 - x^2$
7. $f(x) = x^2 + 2x + 8$
8. $f(x) = x^2 - 20x + 11$
9. $f(x) = x^3 + 1$
10. $f(x) = 10 - x^3$
11. $f(x) = x^3 + 2x - 1$
12. $f(x) = x^3 - 3x + 1$
13. $f(x) = x^4 - 1$
14. $f(x) = 2 - x^4$
15. $f(x) = x^4 + 2x - 1$
16. $f(x) = x^4 - 6x^2 + 3$
17. $f(x) = x^5 + 2$
18. $f(x) = 12 - x^5$
19. $f(x) = x^5 - 8x^3 + 20x - 1$
20. $f(x) = x^5 + 5x^4 + 2x^3 + 1$
21. $f(x) = \dfrac{3}{x - 1}$
22. $f(x) = \dfrac{4}{x + 2}$
23. $f(x) = \dfrac{3x}{x - 1}$
24. $f(x) = \dfrac{4x}{x + 2}$
25. $f(x) = \dfrac{3x^2}{x - 1}$
26. $f(x) = \dfrac{4x^2}{x + 2}$
27. $f(x) = \dfrac{2}{x^2 - 4}$
28. $f(x) = \dfrac{6}{x^2 - 9}$
29. $f(x) = \dfrac{3}{x^2 + 4}$
30. $f(x) = \dfrac{6}{x^2 + 9}$
31. $f(x) = \dfrac{x + 2}{x^2 + x - 6}$
32. $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 + 4x + 3}$
33. $f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{x^2 + 4}}$
34. $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

**En los ejercicios 35-44 usar una gráfica para encontrar todas las intersecciones con los ejes.**

35. $f(x) = x^2 - 4$
36. $f(x) = x^2 - 9$
37. $f(x) = x^2 + 4$
38. $f(x) = x^2 + 9$
39. $f(x) = x^2 - 3x - 4$
40. $f(x) = x^2 + 6x + 8$
41. $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$
42. $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$
43. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 - 4}$
44. $f(x) = \dfrac{x - 2}{x^2 + 5x + 6}$

**En los ejercicios 45-54, hallar todas las asíntotas verticales.**

45. $f(x) = \dfrac{3x}{x^2 - 4}$
46. $f(x) = \dfrac{x + 4}{x^2 - 9}$
47. $f(x) = \dfrac{4x}{x^2 + 3x - 10}$
48. $f(x) = \dfrac{x + 2}{x^2 - 2x - 15}$
49. $f(x) = \dfrac{4x}{x^2 + 4}$
50. $f(x) = \dfrac{6}{x^2 + 9}$

51. $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^3 + 3x^2 + 2x}$

52. $f(x) = \dfrac{3x}{x^4 - 1}$

53. $f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{x^2 - 9}}$

54. $f(x) = \dfrac{2x}{(x^3 - 1)^2}$

**En los ejercicios 55-58, una ventana estándar no revela todos los detalles relevantes de la gráfica. Ajustar la ventana hasta verlos adecuadamente.**

55. $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{400}x$

56. $f(x) = x^4 - 11x^3 + 5x - 2$

57. $f(x) = x\sqrt{144 - x^2}$

58. $f(x) = \dfrac{1}{5}x^5 - \dfrac{7}{8}x^4 + \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{7}{2}x^2 - 6x$

**En los ejercicios 59-64, ajustar la ventana gráfica para identificar las asíntotas horizontales.**

59. $f(x) = \dfrac{3}{x - 1}$

60. $f(x) = \dfrac{4x}{x^2 - 1}$

61. $f(x) = \dfrac{3x^2}{x^2 - 1}$

62. $f(x) = \dfrac{2x}{x + 4}$

63. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{\sqrt{x^4 + 1}}$

64. $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

65. Representar $y = x^2$ en la ventana $-10 \le x \le 10$ y $-10 \le y \le 10$ sin trazar los ejes. Ajustar la ventana para $y = 2(x - 1)^2 + 3$ de modo tal que (sin mostrar los ejes) la gráfica parezca idéntica a la de $y = x^2$.

66. Representar por separado $y = x^2$ e $y = x^4$, ambas con ventana $-10 \le x \le 10$ y $-10 \le y \le 10$. Comparar las dos gráficas. A continuación, representarlas sobre unos mismos ejes y examinar las diferencias en $-1 < x < 1$ y en $x > 1$.

67. Vamos a hallar una ecuación para los puntos que equidistan del eje $x$ y del punto $(0, 2)$. En primer lugar, haga un esbozo de cómo ha de ser aproximadamente tal curva.
Explicar por qué cualquier punto $(x, y)$ de esa curva satisface $\sqrt{y^2} = \sqrt{x^2 + (y - 2)^2}$.
Elevar al cuadrado ambos lados y despejar $y$.
Identificar la curva.

68. Hallar una ecuación que describa los puntos equidistantes del eje $x$ y del punto $(1, 4)$ (véase ejercicio 67).

69. Un objeto en caída tiende a una velocidad constante $v_T$, llamada **velocidad terminal**. Para una bola de peso $W$ y diámetro $D$, $v_T = c\sqrt{W/D}$ para cierta constante $c$. Cuenta la leyenda que Galileo dejó caer una bola de madera y una de metal, del mismo tamaño, desde lo alto de la torre inclinada de Pisa con el fin de demostrar que la aceleración de la gravedad no depende del peso. (Lo cual es cierto, pero el efecto de la resistencia del aire sí depende del peso). Comparar las velocidades terminales de las dos bolas, supuesto que la de metal pesa doble que la otra.

70. Rellenar el hueco: una bola que cae cuatro veces más deprisa que una de madera es ___ veces más pesada (véase ejercicio 69).

71. Los píxeles de cierta calculadora gráfica corresponden a $x = 0, 0{,}1, 0{,}2, 0{,}3, \ldots, 2{,}0$ e $y = 0, 0{,}1, 0{,}2, 0{,}3, \ldots, 4{,}0$. Calcular los valores indicados de la función $f(x) = x^2$ y redondearlos a coordenadas de píxeles [así, el punto $(1{,}19, 1{,}4161)$ tiene coordenadas de píxel $(1{,}2, 1{,}4)$].
(a) $f(0{,}4)$, (b) $f(0{,}39)$, (c) $f(1{,}17)$, (d) $f(1{,}20)$, (e) $f(1{,}8)$, (f) $f(1{,}81)$.
Repetir (c) y (d) si se hace zoom en la ventana gráfica de modo que $x = 1{,}00, 1{,}01, \ldots, 1{,}20$ e $y = 1{,}30, 1{,}31, \ldots, 1{,}50$.
Repetir (e) y (f) si se hace zoom en la ventana gráfica de modo que $x = 1{,}800, 1{,}801, \ldots, 1{,}820$ e $y = 3{,}200, 3{,}205, \ldots, 3{,}300$.

72. Representar $y = x^2 - 1$, $y = x^2 + x - 1$, $y = x^2 + 2x - 1$, $y = x^2 - x - 1$ e $y = x^2 - 2x - 1$ y otras funciones de la forma $y = x^2 + cx - 1$. Describir cómo afecta a la gráfica un cambio en $c$.

73. Las figuras 0.31 y 0.32 contienen los posibles tipos de gráficas de funciones cúbicas. Para elaborar un catálogo similar de funciones cuárticas $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, comience representando en la calculadora $y = x^4$, $y = 2x^4$, $y = -2x^4$, $y = x^4 + x^3$, $y = x^4 + 2x^3$, $y = x^4 - 2x^3$, $y = x^4 + x^2$, $y = x^4 - x^2$, $y = x^4 - 2x^2$, $y = x^4 + x$, $y = x^4 - x$ y pruebe con otros valores de $a$, $b$, $c$, $d$ y $e$, hasta identificar el efecto de cada una de las constantes.

74. Al describir el movimiento de un objeto es conveniente adoptar como variable el tiempo. En dos dimensiones, la posición del objeto viene dada por dos funciones $x(t)$ e $y(t)$. Es un ejemplo de **ecuaciones paramétricas**. Gráficas simples de polinomios pueden interactuar produciendo complicadas gráficas paramétricas.
(a) Representar en la calculadora $x(t) = t^2 - 2$ e $y(t) = t^3 - t - 1$.
(b) Hallar el punto $(x, y)$, y el correspondiente valor de $t$, donde comienza el lazo.
(c) Intente explicar el lazo a partir de las propiedades de $x(t)$ e $y(t)$.

## 0.4 RESOLUCIÓN DE ECUACIONES

Por muchas razones, es necesario resolver ecuaciones. Por ejemplo, para saber el ángulo de lanzamiento de un cohete al espacio o para conocer cuándo debemos cambiar la estrategia en un negocio. Matemáticamente, se trata de hallar el punto en que la gráfica de $y = f(x)$ corta al eje $x$. Eso equivale a resolver la ecuación $f(x) = 0$.

También estaremos interesados en encontrar el punto donde se cortan las gráficas de $y = g(x)$ e $y = h(x)$, lo cual exige resolver la ecuación $g(x) = h(x)$. Afortunadamente, los dos problemas son idénticos, ya que llamando $f(x) = g(x) - h(x)$, el segundo se reduce a resolver $f(x) = 0$.

Una **solución** (o **raíz**) de la ecuación $f(x) = 0$ es cualquier número $x_0$ que satisfaga la ecuación, o sea, tal que $f(x_0) = 0$. Se dirá también que $x_0$ es un **cero** de la función $f$ (porque $x_0$ es un valor que hace cero a la función $f$). A continuación discutiremos varios métodos para encontrar los ceros de una función.

### Ejemplo 4.1 Localización de los ceros por factorización

Hallar los ceros de $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

**Solución** El polinomio dado factoriza como

$$f(x) = x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2) = 0$$

Podemos leer directamente sus ceros: $x = 1$ y $x = 2$.

Por desgracia, factorizar suele ser difícil. Naturalmente, para la ecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c = 0$$

(con $a$, $b$, $c$ números reales y $a \neq 0$), las soluciones vienen dadas por la conocida **fórmula cuadrática**

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

### Ejemplo 4.2 Aplicación de la fórmula cuadrática

Hallar los ceros de $f(x) = x^2 - 5x - 12$.

**Solución** Se puede intentar la factorización, pero sin éxito. No obstante, la fórmula cuadrática da

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 48}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{73}}{2}.$$

Así, pues, las dos soluciones son $x = \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{73}}{2} \approx 6{,}772$ y $x = \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{73}}{2} \approx -1{,}772$ (¡no es raro que hayamos fracasado en la factorización!).

Determinar los ceros exactos de polinomios de grado mayor o de otras funciones es mucho más difícil cuando no imposible. Al menos, uno siempre puede aproximar el valor de un cero haciendo zoom una y otra vez donde la gráfica corta al eje $x$, como ilustraremos en breve. Una cuestión más básica es saber **cuántos** ceros tiene una función dada. En general, no hay respuesta sin la ayuda del Cálculo. Sin embargo, en el caso de polinomios, el siguiente teorema (consecuencia del teorema fundamental del Álgebra) es clave.

**Teorema 4.1**
Un polinomio de grado $n$ tiene **a lo sumo** $n$ ceros distintos.

No especifica cuántos. Sólo afirma que el número **máximo** de ceros distintos es igual al grado. Un polinomio de grado $n$ puede tener desde 0 hasta $n$ ceros reales diferentes. [Recordemos que puede haber ceros complejos. Así, $f(x) = x^2 + 1$ tiene sólo los ceros complejos $x = \pm i$, donde $i = \sqrt{-1}$ es la unidad imaginaria].

Ahora bien, los polinomios de grado impar tienen **al menos un** cero real (¿por qué?). Por ejemplo, para un polinomio cúbico caben las tres posibilidades ilustradas en las figuras 0.41a, 0.41b y 0.41c.

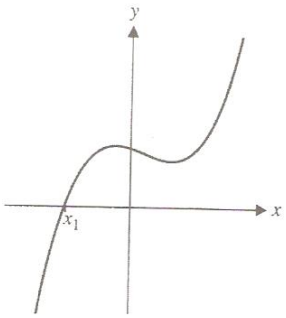



**Figura 0.41a**
Un cero.

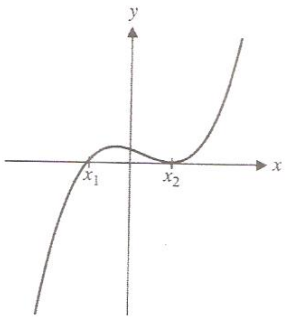



**Figura 0.41b**
Dos ceros.

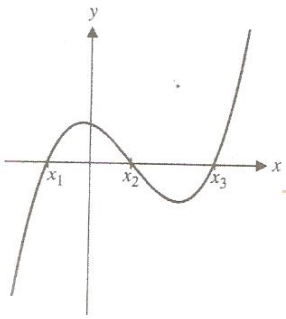



**Figura 0.41c**
Tres ceros.

Estas tres figuras muestran polinomios cúbicos con 1, 2 y 3 ceros reales distintos, respectivamente. Son las gráficas de

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 3 = (x + 1)(x^2 - 3x + 3),$$
$$g(x) = x^3 - x^2 - x + 1 = (x + 1)(x - 1)^2$$

y

$$h(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3 = (x + 1)(x - 1)(x - 3),$$

respectivamente. En la forma factorizada se ve cuáles son los ceros y cuántos hay reales.

El siguiente resultado establece una importante conexión entre factores y ceros de polinomios.

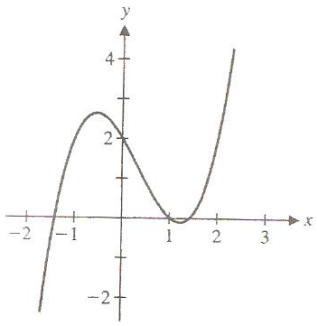



**Figura 0.42a**
$y = x^3 - x^2 - 2x + 2$.

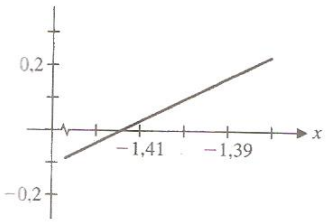



**Figura 0.42b**
Zoom en el cero
$x = -1{,}4$.

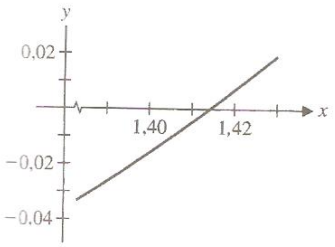



**Figura 0.42c**
Zoom en el cero
$x = 1{,}4$.

**Teorema 4.2 (Teorema del factor)**
Para cualquier polinomio $f$, $f(a) = 0$ si, y sólo si, $(x - a)$ es un factor de $f(x)$.

**Ejemplo 4.3** **Ceros de un polinomio cúbico**

Hallar los ceros de $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 2$.

**Solución** Salta a la vista que $x = 1$ es un cero de la función [calcular $f(1)$]. Pero ¿cuántos ceros reales más hay? La gráfica de la figura 0.42a puede ayudar. En ella vemos que hay dos ceros aproximadamente en $x = \pm 1{,}5$. Usando el zoom en esos puntos (figuras 0.42b y 0.42c), podemos precisar más: están más o menos en $x = \pm 1{,}414$. Y se puede afinar más continuando con el zoom. Y muchos PCS aproximan los ceros de funciones (en el Capítulo 3 presentaremos el método de Newton, muy eficaz a este propósito). Pero la única forma de hallar el valor exacto de los ceros es factorizar la expresión. En este caso,

$$f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 2 = (x - 1)(x^2 - 2) = (x - 1)(x - \sqrt{2})\,(x + \sqrt{2}),$$

de donde se sigue que los ceros son $x = 1$, $x = \sqrt{2}$ y $x = -\sqrt{2}$.

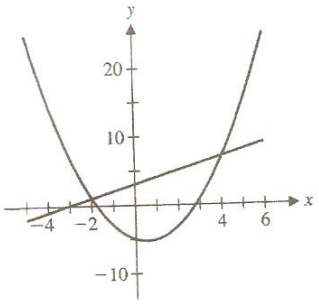



**Figura 0.43**
$y = x + 3$ e $y = x^2 - x - 5$.

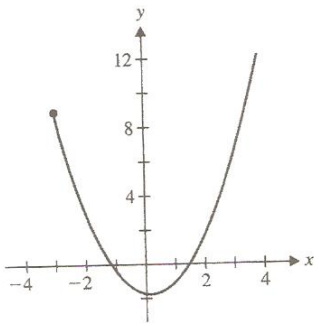



**Figura 0.44a**

$y = x^2 - \sqrt{x+3}$.

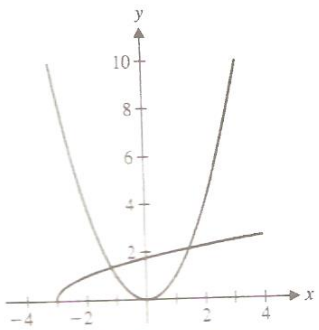



**Figura 0.44b**

$y = x^2$ e $y = \sqrt{x+3}$.

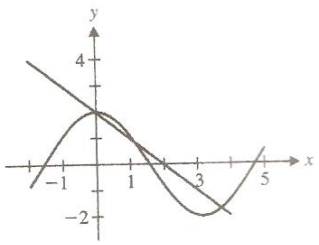



**Figura 0.45**
$y = 2\cos x$ e $y = 2 - x$.

Recordemos que para hallar los puntos de intersección de las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$, basta resolver la ecuación $f(x) = g(x)$.

### Ejemplo 4.4 Intersección de una recta con una parábola

Hallar los puntos de intersección de la parábola $y = x^2 - x - 5$ con la recta $y = x + 3$.

**Solución** Sus gráficas (figura 0.43) sugieren que hay dos puntos de corte, uno cerca de $x = -2$ y otro cerca de $x = 4$. Para determinarlos, igualamos las dos funciones y resolvemos:

$$x^2 - x - 5 = x + 3.$$

Restando $(x + 3)$ en ambos lados queda

$$0 = x^2 - 2x - 8 = (x - 4)(x + 2).$$

Por tanto, las soluciones exactas son $x = -2$ y $x = 4$. Los correspondientes valores de $y$ se calculan usando la ecuación de la recta (o la de la parábola). Los puntos de intersección son $(-2, 1)$ y $(4, 7)$, resultado compatible con la figura 0.43.

Hemos advertido que una ecuación se puede expresar siempre en la forma $f(x) = 0$. Y es conveniente hacerlo si se desea resolverla algebraica o numéricamente (como haremos en el Capítulo 3). Pero puede no ser la mejor opción si lo que queremos es investigar las raíces gráficamente, como ilustra el próximo ejemplo.

### Ejemplo 4.5 Cálculo aproximado de los ceros

Aproximar los ceros de la ecuación $x^2 = \sqrt{x+3}$.

**Solución** Reescrita como $x^2 - \sqrt{x+3} = 0$, podemos observar sus ceros en la gráfica de $f(x) = x^2 - \sqrt{x+3}$ (figura 0.44a). Dos ceros aparecen claros, cerca de $-1$ y de 1,5. Pero conocemos tan poco la función $x^2 - \sqrt{x+3}$, que no estamos seguros de si hay otros ceros fuera de esa ventana gráfica. Por otra parte, si representamos en unos mismos ejes las dos funciones de los lados de la ecuación propuesta (figura 0.44b) vemos dos puntos de corte, que corresponden a los ceros de la figura 0.44a. Y como conocemos la forma de esas dos curvas, deducimos de la figura 0.44b que no hay más intersecciones, luego tampoco más ceros de $f$. Es una información importante que no daba la figura 0.44a. Ahora que sabemos cuántas soluciones hay, necesitamos estimar sus valores. Una posibilidad la da el zoom de la calculadora, un método fiable, pero tedioso, si se desea una precisión de dos o tres dígitos. Dejamos como ejercicio verificar que los ceros son aproximadamente $x = 1{,}4$ y $x = -1{,}2$. Un PCS da rápidamente una aproximación muy buena, $x \approx 1{,}452626878$ y $x \approx -1{,}164035140$.

Cuando se utiliza un PCS conviene comprobar que las soluciones obtenidas tienen sentido. Si algo no encaja con los esbozos gráficos previos o con los zoom, ¡ojo! Incluso con la tecnología pueden ocurrir errores ocasionalmente.

### Ejemplo 4.6 Intersecciones con calculadora: una llamada de atención

Hallar los puntos de intersección de las gráficas de $y = 2\cos x$ e $y = 2 - x$.

**Solución** Las intersecciones son las soluciones de la ecuación $2\cos x = 2 - x$. Usando un PCS (o «solve» en una TI-92), se encuentran las intersecciones en $x \approx 3{,}69815$ y en $x = 0$. Entonces, ¿cuál es el problema? Un esbozo de las gráficas de $y = 2 - x$ y de $y = 2\cos x$ (repasamos esta función en la próxima sección) muestra claramente **tres** intersecciones (véase figura 0.45).

La solución de en medio, $x \approx 1{,}10914$, ha sido omitida por el PCS. La enseñanza es clara: hay que usar evidencia gráfica para contrastar las soluciones de la calculadora, sobre todo cuando las funciones a estudiar no nos sean familiares.

Hay que mirar con cierto escepticismo las soluciones que da una calculadora. Aunque los PCS dan respuestas rápidas y muy precisas, puede darnos una solución completamente errónea. ¿Y cómo saber si sucede eso? La única respuesta es que debe contrastarse la solución, calculando (**a mano**) ambos lados de la ecuación en el valor de $x$ obtenido. Resulta más cómodo aceptar la solución de la calculadora sin rechistar, pero eso conlleva riesgos, como ilustra el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 4.7** **Resolución de una ecuación con calculadora: Una respuesta errónea**

Usar un PCS para resolver la ecuación $x + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$.

**Solución** A decir verdad, no se necesita calculadora para resolver esta ecuación, pero veamos qué ocurre si la usamos. Muchas calculadoras dan una solución muy próxima a cero y algunos PCS (o la TI-89) dan $x = 0$. No sólo son incorrectas esas soluciones. Es peor que eso, ya que ¡la ecuación no tiene solución!, como vamos a ver.

En primer lugar, observemos que la ecuación sólo tiene sentido para $x \neq 0$. Restando $\frac{1}{x}$ de ambos lados la ecuación se reduce a $x = 0$, que no es solución, ya que no verifica la ecuación original. Además, si la calculadora da como solución aproximada $x = 1 \times 10^{-7}$ y evaluamos con ella los dos lados de la ecuación, la calculadora encuentra

$$x + \frac{1}{x} = 1 \times 10^{-7} + 1 \times 10^{7},$$

que aproxima como $1 \times 10^{7} = \frac{1}{x}$, ya que sólo puede arrastrar un número finito de dígitos. En otras palabras, aunque

$$1 \times 10^{-7} + 1 \times 10^{7} \neq 1 \times 10^{7},$$

la calculadora trata esos números como si fueran el mismo y, en consecuencia, da la ecuación por satisfecha cuando en realidad no es cierto. La lección de este ejemplo es que las calculadoras han de usarse de modo inteligente, no aceptando a ciegas sus resultados.

Queremos insistir en que un esbozo gráfico es el primer paso en el proceso de resolución de ecuaciones. Una gráfica aceptable nos dice cuántas soluciones cabe esperar y sus valores aproximados. Siempre que sea posible, hay que factorizar o usar la fórmula cuadrática para dar con las soluciones exactas. Si eso no es posible, usar el zoom o un PCS. Y comparar siempre los resultados con la gráfica para ver si algo se nos ha escapado.

## EJERCICIOS 0.4

1. Explicar, en términos gráficos (véanse figuras 0.41a-0.41c), por qué un polinomio de grado impar tiene necesariamente un cero real.

2. Explicar gráficamente por qué para un polinomio cúbico es más probable tener un cero que dos, mientras que para uno cuártico es más probable tener dos que uno.

3. En el ejemplo 4.1 se usaba factorización y en el ejemplo 4.2 la fórmula cuadrática. ¿Cómo se sabe cuándo proceder de una u otra manera?

4. Si sustituimos $x = 1$ en $x^3 - 4x^2 + 2x + 1$, obtenemos 0. Explicar por qué eso implica que $x - 1$ es un factor de $x^3 - 4x^2 + 2x + 1$ y cómo encontrar, por división, el factor (cuadrático) restante.

**En los ejercicios 5-20, factorizar y/o usar la fórmula cuadrática para hallar los ceros de la función.**

5. $f(x) = x^2 - 4x + 3$
6. $f(x) = x^2 + x - 12$
7. $f(x) = x^2 - 2x - 15$
8. $f(x) = x^2 + 6x + 8$
9. $f(x) = x^2 - 4x + 2$
10. $f(x) = x^2 + 2x - 2$
11. $f(x) = 2x^2 + 4x - 1$
12. $f(x) = 2x^2 - 6x + 3$
13. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$
14. $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$
15. $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$
16. $f(x) = x^3 + 4x^2 + 3x$
17. $f(x) = x^4 - 1$
18. $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2$
19. $f(x) = x^6 + x^3 - 2$
20. $f(x) = x^5 - 1$

**En los ejercicios 21-30, estimar los ceros con ayuda de calculadora.**

21. $f(x) = x^3 - 3x + 1$
22. $f(x) = x^3 - 4x^2 + 2$
23. $f(x) = x^3 - x + 1$
24. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 1$
25. $f(x) = x^4 + 3x^3 - x + 1$
26. $f(x) = x^4 - 2x + 1$
27. $f(x) = 4x^5 + 8x - 1$
28. $f(x) = x^5 - 10x + 2$
29. $f(x) = x^4 - 7x^3 - 15x^2 - 10x - 1410$
30. $f(x) = x^6 - 4x^4 + 2x^3 - 8x - 2$

**En los ejercicios 31-40, determinar el número de soluciones (reales). Hallar los puntos de intersección exactos, si es posible, o aproximarlos en caso contrario.**

31. $\sqrt{x-1} = x^2 - 1$
32. $\sqrt{x^2+4} = x^2 + 2$
33. $x^3 - 3x^2 = 1 - 3x$
34. $x^3 + 1 = -3x^2 - 3x$
35. $(x^3 - 1)^{2/3} = 2x + 1$
36. $(x + 1)^{2/3} = 2 - x$
37. $\dfrac{x^2}{x^2+1} = x$
38. $\dfrac{x^2}{x^2+1} = \dfrac{x}{4}$
39. $\cos x = x^2 - 1$
40. $\operatorname{sen} x = x^2 + 1$

41. Comprobar que la fórmula cuadrática es correcta probando que $x = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ y $x = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ son soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.

42. Hallar polinomios de grado cuatro con (a) ningún cero, (b) un cero, (c) dos ceros, (d) tres ceros y (e) cuatro ceros. Esbozar sus gráficas.

43. En el ejemplo 4.5 se aconsejó contrastar las soluciones con una gráfica para evitar errores. Consideremos los siguientes pasos en la resolución de la ecuación $x - 1 = \sqrt{7 - x}$. Elevar al cuadrado $x^2 - 2x + 1 = 7 - x$. Agrupando, queda $x^2 - x - 6 = 0$. Factorizando, resulta $(x - 3)(x + 2) = 0$ y concluimos que las soluciones son $x = 3$ y $x = -2$. Usar una gráfica para ver que $x = -2$ no es solución. Es lo que se conoce como una **solución espúrea**, introducida al tomar el cuadrado.

44. Probar que al sustituir $x = -2$ en la ecuación del ejercicio 43, los dos lados no son iguales. Explicar por qué elevar al cuadrado esa ecuación hace surgir $x = -2$ como solución (espúrea).

**En los ejercicios 45 y 46, hallar la verdadera solución y una solución espúrea introducida al elevar al cuadrado (véanse ejercicios 43 y 44).**

45. $x - 2 = \sqrt{7 - 2x}$
46. $x + 1 = \sqrt{4x + 9}$

**En los ejercicios 47-52, usar factorización y la fórmula cuadrática para encontrar todos los ceros, reales o complejos. Esbozar una gráfica y mostrar que el número de ceros reales es el número de intersecciones con el eje $x$.**

47. $f(x) = x^2 + 2x + 5$
48. $f(x) = x^2 + x + 1$
49. $f(x) = x^2 + 2x - 5$
50. $f(x) = x^2 + x - 1$
51. $f(x) = x^3 - 1$
52. $f(x) = x^4 - 1$

**En los ejercicios 53-56, hallar los puntos fijos de la función. [Un punto fijo de $f(x)$ es una solución de la ecuación $f(x) = x$. Por ejemplo, para hallar los puntos fijos de $f(x) = x^2$ hay que resolver la ecuación $x^2 = x$. Los puntos fijos son $x = 0$ y $x = 1$].**

53. $f(x) = x^2 - 1$
54. $f(x) = x^2 - 2$
55. $f(x) = x^3$
56. $f(x) = 4x(1 - x)$

57. Probar que si $c > \dfrac{1}{4}$, la función $f(x) = x^2 + c$ no tiene puntos fijos reales (véanse ejercicios 53 y 54). Sin embargo, $c < \dfrac{1}{4}$ $f(x)$ tiene dos puntos fijos. Debido al cambio en el número de puntos fijos, el valor $c = \dfrac{1}{4}$ se dice que es un **punto de bifurcación** de $f(x) = x^2 + c$.

58. Representar $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{4}$ y $g(x) = x$. Explicar por qué $c = \dfrac{1}{4}$, identificado como punto de bifurcación en el ejercicio 57, se llama una bifurcación **tangente**.

59. Una pelota lanzada hacia arriba $h$ pies permanece en el aire $T(h) = 0{,}5\sqrt{h}$ segundos. Por ejemplo, $T(1) = 0{,}5$ significa que una pelota lanzada 1 pie hacia arriba volverá al punto de partida medio segundo después. Resolver $T(h) = 4{,}5$ para saber a qué altura debe lanzarse la pelota si ha de permanecer en el aire 4,5 segundos.

60. Los malabaristas profesionales afirman que el límite en malabarismos con pelotas es de 10 pelotas. Supongamos que se tarda un segundo en atrapar una pelota y volverla a lanzar hacia arriba.
    (a) Si tuviera que manejar 10 pelotas, explique por qué desearía que cada una permanezca en el aire 4,5 segundos.
    (b) Según el ejercicio 59, ¿a qué altura debe lanzarlas?
    (c) ¿A qué altura habría que lanzarlas para lograr manejar 11 pelotas en vez de 10?

61. Tal vez se haya preguntado cómo resuelve ecuaciones una calculadora o un PCS. Ahora presentaremos un método simple. Dada $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$, comprobar que $f(0) = -1$ y $f(1) = 3$. Al ser $f(0)$ negativo y $f(1)$ positivo, esperamos que $f(x)$ tenga un cero entre $x = 0$ y $x = 1$ (¿por qué?). En el **método de bisección**, se ensaya ahora el punto medio $x = \dfrac{1}{2}$. Verificar que $f(\frac{1}{2}) < 0$ y explicar por qué el cero debe estar entre $x = \dfrac{1}{2}$ y $x = 1$. A continuación, ver que $f(\frac{3}{4}) > 0$ y razonar que el cero debe estar entre $x = \dfrac{1}{2}$ y $x = \dfrac{3}{4}$. Continuar el proceso tres pasos más y estimar el valor del cero.
    Nota: Este método es tedioso a mano, pero una calculadora lo aplica con gran rapidez.

62. El método de bisección (ejercicio 61) parte de la base de que si $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, entonces $f(x) = 0$ para algún $x$ entre $a$ y $b$. Para ver que eso no siempre es cierto, tomemos $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Probar que $f(-1) < 0$ y $f(1) > 0$. Ver en una gráfica que $f(x)$ no tiene ceros. Describir cómo va la gráfica desde el punto $(-1, -1)$ hasta el $(1, 1)$ sin cortar al eje $x$. La propiedad culpable de esto, llamada **discontinuidad**, será analizada en el Capítulo 1.

## 0.5 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

En muchos fenómenos de la vida real aparecen **ondas**. La música de la radio se transmite en forma de ondas electromagnéticas que, descodificadas por el receptor, hacen vibrar una fina membrana en los altavoces. Esa vibración, a su vez, produce ondas de presión en el aire. Cuando esas ondas alcanzan nuestros órganos auditivos, oímos la música (véase figura 0.46). Todas estas ondas son **periódicas**: su forma básica se repite una y otra vez.

La descripción matemática de tales fenómenos se lleva a cabo mediante funciones periódicas, siendo las más importantes de ellas las funciones trigonométricas. Empezamos por una definición fundamental.

**Definición 5.1**
Una función $f$ es **periódica** con **período** $T$ si

$$f(x + T) = f(x)$$

para todo $x$ tal que $x$ y $x + T$ estén en el dominio de $f$. El menor número $T > 0$ que cumple esa propiedad se llama **período fundamental**.

**Advertencia**

Cuando hablemos del período de una función nos estaremos refiriendo, en general, al período fundamental.

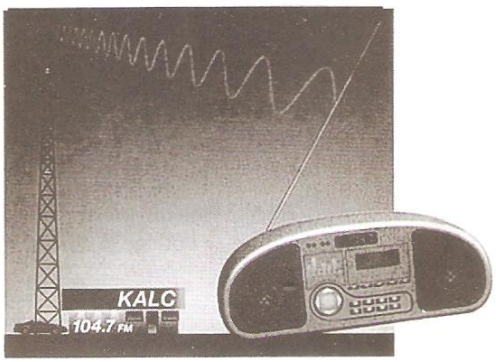



**Figura 0.46**
Ondas de radio y de sonido.

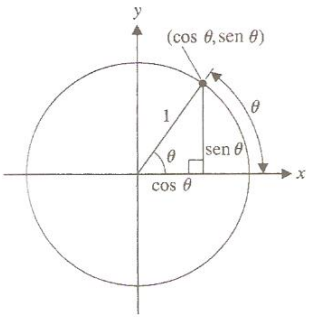



**Figura 0.47**
Definición de sen $\theta$ y cos $\theta$.

Hay varias maneras de definir las funciones seno y coseno. Elegimos una definición simple de la que muchas propiedades se deducen con facilidad. La figura 0.47 muestra la circunferencia unidad $x^2 + y^2 = 1$. El ángulo $\theta$, recorrido sobre ella desde el semieje $x$ positivo hasta el punto $(x, y)$, se mide en **radianes**. La medida en radianes de $\theta$ es la longitud del arco indicado en la figura. Volviendo a la figura 0.47, definimos sen $\theta$ como la coordenada $y$ del punto de la circunferencia y cos $\theta$ como su coordenada $x$. De acuerdo con esta definición, sen $\theta$ y cos $\theta$ están definidos para todo valor de $\theta$. Esto es, $f(\theta) = \text{sen } \theta$ y $g(\theta) = \cos \theta$ tienen como dominio toda la recta real, $-\infty < \theta < \infty$. El recorrido de ambas funciones es el intervalo $[-1, 1]$.

Como la longitud de la circunferencia de radio 1 es $2\pi$, sus 360° corresponden a $2\pi$ radianes. Asimismo, 180° corresponden a $\pi$ radianes, 90° a $\pi/2$ radianes, etc. La tabla muestra la medida en grados y en radianes de algunos ángulos de uso común.

| Ángulos en grados | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° | 135° | 180° | 270° | 360° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ángulos en radianes | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |

**Nota 5.1**

Salvo mención explícita en contra, en las fórmulas los ángulos se medirán siempre en radianes.

**Teorema 5.1**
Las funciones $f(\theta) = \text{sen } \theta$ y $g(\theta) = \cos \theta$ son periódicas, con período $2\pi$.

**Demostración**

Puesto que una vuelta completa corresponde a $2\pi$ radianes, sumar $2\pi$ a cualquier ángulo nos devuelve al mismo punto $(x, y)$ de partida. Por tanto,

$$\operatorname{sen}(\theta + 2\pi) = \operatorname{sen}\theta$$

y

$$\cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta$$

para todo valor de $\theta$.

El lector está ya familiarizado con las gráficas de $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \cos x$ (figuras 0.48a y 0.48b).

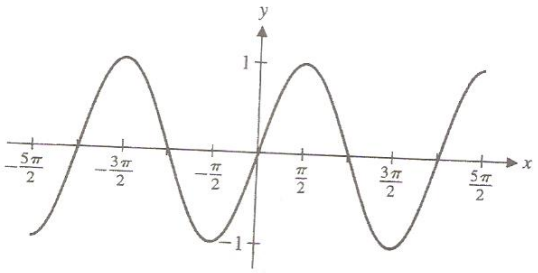



**Figura 0.48a**
$y = \operatorname{sen} x$.

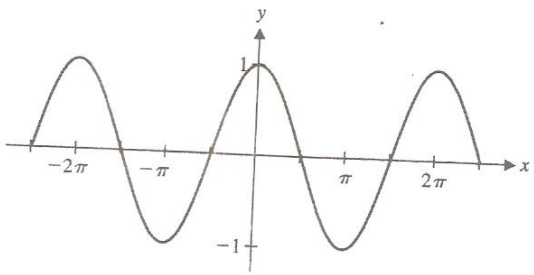



**Figura 0.48b**
$y = \cos x$.

**Nota 5.2**

En lugar de $(\operatorname{sen}\theta)^2$ o $(\cos\theta)^2$, se suele escribir, respectivamente, $\operatorname{sen}^2\theta$ y $\cos^2\theta$.

| $x$ | sen $x$ | cos $x$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ |
| $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $\frac{\pi}{2}$ | 1 | 0 |
| $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ |
| $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ |
| $\frac{5\pi}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| $\pi$ | 0 | −1 |
| $\frac{3\pi}{2}$ | −1 | 0 |
| | | |

Hacemos notar que si se desplaza un poco hacia la izquierda o hacia la derecha la gráfica de sen $x$, se obtiene la de cos $x$, lo cual se debe a la relación

$$\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x.$$

Obsérvese, además, en la figura 0.47 que el teorema de Pitágoras produce la conocida identidad

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1,$$

ya que la hipotenusa del triángulo es 1. Esa relación es válida para todo ángulo $\theta$.

La tabla adjunta muestra varios valores comunes del seno y del coseno. Algunos de ellos se desprenden directamente de la figura 0.47.

**Ejemplo 5.1** **Resolución de ecuaciones con senos y cosenos**

Resolver las ecuaciones (a) $2\operatorname{sen} x - 1 = 0$ y (b) $\cos^2 x - 3\cos x + 2 = 0$.

**Solución** (a) $2\operatorname{sen} x - 1 = 0$ si $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$. En la circunferencia unidad vemos que $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$ para $x = \frac{\pi}{6}$ o $x = \frac{5\pi}{6}$. Como sen $x$ tiene período $2\pi$, también son soluciones $\frac{\pi}{6} + 2\pi$, $\frac{5\pi}{6} + 2\pi$, $\frac{\pi}{6} + 4\pi$, etc. Una forma adecuada de expresar que se puede añadir cualquier múltiplo de $2\pi$ a cada solución consiste en escribir $\frac{\pi}{6} + 2n\pi$ o $\frac{5\pi}{6} + 2n\pi$ para todo $n$ entero.

(b) Parece más difícil que el apartado (a), pero es simplemente una ecuación cuadrática, aunque no en $x$, sino en cos $x$. Con esa idea en mente, factorizamos

$$0 = \cos^2 x - 3\cos x + 2 = (\cos x - 1)(\cos x - 2),$$

de donde se sigue que $\cos x = 1$ o $\cos x = 2$. Pero $-1 \leq \cos x \leq 1$ para todo $x$, así que $\cos x = 2$ no admite solución. Nos queda sólo $\cos x = 1$, que se cumple para $x = 0$, $2\pi$ o cualquier múltiplo entero de $2\pi$. En resumen, todas las soluciones quedan englobadas como $x = 2n\pi$ para todo $n$ entero.

A continuación definimos las cuatro funciones trigonométricas restantes.

**Definición 5.2**

La función **tangente** se define como $\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$.

La función **cotangente** se define como $\cot x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$.

La función **secante** se define como $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$.

La función **cosecante** se define como $\operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$.

Sus gráficas, con indicación de las asíntotas verticales, pueden verse en las figuras 0.49a-d.

La división por sen $x$ provoca en las funciones «co», cot $x$ y cosec $x$, asíntotas verticales en $x = 0$, $\pi$, $2\pi$, etc. (donde sen $x = 0$).

En tan $x$ y sec $x$, la división entre cos $x$ da lugar a asíntotas verticales en $\pi/2$, $3\pi/2$, $5\pi/2$, etc. (donde $\cos x = 0$). Una vez colocadas las asíntotas, las gráficas son fáciles de trazar.

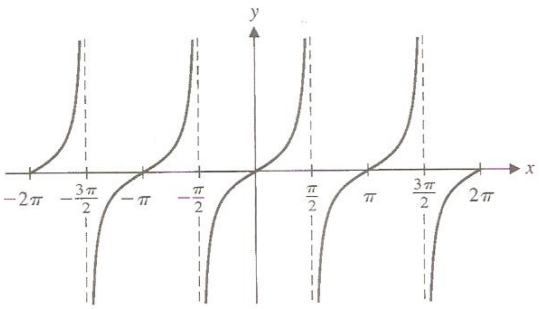



**Figura 0.49a**
$y = \tan x$.

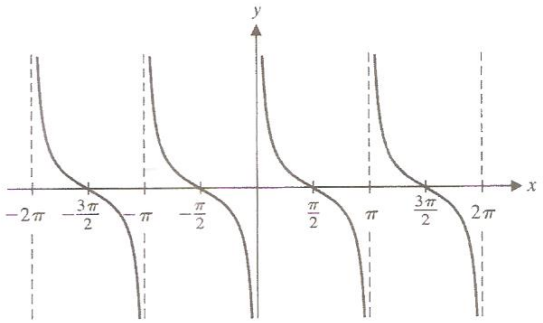



**Figura 0.49b**
$y = \cot x$.

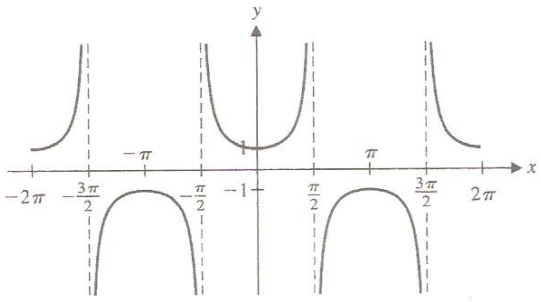



**Figura 0.49c**
$y = \sec x$.

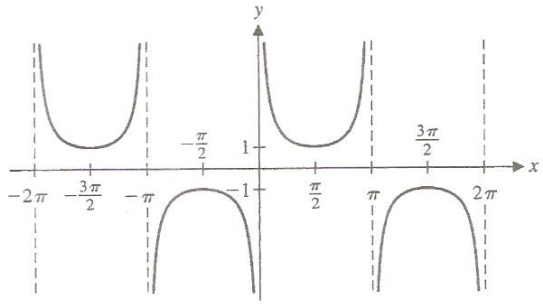



**Figura 0.49d**
$y = \operatorname{cosec} x$.

Nótese que tan $x$ y cot $x$ son periódicas con período $\pi$, mientras que sec $x$ y cosec $x$ son periódicas con período $2\pi$.

### Nota 5.3

Muchas calculadoras tienen teclas para sen $x$ y cos $x$, pero no para las otras funciones trigonométricas. Eso se debe al papel central de sen $x$ y cos $x$ en las aplicaciones. Las demás funciones se pueden calcular utilizando las relaciones

$$\cot x = \frac{1}{\tan x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

y

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}.$$

Es importante controlar cómo afectan a estas funciones ciertas modificaciones. Discutimos algunas aquí y otras en la sección 0.7.

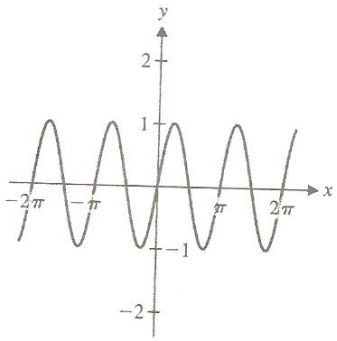



**Figura 0.50c**
$y = \operatorname{sen}(2x)$.

### Ejemplo 5.2 Alteración de la amplitud y del período

Representar $y = 2 \operatorname{sen} x$ e $y = \operatorname{sen} 2x$. Describir en qué difieren de la gráfica de sen $x$ (figura 0.50a).

**Solución** La gráfica de $y = 2 \operatorname{sen} x$ (figura 0.50b) es similar a la de $y = \operatorname{sen} x$, salvo que los valores de $y$ oscilan entre $-2$ y 2, no entre $-1$ y 1.

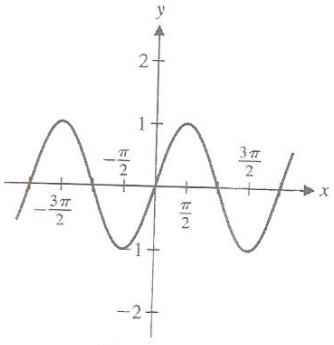



**Figura 0.50a**
$y = \operatorname{sen} x$.

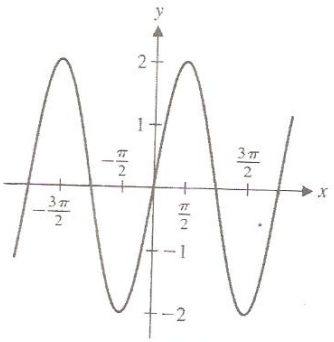



**Figura 0.50b**
$y = 2 \operatorname{sen} x$.

La gráfica de $y = \operatorname{sen} 2x$ (figura 0.50c) es también análoga a la de $y = \operatorname{sen} x$, pero tiene período $\pi$ en lugar de $2\pi$ (oscila dos veces más deprisa).

Los resultados del ejemplo 5.2 admiten generalización. Si $A > 0$, la gráfica de $y = A \operatorname{sen} x$ oscila entre $y = -A$ e $y = A$. Se dice que $A$ es la **amplitud** de la curva sinusoidal. Para cualquier constante $c > 0$, el período de $y = \operatorname{sen} cx$ es $2\pi/c$.

Análogamente, para la función $A \cos cx$ la amplitud es $A$ y el período es $2\pi/c$.

Las funciones seno y coseno sirven de modelos para las ondas de sonido. Un tono puro (una nota de flauta, digamos) es una onda de presión descrita por una función $A \operatorname{sen} ct$ (usamos la variable $t$ porque la presión del aire es función del **tiempo**). La amplitud $A$ expresa la intensidad del sonido y el período determina el tono. En este tipo de situaciones es más conveniente usar la **frecuencia** $f = c/2\pi$ que el período. A mayor frecuencia, más agudo el tono de la nota. La frecuencia es, por tanto, la inversa del período. Se mide en hercios (un hercio es igual a un ciclo por segundo).

### Ejemplo 5.3 Amplitud, período y frecuencia

Hallar la amplitud, el período y la frecuencia de (a) $f(x) = 4 \cos 3x$ y (b) $g(x) = 2 \operatorname{sen}(x/3)$.

**Solución** (a) Para $f(x)$, la amplitud es 4, el período $2\pi/3$ y la frecuencia $3/(2\pi)$. Véase figura 0.51a. (b) Para $g(x)$, la amplitud es 2, el período $2\pi/(1/3) = 6\pi$ y la frecuencia $1/(6\pi)$. Véase figura 0.51b.

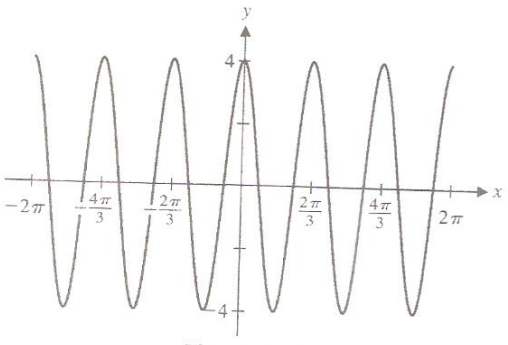



**Figura 0.51a**
$y = 4 \cos 3x$.

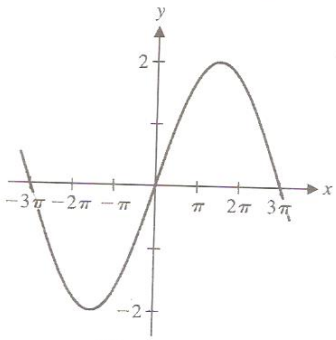



**Figura 0.51b**
$y = 2 \operatorname{sen}(x/3)$.

Como se recordará de la trigonometría de cursos anteriores, hay **identidades** muy útiles a la hora de trabajar con las funciones trigonométricas. Ya hemos citado una fundamental,

$$\text{sen}^2\,\theta + \cos^2\theta = 1$$

para todo ángulo $\theta$.

El teorema 5.2 recuerda otras identidades de interés.

---

**Teorema 5.2**

Para cualesquiera números reales $\alpha$ y $\beta$, se cumplen las identidades siguientes:

$$\text{sen}(\alpha+\beta) = \text{sen}\,\alpha\cos\beta + \text{sen}\,\beta\cos\alpha \tag{5.1}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta \tag{5.2}$$

$$\text{sen}^2\,\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha) \tag{5.3}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha) \tag{5.4}$$

---

De estas identidades se desprenden otras. Dos de ellas se deducen en el próximo ejemplo.

**Ejemplo 5.4** **Nuevas identidades trigonométricas**

Deducir las identidades $\text{sen}\,2\theta = 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta$ y $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\,\theta$.

**Solución** Se obtienen de las fórmulas (5.1) y (5.2), respectivamente, sustituyendo $\alpha = \theta$ y $\beta = \theta$. La identidad para $\cos 2\theta$ se puede obtener también restando (5.3) de (5.4).

---

Hay dos tipos de combinaciones de las funciones seno y coseno particularmente importantes en las aplicaciones. En el primero, se suman un seno y un coseno de igual período, pero de amplitudes diferentes.

**Ejemplo 5.5** **Combinaciones de senos y cosenos**

Representar $f(x) = 3\cos x + 4\,\text{sen}\,x$ y describir la gráfica resultante.

**Solución** Se obtendrá algo parecido a la figura 0.52. La gráfica tiene el aspecto de una curva seno, de período $2\pi$ y amplitud 5, desplazada 0,75 unidades hacia la izquierda. En otras palabras, parece una curva coseno desplazada 1 unidad hacia la derecha. Usando la identidad apropiada, se confirman estas impresiones.

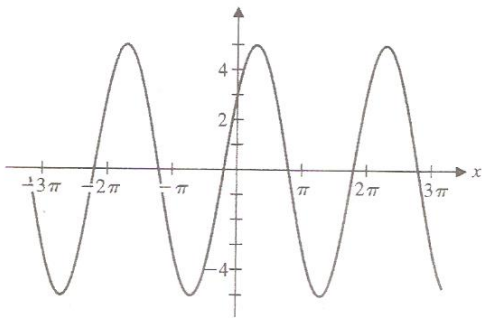



**Figura 0.52**
$y = 3\cos x + 4\,\text{sen}\,x$.

---

**Ejemplo 5.6** **Combinaciones de senos y cosenos escritas en un solo término**

Probar que $4 \operatorname{sen} x + 3 \cos x = 5 \operatorname{sen}(x + \beta)$ para algún valor de $\beta$. Estimar ese valor de $\beta$.

**Solución** Usando la ecuación (5.1), vemos que

$$\begin{aligned} 4 \operatorname{sen} x + 3 \cos x &= 5 \operatorname{sen}(x + \beta) \\ &= 5 \operatorname{sen} x \cos \beta + 5 \operatorname{sen} \beta \cos x, \end{aligned}$$

si

$$5 \cos \beta = 4 \quad \text{y} \quad 5 \operatorname{sen} \beta = 3.$$

Eso será cierto si tomamos $\beta$ tal que $\cos \beta = \dfrac{4}{5}$ y $\operatorname{sen} \beta = \dfrac{3}{5}$. Por el teorema de Pitágoras, eso es posible sólo si $\operatorname{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$. En nuestro caso,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta &= \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 \\ &= \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = \frac{25}{25} = 1, \end{aligned}$$

en efecto. Por el momento, la única forma de estimar $\beta$ es por prueba y error. Con calculadora, se obtiene $\beta \approx 0{,}6435$ radianes (aproximadamente 36,9°).

Un segundo tipo de combinación que vamos a explorar lo constituyen las sumas de funciones con períodos distintos (uno de los principios de los sintetizadores de música).

**Ejemplo 5.7** **Combinaciones de senos y cosenos de períodos distintos**

Representar (a) $f(x) = \cos 3x + \operatorname{sen} 4x$ y (b) $g(x) = \cos \pi x + \operatorname{sen} 4x$ y describir las gráficas. Si la función es periódica, hallar el período.

**Solución** (a) La figura 0.53a muestra la gráfica de $y = f(x)$, sin duda más complicada que las usuales del seno y del coseno. Pero se observa una repetición de período 6 más o menos (nótese que 6 es próximo a $2\pi$).

Para averiguar el período real, tengamos en cuenta que el período de $\cos 3x$ es $\dfrac{2\pi}{3}$ y el de $\operatorname{sen} 4x$ es $\dfrac{2\pi}{4}$. Por tanto, $\cos 3x$ se repite en $\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}, \dfrac{6\pi}{3}$, etc., mientras que $\operatorname{sen} 4x$ se repite en $\dfrac{2\pi}{4}, \dfrac{4\pi}{4}, \dfrac{6\pi}{4}, \dfrac{8\pi}{4}$, etc.

Nótese que $\dfrac{6\pi}{3}$ y $\dfrac{8\pi}{4}$ son iguales a $2\pi$. Como ambos términos se repiten cada $2\pi$, la función $f(x)$ tiene período $2\pi$.

(b) La gráfica de $g(x)$ es aún más complicada (figura 0.53b). En su ventana ($-10 \le x \le 10$, $-2 \le y \le 2$), no parece ser periódica, aunque no es demasiado diferente de la gráfica de $f(x)$. Intentemos buscar un período.

Como $\cos \pi x$ tiene período $\dfrac{2\pi}{\pi} = 2$, se repite cada 2, 4, 6, ... Y $\operatorname{sen} 4x$ se repite cada $\dfrac{2\pi}{4}, \dfrac{4\pi}{4}$. La función es periódica si, y sólo si, hay algún número común en esas dos listas. Pero como 2, 4, 6, ..., son racionales y los de la segunda lista irracionales, no pueden tener ningún número en común. Concluimos que la función no es periódica.

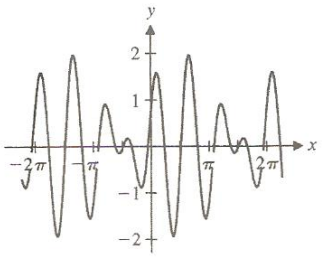



**Figura 0.53a**
$y = \cos 3x + \operatorname{sen} 4x$.

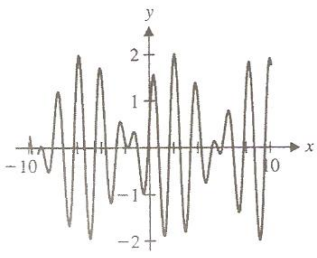



**Figura 0.53b**
$y = \cos \pi x + \operatorname{sen} 4x$.

En muchas aplicaciones hay que calcular la longitud de un lado de un triángulo rectángulo conociendo la longitud de otro lado y un ángulo agudo (o sea, un ángulo entre 0 y $\dfrac{\pi}{2}$ radianes). El próximo ejemplo enseña cómo hacerlo.

**Ejemplo 5.8** **Altura de una torre**

Una persona que dista 100 pies de la base de una torre, soporte de un depósito de agua, mide un ángulo de 60° entre sus miradas a la base y al extremo superior (figura 0.54). ¿Cuál es la altura de la torre?

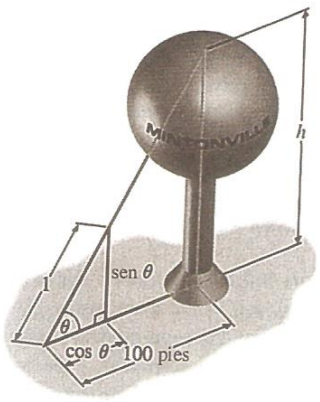



**Figura 0.54**
Altura de una torre.

**Solución** En primer lugar, pasamos 60° a radianes:

$$60° = 60\,\frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{3} \text{ radianes.}$$

Sabemos que la base del triángulo de la figura mide 100 y deseamos hallar su altura. Usando los triángulos semejantes de la figura 0.54 obtenemos

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{h}{100},$$

de modo que la altura de la torre es

$$h = 100\,\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = 100\tan\theta = 100\tan\frac{\pi}{3} = 100\sqrt{3} \approx 173 \text{ pies.}$$

# EJERCICIOS 0.5

1. Un estudiante representa $f(x) = \cos x$ en su calculadora y obtiene aparentemente una recta de altura $y = 1$ en lugar de la conocida curva del coseno. Ha utilizado una ventana $-10 \le x \le 10$, $-10 \le y \le 10$ y la calculadora en modo «grados». Explicar qué ha sucedido y cómo corregirlo.

2. Muchos estudiantes, cómodos al usar grados, no entienden por qué es preciso usar radianes. Los radianes miden distancias sobre la circunferencia unidad y las distancias son muy importantes en las aplicaciones. Además, veremos más adelante que muchas fórmulas del Cálculo son más simples en radianes que en grados. Aparte de la familiaridad, discutir las ventajas de los grados sobre los radianes. Como balance, ¿cuáles convienen más?

3. En el ejemplo 5.7 vimos que ciertas sumas de funciones periódicas son periódicas y otras no. Explicar por qué el cambio de 3 a $\pi$ en un coeficiente provoca una diferencia tan considerable.

4. Las funciones trigonométricas se pueden definir a partir de la circunferencia unidad (como hemos hecho) o de triángulos rectángulos (para ángulos entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ radianes). En las aplicaciones, estas funciones sirven como modelos de fenómenos periódicos (magnitudes que se repiten). Dado que deseamos hacer énfasis en la naturaleza periódica de esas funciones, ¿por qué es preferible la definición adoptada aquí?

**En los ejercicios 5 y 6, pasar de radianes a grados.**

5. (a) $\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{3}$ (c) $\frac{\pi}{6}$ (d) $\frac{4\pi}{3}$

6. (a) $\frac{3\pi}{5}$ (b) $\frac{\pi}{7}$ (c) 2 (d) 3

**En los ejercicios 7 y 8, pasar de grados a radianes.**

7. (a) 180° (b) 270° (c) 120° (d) 30°

8. (a) 40° (b) 80° (c) 450° (d) 390°

**En los ejercicios 9-26, dibujar la gráfica de la función.**

9. $f(x) = \operatorname{sen} 2x$
10. $f(x) = \cos 3x$
11. $f(x) = \tan 2x$
12. $f(x) = \sec 3x$
13. $f(x) = 3\cos(x - \pi/2)$
14. $f(x) = 4\cos(x + \pi)$
15. $f(x) = x \operatorname{sen} x$
16. $f(x) = \operatorname{sen} x^2$
17. $f(x) = \operatorname{sen} 2x - 2\cos 2x$
18. $f(x) = \cos 3x - \operatorname{sen} 3x$
19. $f(x) = \cos 5x + 3 \operatorname{sen} 5x$
20. $f(x) = 4\cos x - \operatorname{sen} x$
21. $f(x) = \cos x - \frac{1}{4}\cos 8x$
22. $f(x) = \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 16x$
23. $f(x) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 12x$
24. $f(x) = \operatorname{sen} x \cos 12x$
25. $f(x) = \cos 2x + \operatorname{sen} \pi x$
26. $f(x) = 2 \operatorname{sen} 3x - \cos \pi x$

**En los ejercicios 27-30, identificar el dominio y el recorrido de la función.**

27. $f(x) = \tan x$
28. $f(x) = \cot x$
29. $f(x) = \sec x$
30. $f(x) = \operatorname{cosec} x$

**En los ejercicios 31-38, identificar la amplitud, el período y la frecuencia.**

31. $f(x) = 3 \operatorname{sen} 2x$
32. $f(x) = 2\cos 3x$
33. $f(x) = 5\cos 3x$
34. $f(x) = 3 \operatorname{sen} 5x$
35. $f(x) = 3\cos(2x - \pi/2)$
36. $f(x) = 4 \operatorname{sen}(3x + \pi)$
37. $f(x) = -4 \operatorname{sen} x$
38. $f(x) = -2\cos 3x$

**En los ejercicios 39-42, demostrar la identidad trigonométrica.**

39. $\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$

40. $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$

41. $\sec^2\theta = \tan^2\theta + 1$ 42. $\operatorname{cosec}^2\theta = \cot^2\theta + 1$

43. Demostrar que para alguna constante $\beta$,
$$4\cos x - 3\operatorname{sen} x = 5\cos(x + \beta).$$
A continuación, estimar el valor de $\beta$.

44. Demostrar que para alguna constante $\beta$,
$$2\operatorname{sen} x + \cos x = \sqrt{5}\operatorname{sen}(x + \beta).$$
A continuación, estimar el valor de $\beta$.

**En los ejercicios 45-48, averiguar si la función es periódica. Si lo es, hallar su período fundamental (el mínimo).**

45. $f(x) = \cos 2x + 3\operatorname{sen}\pi x$ 46. $f(x) = \operatorname{sen} x - \cos\sqrt{2}x$

47. $f(x) = \operatorname{sen} 2x - \cos 5x$ 48. $f(x) = \cos 3x - \operatorname{sen} 7x$

**En los ejercicios 49-56, hallar todas las soluciones de la ecuación propuesta.**

49. $2\cos x - 1 = 0$ 50. $2\operatorname{sen} x + 1 = 0$

51. $\cos^2 x + \cos x = 0$ 52. $\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x = 0$

53. $\operatorname{sen}^2 x - 4\operatorname{sen} x + 3 = 0$ 54. $\operatorname{sen}^2 x - 2\operatorname{sen} x - 3 = 0$

55. $\operatorname{sen}^2 x + \cos x - 1 = 0$ 56. $\operatorname{sen} 2x - \cos x = 0$

**En los ejercicios 57-60, usar el rango de $\theta$ para determinar el valor de la función que se indica.**

57. $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{3}$, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, hallar $\cos\theta$.

58. $\cos\theta = \frac{4}{5}$, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, hallar $\operatorname{sen}\theta$.

59. $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}$, $\frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$, hallar $\cos\theta$.

60. $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}$, $\frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$, hallar $\operatorname{tg}\theta$.

**En los ejercicios 61-68, hallar, con ayuda de calculadora, el número de soluciones de cada ecuación y estimar las soluciones (en radianes).**

61. $2\cos x = 2 - x$ 62. $3\operatorname{sen} x = x$

63. $\cos x = x^2 - 2$ 64. $\operatorname{sen} x = x^2$

65. $\operatorname{sen} x - x^3 + 1 = 0$ 66. $x^4 - \cos x = 0$

67. $x^3 - x\operatorname{sen} x = 0$ 68. $x^2 - x\cos x = 0$

69. Una persona, distante 2 millas del punto de lanzamiento de un cohete, mide un ángulo, respecto de la horizontal, de 20° al mirar a su punto más alto. Estimar la altura del cohete.

70. Una persona, que mide 6 pies y dista 4 pies de la base de una farola, proyecta una sombra de 2 pies de longitud. ¿A qué altura está la bombilla de la farola?

71. En un circuito eléctrico el voltaje es $v(t) = v_p \operatorname{sen} 2\pi f t$, donde $v_p$ es el pico de voltaje y $f$ la frecuencia (en hercios). Un voltímetro mide en realidad un promedio del voltaje (la **raíz de la media del cuadrado**), igual a $v_p/\sqrt{2}$. Si el voltaje tiene amplitud 170 y período $\pi/30$, hallar la frecuencia y el voltaje medido.

72. Los tocadiscos antiguos giraban a $33\frac{1}{3}$ rpm (revoluciones por minuto). ¿Cuál era el período (en minutos) de su rotación? ¿Y para un disco sencillo, que giraba a 45 rpm?

73. Las ventas de billetes en una línea aérea vienen dadas por $s(t) = 110 + 2t + 15\operatorname{sen}\left(\frac{1}{6}\pi t\right)$, con $t$ medido en meses. ¿Qué situación de la vida real podría dar lugar a ese modelo sinusoidal en la venta de billetes? Según su respuesta, ¿qué mes corresponde a $t = 0$? Despreciando fluctuaciones de temporada, ¿en qué porcentaje están aumentando las ventas anualmente?

74. Los afinadores de pianos comienzan golpeando una horquilla y después la tecla del piano. Si la horquilla y la tecla tienen frecuencia 8, el sonido combinado es $\operatorname{sen} 8t + \operatorname{sen} 8t$. Si el piano está un poco desajustado, digamos en frecuencia 8,1, el sonido resultante es $\operatorname{sen} 8t + \operatorname{sen} 8{,}1t$. Representar ambas funciones en suma y explicar cómo se podrá apreciar el pequeño desajuste de frecuencia.

75. Muchas calculadoras «representan» una desigualdad sombreando los puntos $(x, y)$ en los que se cumple. Si dispone de tal posibilidad, represente $\operatorname{sen} x < \cos y$.

76. Las calculadoras pueden ser imprecisas. Represente $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3}$ con ventana $-1 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$. Describa el comportamiento de la gráfica cerca de $x = 0$. Haga zoom en $x = 0$, con ventanas $-0{,}001 \le x \le 0{,}001$, $-0{,}0001 \le x \le 0{,}0001$, etc., hasta que el comportamiento en las proximidades de $x = 0$ aparezca diferente. No queremos intrigarle más: la gráfica inicial era correcta y las gráficas muy ampliadas son imprecisas debido a la incapacidad de la calculadora para calcular exactamente $\tan x$.

77. Intente representar en la calculadora $x(t) = \cos t$, $y(t) = \operatorname{sen} t$ (muchas calculadoras son capaces de representar ecuaciones paramétricas). La gráfica tendrá el aspecto de una elipse. Usando la definición de seno y coseno, argumentar qué debe ser una circunferencia. Ajuste la ventana de la gráfica hasta que se vea la circunferencia. (Ayuda: Ajustar la ventana de modo que el **factor de escala** entre los ejes $x$ e $y$ sea 1).

78. El físico Philip Morrison narraba en su libro y en los vídeos de su serie *The Ring of Truth* un experimento para estimar la circunferencia de la Tierra. Midió en Nebraska el ángulo de una estrella, viajó 370 millas al sur y midió en Kansas de nuevo ese ángulo. La Geometría enseña que la diferencia de ángulos, unos 5,02°, es igual al ángulo del centro de la Tierra a los dos lugares de medición. Supuesto que la Tierra fuera perfectamente esférica (no lo es) y que la longitud de la porción correspondiente a 5,02° es 370 millas, estimar la circunferencia de la Tierra.
Este experimento se basa en uno análogo de Eratóstenes, en la antigua Grecia. Los griegos de su época y los españoles contemporáneos de Colón sabían que la Tierra era redonda, aunque discrepaban sobre la longitud de su circunferencia. Colón la imaginaba con la mitad de su tamaño real, argumentando que un barco no podría sobrevivir el tiempo requerido para navegar la distancia verdadera.

## 0.6 FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Algunas bacterias se reproducen muy rápidamente, como comprueba quien sufre una herida infectada o una afección de garganta. El número de bacterias en ciertos cultivos se duplica en apenas una hora. En esta sección estudiaremos funciones que permiten modelar crecimientos tan rápidos.

Como ejemplo, supongamos una población inicial de 100 bacterias que se duplica cada hora. Sea $P(t)$ la población en el instante $t$ y pongamos el cronómetro en $t = 0$ en el instante inicial. Así, pues, $P(0) = 100$, al cabo de 1 hora $P(1) = 200$, al cabo de 2 horas $P(2) = 400$, al cabo de 3 horas $P(3) = 800$, etc.

Calculemos la población tras 10 horas (inténtelo, mucha gente encuentra dificultades en esto). Podemos calcular la población tras 4 horas, 5 horas, etc., o tomar el siguiente atajo.

$P(1)$ se halla duplicando la población inicial, $P(1) = 2 \cdot 100$. $P(2)$ se halla duplicando la población del instante $t = 1$, o sea, $P(2) = 2 \cdot 2 \cdot 100 = 2^2 \cdot 100$. Análogamente, $P(3) = 2^3 \cdot 100$. Este esquema nos lleva a

$$P(10) = 2^{10} \cdot 100 = 102.400$$

Según de qué bacterias se trate, ¡ésta es ya una población que puede causar problemas!

La pauta descubierta sugiere que la población admite como modelo la función

$$P(t) = 2^t \cdot 100$$

Diremos que $P(t)$ es una función **exponencial** porque la variable $t$ está en el exponente. Una cuestión sutil: ¿cuál es el dominio de esta función? Hasta ahora sólo hemos utilizado valores enteros de $t$. ¿Para qué otros valores de $t$ tiene sentido? Desde luego, las potencias racionales tienen sentido, por ejemplo, en $P(1/2) = 2^{1/2} \cdot 100$, donde $2^{1/2} = \sqrt{2}$. Esto nos dice que el número de bacterias al cabo de media hora es

$$P(1/2) = 2^{1/2} \cdot 100 = \sqrt{2} \cdot 100 \approx 141$$

En este contexto no se espera que la función represente el número exacto de bacterias, sino un número aproximado.

En cualquier caso, es fácil interpretar potencias fraccionarias como raíces. Así, $x^{1/2} = \sqrt{x}$, $x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$, $x^{1/4} = \sqrt[4]{x}$, etc. Además, podemos escribir

$$x^{2/3} = \sqrt[3]{x^2} = \left(\sqrt[3]{x}\right)^2,$$

$$x^{7/4} = \sqrt[4]{x^7} = \left(\sqrt[4]{x}\right)^7,$$

$$x^{3,1} = x^{31/10} = \sqrt[10]{x^{31}}$$

Ahora bien, ¿qué ocurre con las potencias irracionales? Éstas son más difíciles de definir, pero funcionan tal como uno espera. Por ejemplo, como $\pi$ está entre 3,14 y 3,15, $2^\pi$ está entre $2^{3,14}$ y $2^{3,15}$. Así, se define $2^x$ para $x$ irracionales de manera que se rellenan los huecos que dejaban en la gráfica los valores de $2^x$ para $x$ racionales.

Esto es, si $x$ es irracional tal que $a < x < b$, con $a$ y $b$ racionales, entonces $2^a < 2^x < 2^b$. Ésta es la base de la definición de las potencias irracionales. (Resolvemos la cuestión por completo en el Capítulo 6).

Si por alguna razón estuviéramos interesados en conocer la población al cabo de $\pi$ horas, podemos usar la calculadora para obtener el valor aproximado

$$P(\pi) = 2^\pi \cdot 100 \approx 882.$$

Por conveniencia, resumimos a continuación las reglas usuales de los exponentes.

## REGLAS DE LOS EXPONENTES

- Para cualquier par de enteros $m$ y $n$,

$$x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m.$$

- Para cualquier número real $p$,

$$x^{-p} = \frac{1}{x^p}.$$

- Para cualquier par de números reales $p$ y $q$,

$$(x^p)^q = x^{p \cdot q}.$$

- Para cualquier par de números reales $p$ y $q$,

$$x^p \cdot x^q = x^{p+q}.$$

En lo que sigue es preciso adquirir rapidez en la conversión entre formas exponenciales y formas de raíces.

### Ejemplo 6.1 Conversión de expresiones a forma exponencial

Traducir estas expresiones en forma exponencial: (a) $3\sqrt{x^5}$, (b) $\dfrac{5}{\sqrt[3]{x}}$, (c) $\dfrac{3x^2}{2\sqrt{x}}$ y (d) $(2^x \cdot 2^{3+x})^2$.

**Solución** (a) Mantenemos el 3 y pasamos el resto a potencias:

$$3\sqrt{x^5} = 3x^{5/2}.$$

(b) Usamos un exponente negativo para reescribir el numerador:

$$\frac{5}{\sqrt[3]{x}} = 5x^{-1/3}.$$

(c) Separamos las constantes de las variables y simplificamos:

$$\frac{3x^2}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2}\frac{x^2}{x^{1/2}} = \frac{3}{2}x^{2-1/2} = \frac{3}{2}x^{3/2}.$$

(d) Primero operamos dentro del paréntesis y después elevamos al cuadrado:

$$(2^x \cdot 2^{3+x})^2 = (2^{x+3+x})^2 = (2^{2x+3})^2 = 2^{4x+6}.$$

La función del apartado (d) se dice que es una función exponencial de **base** 2.

### Definición 6.1

Para cualquier constante $b > 0$, la función $f(x) = b^x$ se llama una **función exponencial** de **base** $b$ y **exponente** $x$.

Debe evitarse el error, demasiado frecuente, de confundir funciones algebraicas tales como $f(x) = x^3$ y $g(x) = x^{2/3}$ con funciones exponenciales. En las exponenciales, digamos $h(x) = 2^x$, la variable está en el exponente (de ahí el nombre), no en la base. El dominio de una exponencial es toda la recta real $(-\infty, \infty)$ y su recorrido es el intervalo abierto $(0, \infty)$.

Aunque se puede utilizar cualquier número real como base de una función exponencial, hay tres bases especialmente importantes.

La base 2 aparece de manera natural al analizar procesos que duplican a intervalos regulares de tiempo (como las bacterias del inicio de esta sección). Asimismo, muchas calculadoras operan con aritmética de base 2.

Nuestro sistema habitual de contar usa la base 10, por lo que esta base también es importante.

Sin embargo, cada vez se considera más útil como base el número irracional $e$. Lo mismo que $\pi$, el número $e$ hace acto de presencia en muchas aplicaciones interesantes. Definimos $e$ como

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \tag{6.1}$$

La ecuación (6.1) plantea dos dificultades serias. En primer lugar, hasta el capítulo 1 no definiremos con rigor qué significa la notación $\lim_{n\to\infty}$. Y en segundo lugar, no está claro por qué hay que definir un número de forma tan extraña. No estaremos en condiciones de responder a la segunda cuestión hasta el Capítulo 6 (pero la respuesta merecerá tan larga espera).

Por el momento, baste decir que (6.1) significa que $e$ puede ser aproximado calculando valores de $(1 + 1/n)^n$ para $n$ grandes. A mayor $n$, mejor aproximación de $e$. En particular, la secuencia $(1 + 1/2)^2$, $(1 + 1/3)^3$, $(1 + 1/4)^4$, etc., se va acercando al valor real de $e$ (denotado así en honor del célebre matemático Leonhard Euler).

Para tener una idea del valor de $e$, calculemos algunos valores de esa secuencia:

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2{,}25,$$

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = 2{,}37037\ldots,$$

$$\left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10} = 2{,}5937\ldots,$$

$$\left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} = 2{,}7048\ldots,$$

$$\left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1000} = 2{,}7169\ldots,$$

$$\left(1 + \frac{1}{10.000}\right)^{10.000} = 2{,}7181\ldots$$

Calculando suficientes de ellos, se comprueba que ($e \approx 2{,}718281828459\ldots$), con todos los dígitos correctos.

**Ejemplo 6.2** **Evaluación de exponenciales**

Aproximar $e^4$, $e^{-1/5}$ y $e^0$.

**Solución** La calculadora da

$$e^4 = e \cdot e \cdot e \cdot e \approx 54{,}598.$$

Aplicando las reglas de los exponentes,

$$e^{-1/5} = \frac{1}{e^{1/5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{e}} \approx 0{,}81873.$$

(En una calculadora conviene sustituir $-1/5$ por $-0{,}2$). Finalmente, $e^0 = 1$.

Las gráficas de las funciones exponenciales resumen muchas de sus propiedades más importantes.

**Ejemplo 6.3** **Gráficas de exponenciales**

Esbozar las gráficas de las funciones exponenciales $y = 2^x$, $y = e^x$, $y = e^{2x}$, $y = e^{x/2}$, $y = (1/2)^x$ e $y = e^{-x}$.

**Solución** Usando calculadora o un PCS se obtendrán gráficas como éstas.

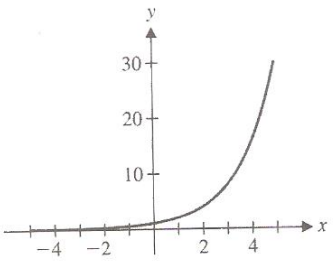



**Figura 0.55a**
$y = 2^x$.

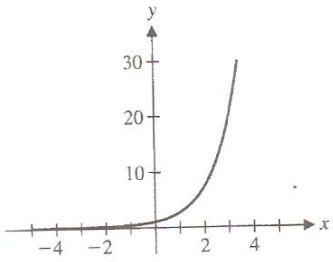



**Figura 0.55b**
$y = e^x$.

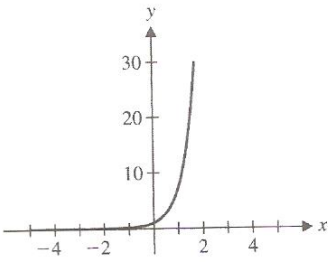



**Figura 0.56a**
$y = e^{2x}$.

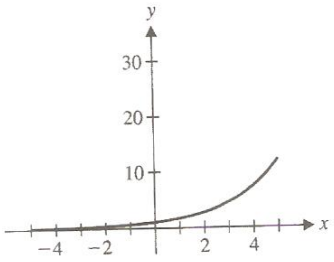



**Figura 0.56b**
$y = e^{x/2}$.

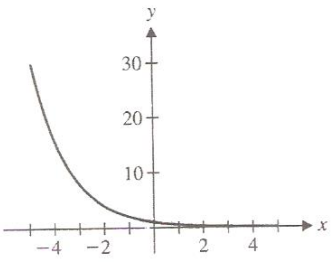



**Figura 0.57a**
$y = (1/2)^x$.

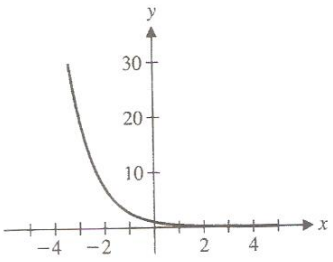



**Figura 0.57b**
$y = e^{-x}$.

Las cuatro primeras parten muy cerca del eje $x$ (vistas de izquierda a derecha), pasan por el punto (0, 1) y suben rápidamente. Eso ocurre para todas las exponenciales con base $b > 1$ y coeficiente positivo en el exponente. Cuanto mayor es la base ($e > 2$) o mayor el coeficiente del exponente ($2 > 1 > 1/2$), más deprisa sube la gráfica por la derecha (y desciende por la izquierda).

Las gráficas de las figuras 0.57a y 0.57b se obtienen reflejando en el eje $y$ las figuras 0.55a y 0.55b. Suben por la izquierda y caen hacia el eje $x$ por la derecha. Conviene señalar que, por las reglas de los exponentes, $(1/2)^x = 2^{-x}$ y $(1/e)^x = e^{-x}$.

Las funciones exponenciales guardan una estrecha relación con otra familia de funciones, las denominadas **funciones logaritmo** (o logarítmicas).

**Definición 6.2**
Para cualquier número positivo $b \neq 1$, la función **logaritmo** con base $b$, denotada $\log_b x$, se define como

$$y = \log_b x \text{ si, y sólo si, } x = b^y.$$

Es decir, el logaritmo $\log_b x$ es simplemente el exponente al que debemos elevar la base $b$ para obtener el valor $x$. Por ejemplo,

$$\log_{10} 10 = 1 \text{ (porque } 10^1 = 10),$$
$$\log_{10} 100 = 2 \text{ (porque } 10^2 = 100),$$
$$\log_{10} 1000 = 3 \text{ (porque } 10^3 = 1000),$$

El valor de $\log_{10} 45$ es menos evidente que los tres precedentes, pero la idea es la misma: encontrar el número $y$ tal que $10^y = 45$. La respuesta está entre 1 y 2 (¿por qué?), pero para precisar más habría que proceder por prueba y error. (Obviamente, la calculadora nos da un valor aproximado, pero eso no ayuda a entender qué son los logaritmos). Obtendríamos $\log_{10} 45 \approx 1{,}6532$. Más adelante introduciremos un método potente para aproximar los valores de estas funciones.

Nótese en la definición 6.2 que para cualquier base $b > 0$ ($b \neq 1$), si $y = \log_b x$, entonces $x = b^y > 0$. Esto es, el dominio de $f(x) = \log_b x$ es el intervalo $(0, \infty)$. Y su rango es toda la recta real $(-\infty, \infty)$.

Igual que para las exponenciales, las bases más importantes aquí son 2, 10 y $e$. Se suele abreviar $\log_{10} x$ por $\log x$ y también $\log_e x$ por $\ln x$ (por **logaritmos naturales**). No se entiende por qué se consideran *naturales* los logaritmos con una base irracional (después de todo, más «naturales» parecerían ser los $\log_{10} x$), pero quedará claro en el Capítulo 6.

**Ejemplo 6.4** **Cálculo de logaritmos**

Sin usar calculadora, hallar $\log(1/10)$, $\log(0{,}001)$, $\ln e$ y $\ln e^3$.

**Solución** Como $1/10 = 10^{-1}$, $\log(1/10) = -1$. Análogamente, de $0{,}001 = 10^{-3}$ se sigue que $\log(0{,}001) = -3$. Y como $\ln e = \log_e e^1$, $\ln e = 1$. Análogamente, $\ln e^3 = 3$.

La definición 6.2 tiene como consecuencia que

$$\boxed{e^{\ln x} = x \text{ para todo } x > 0.} \qquad (6.2)$$

Para demostrarlo, hagamos

$$y = \ln x = \log_e x.$$

Por la definición 6.2,

$$x = e^y = e^{\ln x}.$$

Gracias a esa relación entre logaritmos naturales y exponenciales, podemos resolver ecuaciones en las que entran en juego logaritmos, como en el ejemplo próximo.

**Ejemplo 6.5** **Resolución de una ecuación logarítmica**

Resolver la ecuación $\ln(x + 5) = 3$ para $x$.

**Solución** Tomando exponenciales de ambos lados de la ecuación, leída hacia atrás por conveniencia, resulta

$$e^3 = e^{\ln(x+5)} = x + 5,$$

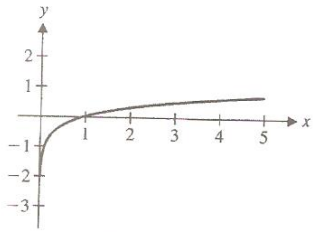



**Figura 0.58a**
$y = \log x$.

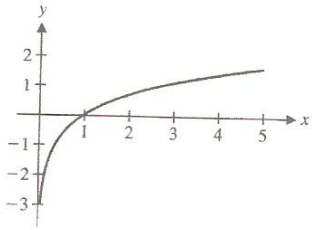



**Figura 0.58b**
$y = \ln x$.

por (6.2). Restando 5 de ambos miembros, obtenemos

$$e^3 - 5 = x.$$

Como siempre, las gráficas proporcionan un excelente resumen visual de las propiedades de una función.

### Ejemplo 6.6 Gráficas de logaritmos

Esbozar las gráficas de $y = \log x$ e $y = \ln x$. Discutir brevemente sus propiedades.

**Solución** En una calculadora obtenemos gráficas como las de las figuras 0.58a y 0.58b. Las dos parecen tener una asíntota vertical en $x = 0$ (¿por qué era de esperar?), cruzan el eje $x$ en $x = 1$ y después crecen lentamente. No tienen puntos a la izquierda del eje $y$ porque $\log x$ y $\ln x$ están definidas sólo para $x > 0$. Las dos gráficas son muy parecidas, aunque no idénticas.

Las propiedades descritas gráficamente en el ejemplo se resumen en el siguiente teorema.

### Teorema 6.1

Para cualquier base positiva $b \neq 1$,

(i) $\log_b x$ está definida sólo para $x > 0$

(ii) $\log_b 1 = 0$

(iii) si $b > 1$, $\log_b x < 0$ para $0 < x < 1$ y $\log_b x > 0$ para $x > 1$.

### Demostración

(i) Como $b > 0$, es $b^y > 0$ para todo $y$. Así, pues, si $\log_b x = y$, entonces $x = b^y > 0$.

(ii) De $b^0 = 1$ para todo $b \neq 0$ se sigue que $\log_b 1 = 0$ (es decir, el exponente al que hay que elevar $b$ para obtener 1 es 0).

(iii) Lo dejamos como ejercicio al lector.

Todas las funciones logaritmo comparten varias propiedades características que resumimos a continuación.

### Teorema 6.2

Dados cualquier base positiva $b \neq 1$ y cualquier par de números positivos $x$ e $y$,

(i) $\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$,

(ii) $\log_b(x/y) = \log_b x - \log_b y$,

(iii) $\log_b(x^r) = y \log_b x$.

Como tantas otras reglas algebraicas, estas propiedades simplifican drásticamente muchos cálculos.

### Ejemplo 6.7 Simplificación de expresiones logarítmicas

Escribir cada expresión con un único logaritmo: (a) $\log_2 27^x - \log_2 3^x$ y (b) $\ln 8 - 3 \ln (1/2)$.

**Solución** Hay varias ordenaciones distintas de los pasos en la resolución de cada caso.

(a) Puesto que $27 = 3^3$ y $27^x = (3^3)^x = 3^{3x}$. En consecuencia,

$$\begin{aligned}\log_2 27^x - \log_2 3^x &= \log_2 3^{3x} - \log_2 3^x \\ &= 3x \log_2 3 - x \log_2 3 = 2x \log_2 3 = \log_2 3^{2x}.\end{aligned}$$

(b) Ahora se tiene $8 = 2^3$ y $1/2 = 2^{-1}$. Entonces,

$$\begin{aligned}\ln 8 - 3 \ln (1/2) &= 3 \ln 2 - 3(-\ln 2) \\ &= 3 \ln 2 + 3 \ln 2 = 6 \ln 2 = \ln 2^6 = \ln 64.\end{aligned}$$

Según el teorema 6.2 y la definición de los logaritmos naturales, para todo número real $x$ es

$$\boxed{\ln(e^x) = x \ln e = x.} \tag{6.3}$$

Esta relación entre exponenciales y logaritmos permite resolver ecuaciones en las que aparecen exponenciales, como en el ejemplo siguiente.

### Ejemplo 6.8 Resolución de una ecuación exponencial

Resolver la ecuación $e^{x+4} = 7$.

**Solución** Tomando logaritmos naturales de ambos lados y leyendo hacia atrás por conveniencia, de (6.3) se deduce que

$$\ln 7 = \ln(e^{x+4}) = x + 4.$$

Restando 4 de los dos miembros, queda

$$\ln 7 - 4 = x.$$

Usando las reglas de exponentes y logaritmos, podemos reexpresar cualquier exponencial como una exponencial de base $e$ como sigue. Para toda base $a > 0$,

$$\boxed{a^x = e^{\ln(a^x)} = e^{x \ln a}.} \tag{6.4}$$

Esto se desprende del teorema 6.2 (iii) y del hecho de ser $e^{\ln y} = y$ para todo $y > 0$.

### Ejemplo 6.9 Exponenciales reescritas en base $e$

Reescribir las exponenciales $2^x$, $5^x$ y $(2/5)^x$ como exponenciales de base $e$.

**Solución** De acuerdo con (6.4),

$$2^x = e^{\ln(2^x)} = e^{x \ln 2},$$
$$5^x = e^{\ln(5^x)} = e^{x \ln 5},$$

y

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x = e^{\ln[(2/5)^x]} = e^{x \ln(2/5)}.$$

### Ejemplo 6.10 Simplificación de expresiones logarítmicas

Usar las reglas de los logaritmos para simplificar la expresión $5 \ln x + 3 \ln y - 4 \ln z$.

**Solución** Por el teorema 6.2,

$$5 \ln x + 3 \ln y - 4 \ln z = \ln(x^5) + \ln(y^3) - \ln(z^4) = \ln\left(\frac{x^5 y^3}{z^4}\right).$$

En ciertas circunstancias conviene utilizar las reglas de los logaritmos con el fin de desarrollar una expresión dada, como en el siguiente ejemplo.

### Ejemplo 6.11 Desarrollo de una expresión logarítmica

Desarrollar $\ln\left(\dfrac{x^3 y^4}{z^5}\right)$ usando las reglas de los logaritmos.

**Solución** Por el teorema 6.2,

$$\ln\left(\frac{x^3y^4}{z^5}\right) = \ln(x^3y^4) - \ln(z^5) = \ln(x^3) + \ln(y^4) - \ln(z^5)$$
$$= 3\ln x + 4\ln y - 5\ln z.$$

La relación entre logaritmos naturales y exponenciales nos ha permitido reescribir una exponencial de base arbitraria en base $e$. Pues bien, también sirve para reexpresar cualquier logaritmo en términos de logaritmos naturales, como sigue.

Para cualquier base positiva $b$ ($b \neq 1$), probaremos que

$$\boxed{\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}.} \tag{6.5}$$

Sea $y = \log_b x$. Entonces, por la definición 6.2, es $x = b^y$. Tomando el logaritmo natural de ambos lados de esa ecuación, obtenemos por el teorema 6.2 (iii)

$$\ln x = \ln(b^y) = y \ln b.$$

Dividiendo ambos lados entre $\ln b$ (como $b \neq 1$, $\ln b \neq 0$), vemos que

$$y = \frac{\ln x}{\ln b},$$

lo cual demuestra (6.5).

La fórmula (6.5) permite calcular logaritmos en bases distintas de $e$ y 10. Casi con toda seguridad, su calculadora de mano sólo tiene teclas para $\ln x$ y para $\log x$. El ejemplo que sigue ilustra esa aplicación.

### Ejemplo 6.12 Aproximación del valor de un logaritmo

Aproximar el valor de $\log_7 12$.

**Solución** Aplicando (6.5) se obtiene

$$\log_7 12 = \frac{\ln 12}{\ln 7} \approx 1{,}2769894.$$

### Ejemplo 6.13 Ajuste de datos mediante una curva exponencial

Hallar una función exponencial de la forma $f(x) = ae^{bx}$ que pase por los puntos (0, 5) y (3, 9).

**Solución** No se puede resolver este problema por simple inspección. Es decir, a simple vista no se sabe cuáles deben ser los valores de $a$ y $b$. Tenemos que hallar $a$ y $b$ usando las propiedades de logaritmos y exponenciales. En primer lugar, que la gráfica pase por (0, 5) significa que

$$5 = f(0) = ae^{b\cdot 0} = a,$$

luego $a = 5$. Además, para que pase por (3, 9) ha de ser

$$9 = f(3) = ae^{3b} = 5e^{3b}.$$

Con el fin de despejar $b$ en el exponente, dividimos la ecuación entre 5 y tomamos logaritmos naturales de ambos miembros, lo que lleva, por (6.3), a

$$\ln\left(\frac{9}{5}\right) = \ln e^{3b} = 3b.$$

Finalmente, dividiendo entre 3 obtenemos el valor de $b$:

$$b = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{9}{5}\right).$$

Así, pues, $f(x) = 5e^{1/3\ln(9/5)\,x}$.

Históricamente, los logaritmos fueron útiles para manejar grandes números. La aparición de las calculadoras ha desplazado ese interés a situaciones puntuales (véanse los ejercicios sobre decibelios y la escala Richter). En la actualidad, los logaritmos sirven para otros propósitos, incluyendo las manipulaciones con funciones exponenciales.

## Ajuste de una curva a datos experimentales

| Año | Población EE.UU. |
|---|---|
| 1790 | 3.929.214 |
| 1800 | 5.308.483 |
| 1810 | 7.239.881 |
| 1820 | 9.638.453 |
| 1830 | 12.866.020 |
| 1840 | 17.069.453 |
| 1850 | 23.191.876 |
| 1860 | 31.443.321 |

La tabla adjunta recoge los datos de población de Estados Unidos entre 1790 y 1860. En la figura 0.59 se han marcado los puntos correspondientes. La población ha ido creciendo con incrementos cada vez mayores, década tras década. Si traza una curva imaginaria por esos puntos la verá parecida a una parábola o tal vez a la mitad derecha de una cúbica o de una exponencial. Esa es la cuestión: esos datos ¿se ajustan mejor a una función cuadrática, cúbica, cuártica, exponencial o a cuál otra?

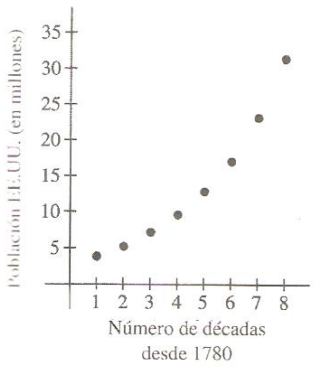



**Figura 0.59**
Población EE.UU. 1790-1860.

Las propiedades expuestas en el teorema 6.2 permiten decidir si es mejor un ajuste polinómico o uno exponencial. Supongamos que los datos provienen de una exponencial, digamos $y = ae^{bx}$ (es decir, los datos están en la gráfica de una exponencial). En tal caso,

$$\ln y = \ln(ae^{bx}) = \ln a + \ln e^{bx} = \ln a + bx.$$

Si dibujamos una nueva gráfica con los valores de $x$ en el eje horizontal y los de $\ln y$ en el vertical (lo que se llama una **gráfica semi-log**), la gráfica será la recta $\ln y = bx + c$ (donde $c = \ln a$). Si, por el contrario, los datos procedieran de un polinomio, digamos $y = bx^n$ (para algún $n$), sería

$$\ln y = \ln(bx^n) = \ln b + \ln x^n = \ln b + n \ln x.$$

En este caso, una gráfica semi-log daría la gráfica de un logaritmo, $\ln y = n \ln x + c$. Así, pues, la gráfica semi-log distingue entre la exponencial, que aparece como una recta, y los polinomios (de grado $\geq 1$), que aparecen como curvas logarítmicas.

Los científicos y los ingenieros utilizan gráficas semi-log para entender mejor los fenómenos físicos a partir de colecciones de datos experimentales.

### Ejemplo 6.14 Uso de una gráfica semi-log para identificar un tipo de funciones

Analizar si la población de Estados Unidos estaba creciendo en forma exponencial o polinómica.

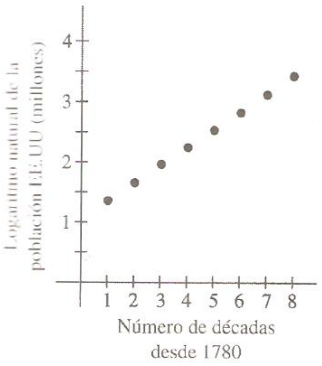



**Figura 0.60**
Gráfica semi-log de la población EE.UU.

**Solución** Como hemos dicho, el truco consiste en dibujar una gráfica semi-log. Es decir, en vez de marcar (1, 3,9) como primer punto, marcamos (1, ln 3,9) y así con todos, hasta obtener la gráfica semi-log de la figura 0.60. Aunque los puntos no son exactamente colineales (¿cómo se probaría eso?), la gráfica es casi una recta con intersección vertical 1 y pendiente 0,35. Debemos concluir que la población se ajusta a un modelo exponencial.

(Téngase en cuenta, en este y en otros problemas realistas, que los datos experimentales no son exactos, de modo que los puntos de la gráfica semi-log no tienen por qué ser perfectamente colineales para deducir que el modelo adecuado es exponencial).

El modelo exponencial sería $y = P(t) = ae^{bt}$, donde $t$ denota el número de décadas desde 1780. Aquí, $b$ es la pendiente y $\ln a$ es la intersección con el eje $\ln y$ vertical. Es decir, $b = 0{,}35$ y $\ln a = 1$ (¿por qué?), de modo que $a = e$. La población, por tanto, admite el modelo

$$P(t) = e \cdot e^{0{,}35t} \text{ millones.}$$

# EJERCICIOS 0.6

1. A partir de una única célula, el ser humano se desarrolla en 50 generaciones de división celular. Explicar por qué tras $n$ divisiones hay $2^n$ células. Estimar cuántas células hay tras 50 divisiones y, a continuación, calcular $2^{50}$. Comentar la rapidez con la que crecen las funciones exponenciales.

2. Explicar por qué las gráficas de $f(x) = 2^{-x}$ y $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ son idénticas.

3. Comparar $f(x) = x^2$ y $g(x) = 2^x$ para $x = \frac{1}{2}$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ y $x = 4$. En general, ¿qué función es mayor para valores grandes de $x$? ¿Y para valores pequeños de $x$?

4. Comparar $f(x) = 2^x$ y $g(x) = 3^x$ para $x = -2$, $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2}$ y $x = 2$. En general, ¿qué función es mayor para valores negativos de $x$? ¿Y para valores positivos de $x$?

**En los ejercicios 5-12, pasar cada expresión exponencial a forma de fracción o de raíz.**

5. $2^{-3}$ 6. $4^{-2}$ 7. $3^{1/2}$ 8. $7^{1/3}$

9. $5^{2/3}$ 10. $6^{2/5}$ 11. $4^{-2/3}$ 12. $6^{-1/3}$

**En los ejercicios 13-20, pasar cada expresión a forma exponencial.**

13. $\frac{1}{x^2}$ 14. $\frac{1}{x^4}$ 15. $\sqrt{x}$ 16. $\sqrt[3]{x^2}$

17. $\frac{2}{x^3}$ 18. $\frac{4}{x^2}$ 19. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ 20. $\frac{3}{2\sqrt{x^3}}$

**En los ejercicios 21-24, hallar el valor entero de la expresión dada sin usar calculadora.**

21. $4^{3/2}$ 22. $8^{2/3}$ 23. $\frac{\sqrt{8}}{2^{1/2}}$ 24. $\frac{2}{(1/3)^2}$

**En los ejercicios 25-32, estimar cada valor con calculadora.**

25. $e^2$ 26. $3e$ 27. $2e^{-1/2}$ 28. $4e^{-2/3}$

29. $\frac{12}{e}$ 30. $\frac{14}{\sqrt{e}}$ 31. $10e^{-0.01}$ 32. $10e^{-0.001}$

**En los ejercicios 33-50, esbozar la gráfica de la función dada.**

33. $f(x) = e^{2x}$ 34. $f(x) = e^{3x}$

35. $f(x) = 2e^{x/4}$ 36. $f(x) = 3e^{x/6}$

37. $f(x) = 3e^{-2x}$ 38. $f(x) = 10e^{-x/3}$

39. $f(x) = e^{-x^2}$ 40. $f(x) = e^{-x^3}$

41. $f(x) = xe^{-2x}$ 42. $f(x) = x^2e^{-2x}$

43. $f(x) = \ln 2x$ 44. $f(x) = \ln 3x$

45. $f(x) = \ln x^2$ 46. $f(x) = \ln x^3$

47. $f(x) = e^{2 \ln x}$ 48. $f(x) = e^{-\ln x}$

49. $f(x) = e^{-x/4} \operatorname{sen} x$ 50. $f(x) = e^{-x/6} \cos x$

**En los ejercicios 51-60, resolver la ecuación propuesta.**

51. $e^{2x} = 2$ 52. $e^{4x} = 3$

53. $2e^{-2x} = 1$ 54. $3e^{-x/2} = 2$

55. $\ln 2x = 4$ 56. $2 \ln 3x = 1$

57. $2 \ln 4x - 1 = 6$ 58. $3 \ln(2 - x) = 6$

59. $e^{2 \ln x} = 4$ 60. $\ln(e^{2x}) = 6$

**En los ejercicios 61 y 62, calcular el valor utilizando la definición de logaritmo.**

61. (a) $\log_3 9$ (b) $\log_4 64$ (c) $\log_3 \frac{1}{27}$

62. (a) $\log_4 \frac{1}{16}$ (b) $\log_4 2$ (c) $\log_9 3$

**En los ejercicios 63 y 64, aproximar el valor usando (6.5).**

63. (a) $\log_3 7$ (b) $\log_4 60$ (c) $\log_3 \frac{1}{24}$

64. (a) $\log_4 \frac{1}{10}$ (b) $\log_4 3$ (c) $\log_9 8$

**En los ejercicios 65-70, reescribir la expresión con un solo logaritmo.**

65. $\ln 3 - \ln 4$ 66. $2 \ln 4 - \ln 3$

67. $\frac{1}{2} \ln 4 - \ln 2$ 68. $3 \ln 2 - \ln \frac{1}{2}$

69. $\ln \frac{3}{4} + 4 \ln 2$ 70. $\ln 9 - 2 \ln 3$

**En los ejercicios 71-76, hallar una función del tipo $f(x) = ae^{bx}$ con los valores que se especifican.**

71. $f(0) = 2$, $f(2) = 6$ 72. $f(0) = 3$, $f(3) = 4$

73. $f(0) = 4$, $f(2) = 2$ 74. $f(0) = 5$, $f(1) = 2$

75. $f(0) = -2$, $f(1) = -3$ 76. $f(1) = 2$, $f(2) = 4$

77. Con cada consumición, un restaurante de comida rápida da al cliente un vale con el que tiene una probabilidad del 10% de conseguir un regalo. Si un cliente va 10 veces, estimar la probabilidad de que gane al menos un regalo. La probabilidad exacta es $1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{10}$. Calcular este número y compararlo con la estimación previa.

78. Si en el ejercicio 77 se tuvieran 20 vales con probabilidad 5% de obsequio en cada uno, la probabilidad de ganar ¿sería mayor o menor? Calcular la probabilidad $1 - \left(\frac{19}{20}\right)^{20}$ para contestar.

79. En general, si se tienen $n$ oportunidades con una probabilidad $1/n$ en cada una, la probabilidad de ganar al menos un obsequio es $1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$. Para $n$ muy grande, ¿a qué número tiende esa probabilidad? (Ayuda: Hay una poderosa razón para incluir este ejercicio en esta sección).

80. Si $y = a \cdot x^m$, probar que $\ln y = \ln a + m \ln x$. Si $v = \ln y$, $u = \ln x$ y $b = \ln a$, demostrar que $v = mu + b$. Explicar por qué la gráfica de $v$ como función de $u$ tiene que ser una recta. Esta gráfica se llama la **gráfica log-log** de $y$, $x$.

81. Con los datos adjuntos, calcular $v = \ln y$ y $u = \ln x$ y representar los puntos $(u, v)$. Hallar constantes $m$ y $b$ tales que $v = mu + b$. Usar los resultados del ejercicio 80 para encontrar una constante $a$ de modo que $y = a \cdot x^m$.

| $x$ | 2,2 | 2,4 | 2,6 | 2,8 | 3,0 | 3,2 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 14,52 | 17,28 | 20,28 | 23,52 | 27,0 | 30,72 |

82. Repetir el ejercicio 81 con los datos siguientes.

| $x$ | 2,8 | 3,0 | 3,2 | 3,4 | 3,6 | 3,8 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 9,37 | 10,39 | 11,45 | 12,54 | 13,66 | 14,81 |

83. Elaborar una gráfica log-log (ejercicio 80) con los datos de la población de Estados Unidos del ejemplo 6.14. Comparada con la gráfica semi-log de la figura 0.60, ¿parece lineal la log-log? Habida cuenta de la respuesta, ¿la población admite como modelo más adecuado una exponencial o un polinomio (una potencia)?

84. Hacer una gráfica semi-log para los datos del ejercicio 81. Comparada con la log-log ya construida, ¿tiene aspecto lineal esta gráfica? A la vista de la respuesta, ¿es mejor un modelo exponencial o una potencia?

85. La concentración $[H^+]$ de iones de hidrógeno libres en una solución química determina su pH, definido como $pH = -\log[H^+]$. Hallar $[H^+]$ si el pH es (a) 7, (b) 8, (c) 9. En cada incremento del pH en 1, ¿en qué factor cambia $[H^+]$?

86. El jugo gástrico se considera un ácido, con un pH aproximado de 2,5, y la sangre alcalina, con un pH aproximado de 7,5. Comparar la concentración de iones de hidrógeno en las dos sustancias (véase ejercicio 85).

87. La magnitud $M$ de un terremoto en la escala de Richter se define en términos de la energía $E$ (julios) liberada, como $\log_{10} E = 4{,}4 + 1{,}5\,M$. Calcular la energía de terremotos con magnitudes (a) 4, (b) 5, (c) 6. Cuando $M$ crece una unidad, ¿en qué factor crece $E$?

88. Quienes no conviven con terremotos frecuentes se sorprenden al saber que uno de magnitud 6 es mucho más fuerte que otro de magnitud 3. Comparar la energía liberada en uno y otro.

89. El nivel de ruido en decibelios se define en términos de la intensidad $I$ del ruido, con $dB = 10 \log_{10}(I/I_0)$. Aquí $I_0 = 10^{-12}$ W/m$^2$ es la intensidad umbral de sonido audible. Calcular la intensidad de sonidos con (a) dB = 80, (b) dB = 90, (c) dB = 100. A cada incremento de 10 decibelios, ¿en qué factor cambia $I$?

90. En un partido de baloncesto se miden niveles de ruido entre 60 y 110 dB. ¿Cuántas veces más fuerte es el de 110 dB que el de 60 (véase ejercicio 89)?

91. Representar $y = xe^{-x}$, $y = xe^{-2x}$, $y = xe^{-3x}$, etc. Estimar la localización de sus máximos. Enunciar una regla general para el máximo de $y = xe^{-kx}$.

92. Si el terreno próximo al hoyo no es plano, los golfistas deben estimar cuánto se curvará la trayectoria de la bola. Supongamos que el golfista está en el punto (–13, 0), el hoyo en (0, 0) y la trayectoria de la bola es, para $-13 \le x \le 0$, $y = -1{,}672x + 72 \ln(1 + 0{,}02x)$. Probar que la bola va al agujero y estimar el punto del eje $y$ al que apuntó el jugador.

93. Intente hallar en una calculadora $(-8)^{2/3}$. Si no obtiene 4, intente $[(-8)^2]^{1/3}$. Probar que, teóricamente, $(-8)^{2/3} = [(-8)^2]^{1/3}$. Para entender por qué la calculadora distingue entre esas dos cantidades, explicar por qué $(-8)^{2/4} \neq [(-8)^2]^{1/4}$. Investigar por qué algunas calculadoras responden que $(-8)^{2/3}$ no existe.

94. (a) Representar $y = x^2$ e $y = 2^x$ y aproximar las dos soluciones positivas de $x^2 = 2^x$.
(b) Representar $y = x^3$ e $y = 3^x$ y aproximar las dos soluciones positivas de $x^3 = 3^x$.
(c) Explicar por qué $x = a$ será siempre solución de $x^a = a^x$, $a > 0$.
(d) ¿Qué diferencia hay entre $x = 2$ como solución de $x^2 = 2^x$ y $x = 3$ como solución de $x^3 = 3^x$? Para determinar el valor de $a$ en el que se produce el cambio, resuelva gráficamente $x^a = a^x$ para $a = 2{,}1, 2{,}2, \ldots, 2{,}9$ y observar que $a = 2{,}7$ y $a = 2{,}8$ se comportan de modo distinto. Siga estrechando el cerco al valor del cambio ensayando con $a = 2{,}17, 2{,}72, \ldots, 2{,}79$. Conjeture el valor exacto de $a$.

95. (a) Representar $y = \ln x$ y describir su comportamiento en el entorno de $x = 0$.
(b) Ídem con $y = x \ln x$, $y = x^2 \ln x$, $y = x^{1/2} \ln x$ e $y = x^a \ln x$ para diversos valores de $a > 0$. Como la función «explota» en $x = 0$, decimos que $y = \ln x$ tiene una **singularidad** en $x = 0$. El **orden** de la singularidad en $x = 0$ de una función $f(x)$ es el mínimo valor de $a$ tal que $y = x^a \ln x$ no tiene singularidad en $x = 0$. Determinar el orden de la singularidad en $x = 0$ de (a) $f(x) = \frac{1}{x}$, (b) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ y (c) $f(x) = \frac{1}{x^3}$. Cuanto mayor es el orden, «peor» es la singularidad. A la vista de lo anterior, ¿cómo es de «mala» la singularidad de $y = \ln x$ en $x = 0$?

## 0.7 TRANSFORMACIONES DE FUNCIONES

Ya estamos familiarizados con una extensa gama de funciones: polinómicas, racionales, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas. Muchos estudiantes esperan que las matemáticas de nivel superior consistan en definir más funciones y resolver nuevas ecuaciones. En realidad, un objetivo esencial de este curso es entender mejor esas funciones ya conocidas examinando algunas propiedades clave.

En particular, hemos de conseguir que ciertas manipulaciones con funciones resulten lo más naturales posibles. Las primeras que pasamos a definir son muy directas.

**Definición 7.1**

Sean $f$ y $g$ funciones con dominios respectivos $D_1$ y $D_2$. Las funciones $f+g$, $f-g$ y $f\cdot g$ se definen como

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),$$
$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$
$$(f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x),$$

para todo $x$ en $D_1 \cap D_2$ (es decir, $x \in D_1$ y $x \in D_2$). La función $\dfrac{f}{g}$ se define como

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)},$$

para todo $x$ en $D_1 \cap D_2$ tal que $g(x) \neq 0$.

En el siguiente ejemplo examinamos varias combinaciones de funciones simples.

**Ejemplo 7.1** **Combinación de funciones**

Si $f(x) = x - 3$ y $g(x) = \sqrt{x-1}$, hallar las funciones $f+g$, $3f-g$, $\dfrac{f}{g}$ y $g-g$, estipulando el dominio de cada una de ellas.

**Solución** Para empezar, observamos que el dominio de $f$ es toda la recta real y el de $g$ es el conjunto de todos los $x \geq 1$. Ahora,

$$(f+g)(x) = x - 3 + \sqrt{x-1}$$

y

$$(3f-g)(x) = 3(x-3) - \sqrt{x-1} = 3x - 9 - \sqrt{x-1}.$$

El dominio de $(f+g)$ y $(3f-g)$ es $\{x \mid x \geq 1\}$. Para

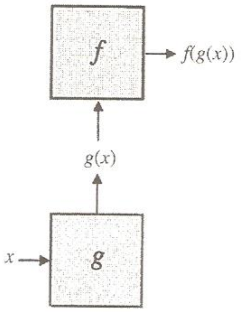
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x-3}{\sqrt{x-1}},$$

el dominio es $\{x \mid x > 1\}$, donde hemos añadido la restricción $x \neq 1$ para evitar la división por 0. Finalmente,

$$(g-g)(x) = \sqrt{x-1} - \sqrt{x-1} = 0.$$

Aunque la expresión final está definida para todo $x$, el dominio depende de los pasos intermedios. En este caso, el dominio de $(g-g)$ es $\{x \mid x \geq 1\}$. (Esto puede parecer estúpido, pero tendrá importantes consecuencias más tarde).

La definición 7.1 y el ejemplo 7.1 muestran cómo hacer aritmética con funciones. Una operación no aritmética es la **composición** de funciones.




$(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

**Definición 7.2**

La **composición** de dos funciones $f$ y $g$ se denota $f \circ g$ y se define como

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

para todo $x$ en el dominio de $g$ tal que $g(x)$ esté en el dominio de $f$.

La composición es un proceso en dos pasos, como indica el esquema del margen. Atención a esta definición. Para que $f(g(x))$ esté definida, es preciso que $x$ esté en el dominio de $g$ y, además, que $f$ esté definida en $g(x)$, es decir, que el número $g(x)$ esté en el dominio de $f$.

**Ejemplo 7.2** **Composición de dos funciones**

Dadas $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = \sqrt{x-2}$, hallar las composiciones $f \circ g$ y $g \circ f$ e identificar sus dominios.

**Solución** En primer lugar,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x-2})$$

$$= (\sqrt{x-2})^2 + 1 = x - 2 + 1 = x - 1.$$

Se tiene la tentación de decir que el dominio de $f \circ g$ es toda la recta real, pero ¡cuidado! Para que $x$ esté en el dominio de $g$ ha de ser $x \geq 2$. El dominio de $f$ es toda la recta real, de manera que no impone restricción adicional sobre el dominio de $f \circ g$. Así, pues, aunque la expresión final $x - 1$ podría definirse para todo $x$, el dominio de $(f \circ g)$ es $\{x \mid x \geq 2\}$. En cuanto a la segunda composición,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 1)$$

$$= \sqrt{(x^2 + 1) - 2} = \sqrt{x^2 - 1}.$$

La raíz cuadrada resultante exige $x^2 - 1 \geq 0$, o sea, $|x| \geq 1$. Como la función «interior» está definida en todas partes, el dominio de $g \circ f$ es $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq 1\}$. En notación de intervalos, $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

Al ir progresando en el Cálculo, a menudo será necesario reconocer que una función es composición de otras más simples. Es importante adquirir práctica en ese aspecto.

**Ejemplo 7.3** **Identificando una composición**

Identificar funciones $f$ y $g$ que permitan expresar como $(f \circ g)(x)$ cada una de estas funciones: (a) $\sqrt{x^2 + 1}$, (b) $(\sqrt{x} + 1)^2$, (c) sen $x^2$ y (d) $\cos^2 x$.

**Solución** (a) Dentro de la raíz está $x^2 + 1$, así que elegimos $g(x) = x^2 + 1$ y $f(x) = \sqrt{x}$.

(b) Aquí, $\sqrt{x} + 1$ está dentro de un cuadrado. Tomamos $g(x) = \sqrt{x} + 1$ y $f(x) = x^2$.

(c) La función se puede reescribir como sen $(x^2)$, con $x^2$ claramente *dentro* de la función seno. Por tanto, elegimos $g(x) = x^2$ y $f(x) = \text{sen } x$.

(d) La función, tal como se ha escrito, es una forma abreviada de $(\cos x)^2$, así que una opción correcta es hacer $g(x) = \cos x$ y $f(x) = x^2$.

En general, es difícil esbozar la gráfica de $f(g(x))$ a partir de las de $f$ y $g$. Sin embargo, si una de las funciones $f \circ g$ es lineal, hay un procedimiento sencillo para obtener la gráfica de la composición. A tales **transformaciones lineales** se dedica el resto de la sección.

En primer lugar, partiremos de la gráfica de $f(x)$ y construiremos la de $f(x) + c$, con $c$ constante. El caso general se deduce sin dificultad del siguiente ejemplo.

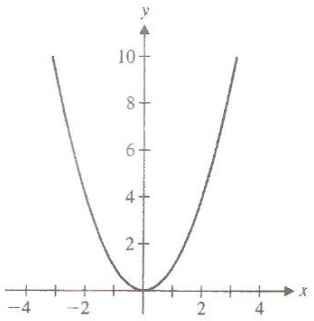



**Figura 0.61a**
$y = x^2$.

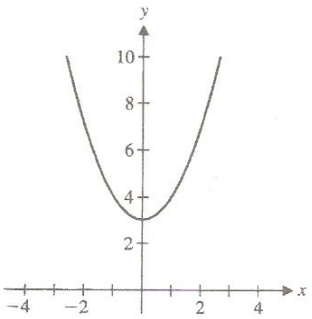



**Figura 0.61b**
$y = x^2 + 3$.

## Ejemplo 7.4 Traslación vertical de una gráfica

Representar $y = x^2$ e $y = x^2 + 3$. Comparar sus gráficas.

**Solución** A mano se obtiene algo como las figuras 0.61a y 0.61b, dos parábolas abiertas hacia arriba. La principal diferencia es que una corta al eje $y$ en 0 y la otra en 3. Pensando un poco, se entiende el porqué. Para cualquier $x$, el punto de la gráfica de $y = x^2 + 3$ está 3 unidades más arriba que el de $y = x^2$, como indica la figura 0.62, donde ambas gráficas se han dibujado en unos mismos ejes.

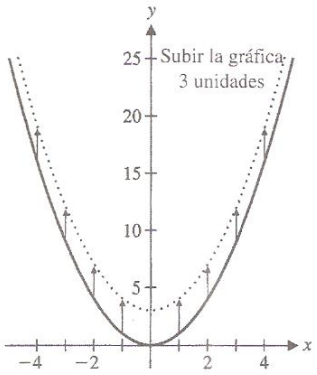



**Figura 0.62a**
Traslación de una gráfica hacia arriba.

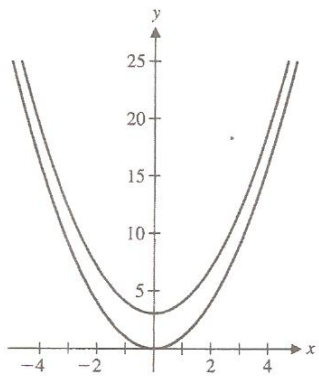



**Figura 0.62b**
$y = x^2$ e $y = x^2 + 3$.

Nadie diría, a simple vista, que una gráfica resulta de trasladar la otra 3 unidades hacia arriba. Es una desafortunada ilusión óptica debida a que el cerebro interpreta como distancia entre dos curvas la mínima distancia entre ellas. Para estas parábolas, la distancia mínima es vertical en $x = 0$, pero es oblicua al alejarnos de ese punto. La distancia vertical entre las parábolas es 3.

En general, la gráfica de $y = f(x) + c$ es idéntica a la de $y = f(x)$, pero trasladada $|c|$ unidades hacia arriba (si $c > 0$) o hacia abajo (si $c < 0$). Diremos que $f(x) + c$ es una **traslación vertical** (de $|c|$ unidades hacia arriba o hacia abajo).

En el ejemplo próximo investigamos qué sucede cuando se suma una constante a $x$.

## Ejemplo 7.5 Traslación horizontal de una gráfica

Comparar las gráficas de $y = x^2$ e $y = (x - 1)^2$.

**Solución** Las gráficas se muestran en las figuras 0.63a y 0.63b.

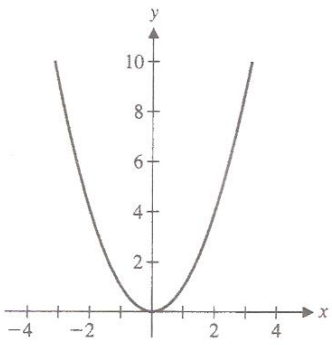



**Figura 0.63a**
$y = x^2$.

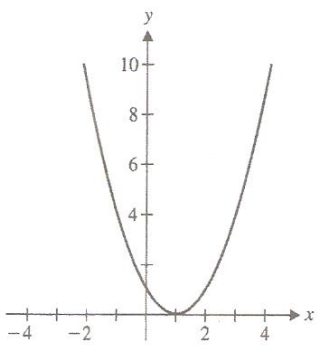



**Figura 0.63b**
$y = (x - 1)^2$.

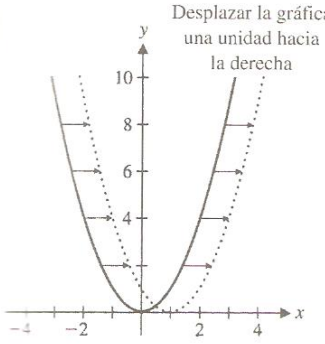



**Figura 0.64**
Traslación hacia la derecha.

Parecen idénticas, excepto que la de $(x-1)^2$ está desplazada 1 unidad hacia la derecha respecto de la de $y = x^2$. Es lógico, ya que si tomamos un valor de $x$, digamos $x = 13$, el valor de $(x-1)^2$ en $x = 13$ es igual al valor de $x^2$ en $x = 12$, o sea, 1 unidad más a la izquierda. Y lo mismo ocurre para todo valor de $x$. La figura 0.64, en la que aparecen las dos juntas, deja clara la situación.

En general, para $c > 0$, la gráfica de $y = f(x-c)$ es la de $y = x$ desplazada $c$ unidades hacia la derecha. Análogamente, de nuevo con $c > 0$, la gráfica de $y = f(x+c)$ es la de $y = f(x)$ desplazada $c$ unidades hacia la izquierda. Diremos $f(x-c)$ y $f(x+c)$ son **traslaciones horizontales** (hacia la derecha y hacia la izquierda, respectivamente).

Para saber a qué lado trasladar la gráfica de $y = f(x)$ debe prestarse atención a cuándo se hace 0 el argumento (la cantidad que aparece dentro del paréntesis). En $f(x)$ hay que hacer $x = 0$ para obtener $f(0)$, mientras que en $f(x-c)$ hay que tomar $x = c$ para obtener $f(0)$. Así, pues, el punto en la gráfica de $y = f(x)$ para $x = 0$ corresponde al punto en la de $y = f(x-c)$ para $x = c$.

### Ejemplo 7.6 Traslaciones verticales y horizontales

A la vista de la gráfica de $y = f(x)$ (figura 0.65a), esbozar las gráficas de $y = f(x) - 2$ e $y = f(x-2)$.

**Solución** La gráfica de $y = f(x) - 2$ se obtiene trasladando la dada 2 unidades hacia abajo (figura 0.65b). Y la gráfica de $y = f(x-2)$ se obtiene trasladando la dada 2 unidades a la derecha, de modo que la $x$-intersección en $x = 0$ de la original pase a estar en $x = 2$ para la trasladada (figura 0.65c).

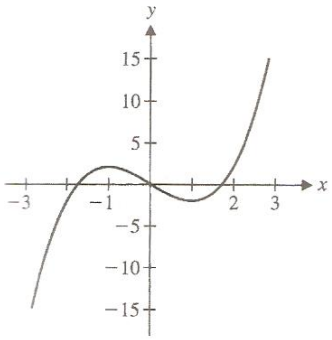



**Figura 0.65a**
$y = f(x)$.

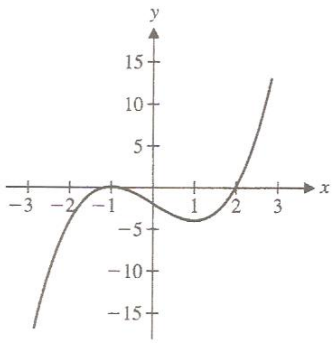



**Figura 0.65b**
$y = f(x) - 2$.

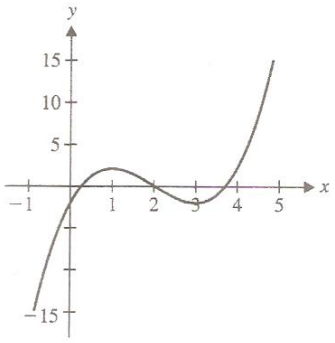



**Figura 0.65c**
$y = f(x-2)$.

El ejemplo que sigue explora el efecto de multiplicar o dividir $x$ o $y$ por una constante.

### Ejemplo 7.7 Comparación de gráficas relacionadas

Comparar las gráficas de $y = x^2 - 1$, $y = 4(x^2 - 1)$ e $y = (4x)^2 - 1$.

**Solución** Las dos primeras gráficas (figuras 0.66a y 0.66b) parecen idénticas hasta que se comparan las escalas de sus ejes $y$.

Los valores en la figura 0.66b son cuatro veces mayores, lo cual refleja el hecho de que la función original ha sido multiplicada por 4. La diferencia queda de manifiesto al dibujar las funciones con la misma escala (figura 0.66c). En ella, la parábola $y = 4(x^2 - 1)$ es más estrecha. Nótese que la $x$-intersección es la misma (¿por qué era de esperar?).

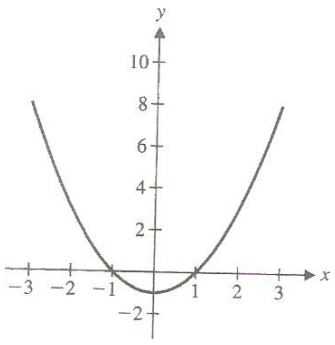



**Figura 0.66a**
$y = x^2 - 1$.

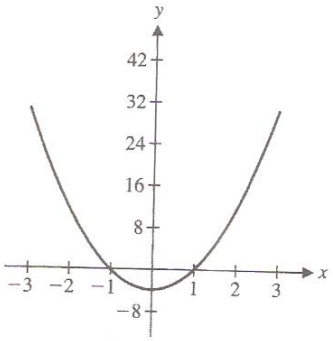



**Figura 0.66b**
$y = 4(x^2 - 1)$.

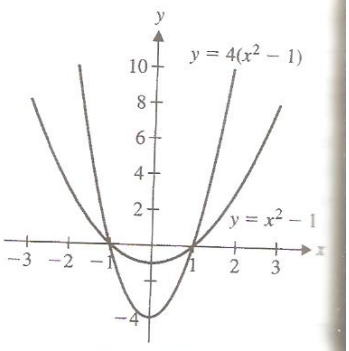



**Figura 0.66c**
$y = x^2 - 1$ e $y = 4(x^2 - 1)$.

Las gráficas de $y = x^2 - 1$ e $y = (4x)^2 - 1$ se muestran en las figuras 0.67a y 0.67b.

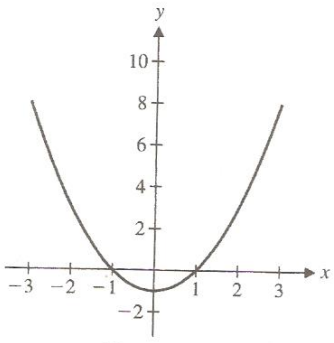



**Figura 0.67a**
$y = x^2 - 1$.

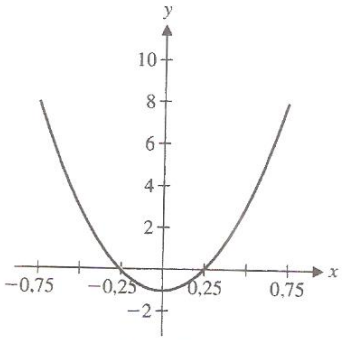



**Figura 0.67b**
$y = (4x)^2 - 1$.

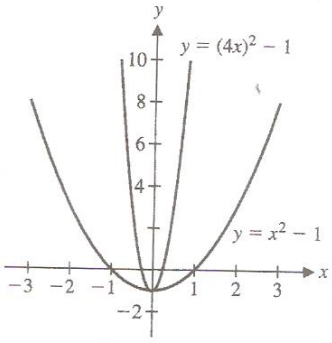



**Figura 0.67c**
$y = x^2 - 1$ e $y = (4x)^2 - 1$.

¿Ve la diferencia ahora? La escala del eje $x$ ha cambiado en el mismo factor 4 que en la función. Para verlo, basta observar que al sustituir $x = 1/4$ en $(4x)^2 - 1$ se obtiene $(1)^2 - 1$, lo mismo que al sustituir $x = 1$ en la función original. Cuando se dibujan en unos mismos ejes (figura 0.67c), la parábola $y = (4x)^2 - 1$ es más estrecha. Aquí las $x$-intersecciones son distintas, pero las $y$-intersecciones son iguales. (¿Por qué era de esperar?).

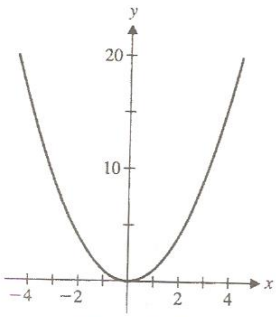



**Figura 0.68a**
$y = x^2$.

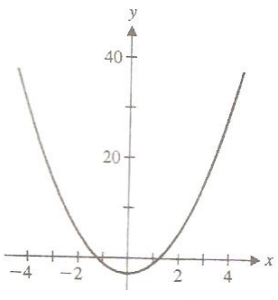



**Figura 0.68b**
$y = 2x^2 - 3$.

La observación del ejemplo 7.7 puede generalizarse. Antes de leer la explicación, inténtelo por su cuenta. ¿Qué relación guardan las gráficas de $cf(x)$ y $f(cx)$ con la de $y = f(x)$?

De acuerdo con el ejemplo 7.7, la gráfica de $y = cf(x)$ con $c > 0$ resulta de la de $y = f(x)$ al multiplicar la escala del eje $y$ por $c$. Y la gráfica de $y = f(cx)$, con $c > 0$, se obtiene de la de $y = f(x)$ multiplicando la escala del eje $x$ por $1/c$.

Combinando estas reglas básicas se llega a entender gráficas más complicadas.

### Ejemplo 7.8 Traslación y compresión

Describir cómo se obtiene la gráfica de $y = 2x^2 - 3$ a partir de la de $y = x^2$.

**Solución** Se pasa de $x^2$ a $2x^2 - 3$ multiplicando por 2 y restando 3 después. En términos de gráficas, eso tiene el efecto de multiplicar por 2 la escala del eje $y$ y trasladar después la gráfica 3 unidades hacia abajo (véanse las figuras 0.68a y 0.68b).

### Ejemplo 7.9 Una transformación que afecta a las escalas en $x$ e $y$

Explicar cómo se obtiene la gráfica de $y = x^2 + 4x + 3$ a partir de la de $y = x^2$.

**Solución** De nuevo se puede relacionar esta gráfica (toda cuadrática, de hecho) con la de $y = x^2$. Para empezar, hemos de **completar el cuadrado**. Recordemos que en este proceso se divide entre 2 el coeficiente de $x$ (4/2 = 2) y se eleva al cuadrado el resultado ($2^2 = 4$). Sumando y restando esta cantidad, reescribimos los términos en $x$ como un cuadrado perfecto:

$$y = x^2 + 4x + 3 = (x^2 + 4x + 4) - 4 + 3 = (x + 2)^2 - 1.$$

Para representar esta función, trasladamos la parábola $y = x^2$ (figura 0.69a) 2 unidades hacia la izquierda y 1 unidad hacia abajo (figura 0.69b).

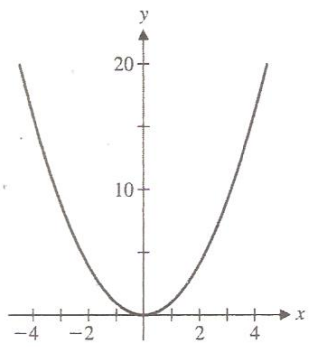



**Figura 0.69a**
$y = x^2$.

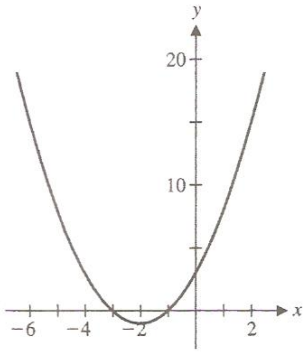



**Figura 0.69b**
$y = (x + 2)^2 - 1$.

En los ejercicios se exploran otras transformaciones de funciones.

# EJERCICIOS 0.7

1. La restricción sobre el dominio del ejemplo 7.2 puede resultar chocante. Consideremos la siguiente analogía. Imagine un vuelo de Nueva York a Los Ángeles con escala en Minneapolis para repostar. Si el aeropuerto de Minneapolis está cerrado por niebla, explicar por qué su vuelo será cancelado (o al menos retrasado) a pesar de que en Nueva York y en Los Ángeles el día es espléndido.

2. Explicar por qué las gráficas de $y = 4(x^2 - 1)$ e $y = (4x)^2 - 1$ de las figuras 0.66c y 0.67c son más estrechas que la de $y = x^2 - 1$.

3. Como ilustra el ejemplo 7.9, toda función cuadrática se puede expresar en la forma $a(x - d)^2 + e$ completando el cuadrado. Usando las reglas de transformación de esta sección, explicar por qué eso significa que todas las parábolas (con $a > 0$) tienen esencialmente el mismo aspecto.

4. Argumentar por qué la gráfica de $y = f(x + 4)$ se obtiene desplazando la de $y = f(x)$ cuatro unidades a la izquierda y no a la derecha.

**En los ejercicios 5-10, hallar las composiciones $f \circ g$ y $g \circ f$ e identificar sus dominios.**

5. $f(x) = x + 1$, $g(x) = \sqrt{x - 3}$

6. $f(x) = x - 2$, $g(x) = \sqrt{x + 1}$

7. $f(x) = e^x$, $g(x) = \ln x$

8. $f(x) = \sqrt{1 - x}$, $g(x) = \ln x$

9. $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = \operatorname{sen} x$

10. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$, $g(x) = x^2 - 2$

**En los ejercicios 11-26, identificar funciones $f(x)$ y $g(x)$ con las que la función dada se escriba como $(f \circ g)(x)$.**

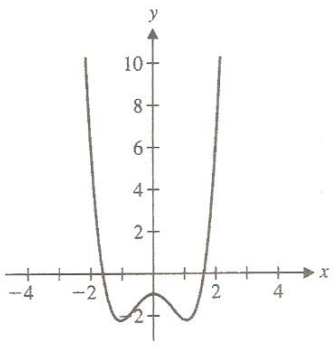
11. $\sqrt{x^4 + 1}$
12. $\sqrt[3]{x + 3}$
13. $\dfrac{1}{x^2 + 1}$
14. $\dfrac{1}{x^2} + 1$
15. $(4x + 1)^2 + 3$
16. $4(x + 1)^2 + 3$
17. $\operatorname{sen}^3 x$
18. $\operatorname{sen} x^3$
19. $\cos 4x$
20. $4 \cos x$
21. $e^{x^2+1}$
22. $e^{4x-2}$
23. $\sqrt{e^x + 1}$
24. $\sqrt{e^x + 1}$
25. $\ln(3x - 5)$
26. $\ln 3x - 5$

**En los ejercicios 27-34, usar la gráfica de $y = f(x)$ dada en la figura para representar la función que se indica.**

27. $f(x) - 3$
28. $f(x + 2)$
29. $f(x - 3)$

30. $f(x) + 2$ 31. $f(2x)$ 32. $3f(x)$

33. $4f(x) - 1$ 34. $3f(x + 2)$

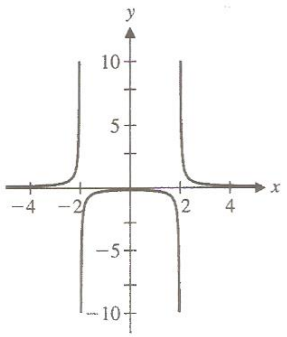



**En los ejercicios 35-42, usar la gráfica de $y = f(x)$ dada en la figura para representar la función que se indica.**

35. $f(x - 4)$ 36. $f(x + 3)$ 37. $f(2x)$

38. $f(2x - 4)$ 39. $f(3x + 3)$ 40. $3f(x)$

41. $2f(x) - 4$ 42. $3f(x) + 3$




**En los ejercicios 43-48, completar el cuadrado y explicar cómo transformar la gráfica de $y = x^2$ en la gráfica de la función propuesta.**

43. $f(x) = x^2 + 2x + 1$ 44. $f(x) = x^2 - 4x + 4$

45. $f(x) = x^2 + 2x + 4$ 46. $f(x) = x^2 - 4x + 2$

47. $f(x) = 2x^2 + 4x + 4$ 48. $f(x) = 3x^2 - 6x + 2$

**En los ejercicios 49-52, esbozar la gráfica de la función dada y compararla con la de $y = x^2 - 1$.**

49. $f(x) = -2(x^2 - 1)$ 50. $f(x) = -3(x^2 - 1)$

51. $f(x) = -3(x^2 - 1) + 2$ 52 $f(x) = -2(x^2 - 1) - 1$

**En los ejercicios 53-56, representar la función dada y comparar su gráfica con la de $y = (x - 1)^2 - 1 = x^2 - 2x$.**

53. $f(x) = (-x)^2 - 2(-x)$

54. $f(x) = (-2x)^2 - 2(-2x)$

55. $f(x) = (-x)^2 - 2(-x) + 1$

56. $f(x) = (-3x)^2 - 2(-3x) - 3$

57. A la vista de los ejercicios 49-52, enunciar una regla para transformar la gráfica de $y = f(x)$ en la de $y = cf(x)$, donde $c < 0$.

58. A la vista de los ejercicios 53-56, enunciar una regla para transformar la gráfica de $y = f(x)$ en la de $y = f(cx)$, con $c < 0$.

59. Tras una colisión en la carretera, la posición vertical de un vehículo viene dada por $f(t) = e^{-t/4} \cos t$. Describir lo que experimenta el pasajero.

60. Tras una colisión en la carretera, la posición vertical de un vehículo viene dada por $f(t) = e^{-t} \cos t$. Describir lo que experimenta el pasajero. ¿Es más afortunado que el del ejercicio 59?

61. Las **iteraciones** de funciones son importantes en diversas aplicaciones. Para iterar $f(x)$ comenzamos con un $x_0$ inicial y evaluamos $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2)$, etc. Por ejemplo, $x_1 = \cos 1 \approx 0{,}54$, $x_2 = \cos x_1 \approx 0{,}54 \approx 0{,}86$, $x_3 \approx \cos 0{,}86 \approx 0{,}65$, etcétera. Calcule más iteraciones y compruebe que se aproximan a 0,739085. A continuación, escoja un $x_0$ (cualquier número) y pruebe que las iteraciones con este nuevo $x_0$ tienden también a 0,739085.

62. Verificar que las iteraciones de una función (ejercicio 61) se pueden escribir como $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(f(x_0))$, $x_3 = f(f(f(x_0)))$, etcétera. Representar $y = \cos(\cos x)$, $y = \cos(\cos(\cos x))$ e $y = \cos(\cos(\cos(\cos x)))$. Las gráficas deben parecerse cada vez más a una recta horizontal. Identificar esa recta usando el resultado del ejercicio 61.

63. Calcular varias iteraciones de $f(x) = \operatorname{sen} x$ (véase ejercicio 61) con diversos valores iniciales. ¿Qué ocurre tras un buen número de iteraciones?

64. Rehacer el ejercicio 63 con $f(x) = x^2$.

65. Si las iteraciones de $f(x)$ (ejercicio 61) repiten un mismo número, este número se dice que es un **punto fijo** de $f$. Explicar por qué todo punto fijo ha de ser solución de la ecuación $f(x) = x$. Hallar los puntos fijos de $f(x) = \cos x$ resolviendo la ecuación $\cos x = x$. Comparar los resultados con el ejercicio 61.

66. Hallar los puntos fijos de $f(x) = \operatorname{sen} x$ y comparar los resultados con los del ejercicio 61.

67. Hemos visto que cualquier función cuadrática se puede llevar a la forma $y = a(x - d)^2 + e$ completando el cuadrado. De ahí concluimos que todas las parábolas con $a > 9$ tienen el mismo aspecto. Para ver que eso no sucede con las cúbicas, representar $y = x^3$ e $y = x^3 - 3x$.
Vamos a investigar, completando el cubo, cuántas gráficas diferentes hay para las cúbicas.
(a) Usando $(x + a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$, transformar la gráfica de $y = x^3$ en las de (a) $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ y (b) $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$.
(b) Probar que para llegar a $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$ no hay transformación sencilla si se parte de $y = x^3$, pero sí desde $y = x^3 + x$.

(c) Demostrar que toda cúbica ($y = ax^3 + bx^2 + cx + d$) se puede obtener, por transformaciones básicas, a partir de $y = ax^3 + kx$ para alguna constante $k$.

68. Con frecuencia conviene extender una gráfica con el fin de hacer predicciones. Así, si una señal electrónica dada por $f(x) = 2x$ para $0 \le x \le 2$ es periódica, ¿por qué $f(-1) = 2$ es una predicción aceptable?
En algunas aplicaciones se supone que la función es **par**, o sea, que $f(x) = f(-x)$ para todo $x$. En tal caso, sería $2(-x) = -2x$ en $-2 \le x \le 0$. Representar la **extensión par**

$$f(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } -2 \le x \le 0 \\ 2x & \text{si } 0 \le x \le 2 \end{cases}.$$

Hallar extensiones pares de (a) $f(x) = x^2 + 2x + 1$, $0 \le x \le 2$ y (b) $f(x) = e^{-x}$, $0 \le x \le 2$.

69. Otras aplicaciones exigen que una función sea **impar**, es decir, que $f(-x) = -f(x)$. Para $f(x) = x^2$, $0 \le x \le 2$, la extensión impar requiere que para $-2 \le x \le 0$, $f(x) = -f(-x) = -(-x)^2 = -x^2$; así que

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } -2 \le x \le 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \le x \le 2 \end{cases}.$$

Representar $y = f(x)$ y discutir cómo girar la mitad derecha de la gráfica para obtener la mitad izquierda. Hallar extensiones impares de (a) $f(x) = x^2 + 2x$, $0 \le x \le 2$ y (b) $f(x) = e^{-x} - 1$, $0 \le x \le 2$.

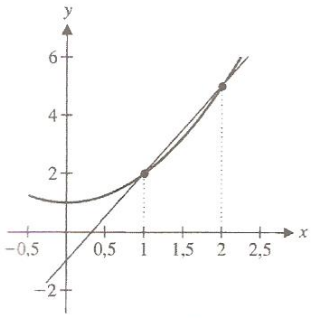



**Figura 0.70a**
Recta secante, pendiente = 3.

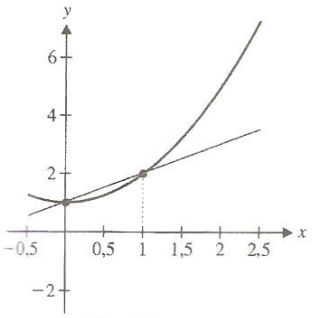



**Figura 0.70b**
Recta secante, pendiente = 1.

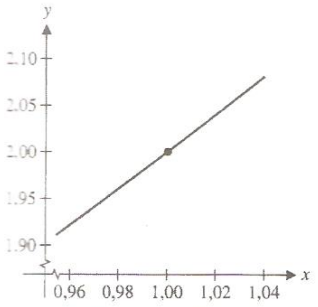



**Figura 0.71**
$y = x^2 + 1$.

## 0.8 PRELIMINARES DEL CÁLCULO

Los conceptos de las secciones anteriores **no** pertenecen al Cálculo, pero aparecerán una y otra vez en él. Resolver problemas de Cálculo requiere conocimientos previos de Geometría, Trigonometría y, especialmente, Álgebra. En esta sección abordamos la frontera del Cálculo investigando algunos problemas importantes que exigen su uso.

La pendiente de una recta es el cambio en $y$ dividido entre el cambio en $x$. Esta fracción es la misma para todo par de puntos. Por ejemplo, los puntos (0, 1), (1, 4) y (3, 10) están en la recta $y = 3x + 1$. La pendiente 3 se puede obtener con cualquier par de esos puntos. Así,

$$m = \frac{4-1}{1-0} = 3$$

o bien

$$m = \frac{10-1}{3-0} = 3.$$

En el Cálculo se aborda el problema de hallar la pendiente de una *curva*, no ya de una recta, en un punto. Supongamos que deseamos hallar la pendiente de la parábola $y = x^2 + 1$ en el punto (1, 2). Si tomamos otro punto de la parábola, digamos (2, 5), la pendiente de la recta que une los dos puntos (llamada **recta secante**, véase figura 0.70a) es fácil de calcular:

$$m_{sec} = \frac{5-2}{2-1} = 3.$$

Pero si tomamos el punto (0, 1) en lugar del (2, 5), obtenemos una pendiente distinta (figura 0.70b):

$$m_{sec} = \frac{2-1}{1-0} = 1.$$

Para curvas (no rectas) las pendientes de las rectas secantes **no** son iguales.

Entonces, ¿qué significa decir que una curva tiene pendiente en un punto? Haciendo zoom sobre el punto (1, 2) de la gráfica de $y = x^2 + 1$ tendremos la respuesta. Vemos, como indica la figura 0.71, algo muy parecido a una recta. De hecho, zoom sucesivos la hacen parecer más y más recta. Y cada vez importa menos qué par de puntos de la zona ampliada tomamos para evaluar la pendiente.

Por tanto, he aquí la estrategia: tomar puntos de la parábola cada vez más próximos al (1, 2) y hallar las pendientes de las rectas que unen (1, 2) con cada uno de ellos. Cuanto más cerca esté el punto auxiliar al (1, 2) más próxima al valor que buscamos será la pendiente de la recta secante.

Por ejemplo, la pendiente de la secante que une el punto (1,5, 3,25) de la parábola con el (1, 2) es

$$m_{sec} = \frac{3{,}25-2}{1{,}5-1} = 2{,}5.$$

El punto (1,1, 2,21) está aún más cerca del (1, 2). La pendiente de la recta secante es ahora

$$m_{sec} = \frac{2{,}21 - 2}{1{,}1 - 1} = 2{,}1.$$

El punto (1,01, 2,0201) está todavía más cerca del (1, 2) y la pendiente de su recta secante es

$$m_{sec} = \frac{2{,}0201 - 2}{1{,}01 - 1} = 2{,}01.$$

Las pendientes de las rectas secantes se van aproximando al valor que buscamos, la pendiente de la parábola en el punto (1,2). A la vista de los cálculos realizados, cabe aventurar que esa pendiente es 2.

El Cálculo nos proporcionará un método fácil para calcular tales pendientes exactamente, basado en una operación muy potente, la **derivada**, que resolverá problemas diversos de Física, Biología o Economía. De momento, hagamos constar qué distingue a un problema de Cálculo del correspondiente en Álgebra. El de Cálculo involucra un proceso que llamaremos de paso al **límite**. Por ahora no somos capaces de calcular exactamente la pendiente de una curva, pero sí de estimarla mediante una secuencia de aproximaciones. El paso al límite permitirá extender la noción de pendiente de las rectas a curvas más generales.

### Ejemplo 8.1 Estimación de la pendiente de una curva

Estimar la pendiente de $y = \text{sen } x$ en $x = 0$.

**Solución** Es ésta una importante cuestión, sobre la que volveremos más adelante. De momento, elegimos varios puntos próximos al (0, 0) y calculamos las pendientes de las rectas que los unen con (0, 0), obteniendo

| Segundo punto | $m_{sec}$ |
|---|---|
| (1, sen 1) | 0,8415 |
| (0,1, sen 0,1) | 0,9983 |
| (0,01, sen 0,01) | 0,9999 |

| Segundo punto | $m_{sec}$ |
|---|---|
| (–1, sen (–1)) | 0,8415 |
| (–0,1, sen (–0,1)) | 0,9983 |
| (–0,01, sen (–0,01)) | 0,9999 |

Conforme el punto se acerca al (0, 0), las pendientes de las rectas secantes ($m_{sec}$) parecen tender hacia 1. Ésta es nuestra estimación de la pendiente (de momento no sabemos calcular el valor exacto).

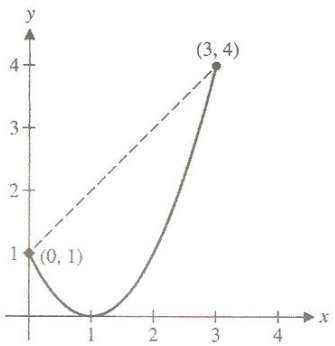



**Figura 0.72**
$y = (x - 1)^2$.

Un segundo problema que requiere la potencia del Cálculo, y que estuvo como el anterior en su origen, es el de calcular la distancia entre dos puntos a lo largo de una curva. Menos relevante que el primero, deja muy clara la necesidad de técnicas matemáticas más potentes que las meramente algebraicas. Conviene no perder de vista la analogía con el problema de la pendiente.

La fórmula (1.6) da la distancia recta entre dos puntos. Así, la distancia entre los puntos (0, 1) y (3, 4) es

$$d\{(0, 1), (3, 4)\} = \sqrt{(3-0)^2 + (4-1)^2} = 3\sqrt{2} \approx 4{,}24264.$$

Sin embargo, eso no nos sirve para calcular la longitud de un viaje desde (0, 1) a (3, 4) por una carretera cuya forma viene dada por la curva $y = (x - 1)^2$ (figura 0.72). Lo que nos interesa es conocer la longitud de la curva, llamada **longitud de arco**.

La distancia a lo largo de la curva será mayor que $3\sqrt{2}$ (que es la distancia recta). Pero ¿cuánto mayor? Copiamos la estrategia seguida con la pendiente para construir aproximaciones de precisión creciente. En vez de un único segmento recto para unir los dos puntos,

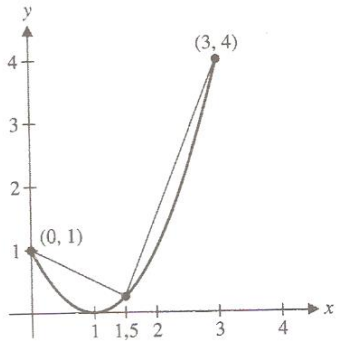



**Figura 0.73**
Dos segmentos rectos.

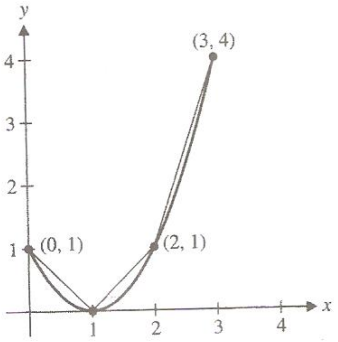



**Figura 0.74**
Tres segmentos rectos.

podemos usar dos, como en la figura 0.73. La suma de sus dos longitudes parece aproximar mejor la longitud real de la curva. Esa distancia es

$$d_2 = d\{(0, 1), (1{,}5, 0{,}25)\} + d\{(1{,}5, 0{,}25), (3, 4)\}$$
$$= \sqrt{(1{,}5 - 0)^2 + (0{,}25 - 1)^2} + \sqrt{(3 - 1{,}5)^2 + (4 - 0{,}25)^2} \approx 5{,}71593.$$

Ya se adivina lo que sigue. Si dos mejor que uno, ¿por qué no tres o más? Usando los tres segmentos rectos de la figura 0.74 obtenemos una aproximación mejor:

$$d_3 = d\{(0, 1), (1, 0)\} + d\{(1, 0), (2, 1)\} + d\{(2, 1), (3, 4)\}$$
$$= \sqrt{(1 - 0)^2 + (0 - 1)^2} + \sqrt{(2 - 1)^2 + (1 - 0)^2} + \sqrt{(3 - 2)^2 + (4 - 1)^2}$$
$$= 2\sqrt{2} + \sqrt{10} \approx 5{,}99070.$$

| N.º de segmentos | Distancia |
|---|---|
| 1 | 4,24264 |
| 2 | 5,71593 |
| 3 | 5,99070 |
| 4 | 6,03562 |
| 5 | 6,06906 |
| 6 | 6,08713 |
| 7 | 6,09714 |

Es claro que la longitud de arco de la curva es mayor que $d_3$ (véase figura 0.74) y que al tomar más segmentos rectos la aproximación mejora. Este proceso es tedioso, pero dejará de serlo gracias a la integral definida (Capítulo 4). Por ahora nos limitamos a dar una tabla con las aproximaciones sucesivas (obtenidas tomando puntos con coordenadas $x$ uniformemente espaciadas). La tabla sugiere que la longitud de la curva es 6.1, lejos de la longitud 4.2 de la recta. Si continuásemos este tedioso proceso, veríamos que la suma de segmentos rectos se aproxima a 6,126 (la longitud de la curva). En estas ideas se basa la aplicación de la integral definida al cálculo de longitudes (Capítulo 4).

## Ejemplo 8.2 Estimación de la longitud de una curva

Estimar la longitud de la curva $y = \operatorname{sen} x$ en $0 \le x \le \pi$ (figura 0.75).

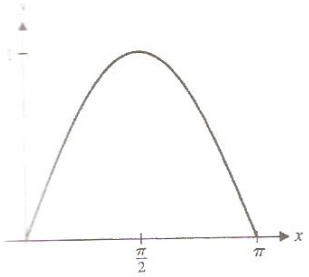



**Figura 0.75**
$y = \operatorname{sen} x$ en $[0, \pi]$.

**Solución** Los extremos de la curva son los puntos $(0, 0)$ y $(\pi, 0)$. La distancia entre ellos es $d_1 = \pi$. El punto medio de la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$, correspondiente al punto medio del intervalo $[0, \pi]$, es $(\pi/2, 1)$. La suma de los dos segmentos rectos de la figura 0.76 es

$$d_2 = \sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + 1} + \sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + 1} \approx 3{,}7242.$$

Usando los cinco puntos $(0, 0)$, $(\pi/4, 1/\sqrt{2})$, $(\pi/2, 1)$, $(3\pi/4, 1/\sqrt{2})$ y $(\pi, 0)$ (o sea, cuatro segmentos), la suma de longitudes de los segmentos rectos es

$$d_4 = 2\sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}} + 2\sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} \approx 3{,}7901.$$

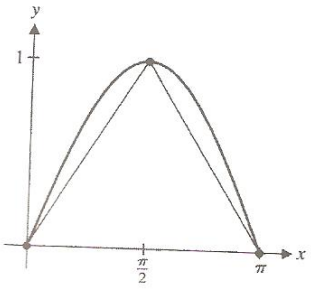



**Figura 0.76**
Aproximación de la curva mediante dos segmentos rectos.

Y usando ocho puntos (siete segmentos) hacen falta calculadora y paciencia para hallar el valor de la suma, 3,8125. Nos detenemos y damos 3,8 como estimación razonanble de la longitud de la curva seno en el intervalo $[0, \pi]$.

Agrada saber que desarrollaremos técnicas con las que esos cálculos serán muy simples. Por ahora, baste captar las ideas que hay tras estas aproximaciones. Extendemos la noción de longitud a curvas mediante ciertas aproximaciones y mejorándolas sucesivamente. Igual que para la pendiente, lo esencial es el **paso al límite** (aquí aumentando el número de segmentos).

Es la noción de límite lo que separa las matemáticas previas del Cálculo. Esta idea se desarrolla cuidadosamente en el Capítulo 1 y utilizaremos límites con profusión después. En los dos problemas anteriores, una secuencia de aproximaciones nos ha indicado la estimación razonable. En el lenguaje del Cálculo, la solución exacta es el **límite de una sucesión** de soluciones aproximadas.

A título de ejemplo, consideremos la sucesión de números 1, 1/2, 1/4, 1/8, ..., donde cada término es la mitad del anterior. Es obvio que al avanzar por la sucesión nos vamos acercando al valor 0. Con el fin de facilitar las cosas en sucesiones menos simples, se denotan $a_0 = 1$, $a_1 = 1/2$, $a_2 = 1/4 = (1/2)^2$, $a_3 = 1/8 = (1/2)^3$, ... El subíndice se llama **índice** y es el análogo de la variable $x$ en las funciones. En nuestro ejemplo hemos empezado con índice 0 para que los términos se escriban fácilmente como potencias de 1/2, a saber:

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

para $n = 0, 1, 2, \ldots$ El **límite** de la sucesión se escribe

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0.$$

Esta notación indica que cuando $n \to \infty$ los términos de la sucesión se aproximan más y más al límite 0.

### Ejemplo 8.3 Límite de una sucesión

Evaluar varios términos de la sucesión definida por $a_n = \dfrac{2n-1}{2n+1}$, $n \geq 0$ y hallar $\lim_{n \to \infty} a_n$.

**Solución** Sustituyendo $n = 0$ en $a_n = \dfrac{2n-1}{2n+1}$ se obtiene

$$a_0 = \frac{2 \cdot 0 - 1}{2 \cdot 0 + 1} = -1.$$

Del mismo modo se obtienen $a_1 = \dfrac{1}{3}$, $a_2 = \dfrac{3}{5}$, $a_3 = \dfrac{5}{7}$, $a_4 = \dfrac{7}{9}$, ... Mirando los términos calculados, podemos conjeturar que $\lim_{n \to \infty} a_n = 1$. Esto se puede verificar dividiendo entre $n$, en cada término de la sucesión, numerador y denominador. Así, queda

$$a_n = \frac{(2n-1)\,(1/n)}{(2n+1)\,(1/n)} = \frac{2n/n - 1/n}{2n/n + 1/n} = \frac{2 - 1/n}{2 + 1/n}.$$

Al crecer $n$, $1/n$ se va aproximando a 0. Por tanto, para $n$ muy grande, numerador y denominador serán muy aproximadamente iguales a 2, por lo que escribimos

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{2 - 1/n}{2 + 1/n} = \frac{2}{2} = 1.$$

En el Capítulo 1 introduciremos rigurosamente la noción de límite, de la que emerge el poderoso instrumento matemático conocido como Cálculo.

# EJERCICIOS 0.8

1. Explicar por qué cada una de las aproximaciones de la longitud en el ejemplo 8.2 es menor que el valor exacto de la longitud.

2. Para estimar la pendiente de $f(x) = x^2 + 1$ en $x = 1$ calcularíamos las pendientes de varias rectas secantes. Nótese que $y = x^2 + 1$ se curva hacia arriba. Explicar por qué la secante que une (1, 2) con (1,1, 2,21) tendrá mayor pendiente que la recta tangente. Comparar la pendiente de la secante que une (1, 2) y (0,9, 1,81) con la de la recta tangente.

**En los ejercicios 3-14, estimar la pendiente de $y = f(x)$ en $x = a$ siguiendo las pautas del ejemplo 8.1).**

3. $f(x) = x^2 + 1, a = 1$
4. $f(x) = x^2 + 1, a = 2$
5. $f(x) = \cos x, a = 0$
6. $f(x) = \cos x, a = \pi/2$
7. $f(x) = x^3 + 2, a = 0$
8. $f(x) = x^3 + 2, a = 1$
9. $f(x) = \sqrt{x+1}, a = 0$
10. $f(x) = \sqrt{x+1}, a = 3$
11. $f(x) = e^x, a = 0$
12. $f(x) = e^x, a = 1$
13. $f(x) = \ln x, a = 1$
14. $f(x) = \ln x, a = 2$

**En los ejercicios 15-22, estimar la longitud de la curva $y = f(x)$ en el intervalo que se especifica usando (a) $n = 4$, (b) $n = 8$ segmentos rectos. (c) Con ayuda de calculadora, use $n$ grandes y conjeture el valor exacto de la longitud de la curva.**

15. $f(x) = x^2 + 1, 0 \le x \le 2$
16. $f(x) = x^3 + 2, 0 \le x \le 1$
17. $f(x) = \cos x, 0 \le x \le \pi/2$
18. $f(x) = \operatorname{sen} x, 0 \le x \le \pi/2$
19. $f(x) = \sqrt{x+1}, 0 \le x \le 3$
20. $f(x) = 1/x, 1 \le x \le 2$
21. $f(x) = x^2 + 1, -2 \le x \le 2$
22. $f(x) = x^3 + 2, -1 \le x \le 1$

**En los ejercicios 23-42, escribir los cuatro primeros términos de la sucesión y estimar $\lim_{n\to\infty} a_n$.**

23. $a_n = \dfrac{3n+1}{2n+1}, n \ge 0$
24. $a_n = \dfrac{2n+2}{n+1}, n \ge 0$
25. $a_n = \dfrac{n}{n+1}, n \ge 0$
26. $a_n = \dfrac{3n}{n+2}, n \ge 0$
27. $a_n = \dfrac{n+2}{n^2+1}, n \ge 0$
28. $a_n = \dfrac{n+3}{n^2+4}, n \ge 0$
29. $a_n = \dfrac{2n^2}{n^2+4}, n \ge 0$
30. $a_n = \dfrac{3n^2}{n^2+1}, n \ge 0$
31. $a_n = \dfrac{2}{n+1}, n \ge 0$
32. $a_n = \dfrac{3}{n^2+1}, n \ge 0$
33. $a_n = 1 - \dfrac{1}{n}, n \ge 1$
34. $a_n = 2 + \dfrac{1}{n}, n \ge 1$
35. $a_n = e^{-n}, n \ge 1$
36. $a_n = \operatorname{sen}(1/n), n \ge 1$
37. $a_n = \cos(1/n), n \ge 1$
38. $a_n = e^{1/n}, n \ge 1$
39. $a_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}, n \ge 0$
40. $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n+1}, n \ge 0$
41. $a_n = 4 + \dfrac{1}{n} - \dfrac{2}{n^2}, n \ge 1$
42. $a_n = 3 - \dfrac{2}{n} + \dfrac{1}{n^2}, n \ge 1$

43. Si $a_1 = 1 - 0{,}9$, $a_2 = 1 - 0{,}99$, $a_3 = 1 - 0{,}999$, determinar $\lim_{n\to\infty} a_n$. A la vista de ese límite, argumentar que $0{,}999\overline{9} = 1$.

44. Como en el ejercicio 43, argumentar que $0{,}12999\overline{9} = 0{,}13$.

45. En el posterior desarrollo del Cálculo aprenderemos cómo evaluar de manera sencilla pendientes y longitudes. En este ejercicio mostramos cómo calcular la pendiente directamente. Para calcular la pendiente de $y = x^2$ en $x = 1$, debemos empezar calculando las pendientes de rectas secantes que unan (1, 1) con puntos próximos. Tomemos puntos $(1 + h, (1 + h)^2)$ con $h$ pequeño (positivo o negativo). Probar que la pendiente de la recta secante es $\dfrac{(1+h)^2 - 1}{1 + h - 1} = 2 + h$. Al tomar $h$ más y más cercano a 0, esa pendiente va siendo mejor aproximación a la pendiente de la recta tangente. Haciendo $h = 0$, probar que la pendiente de la recta tangente es 2. Del mismo modo, verificar que la pendiente de $y = x^2$ en $x = 2$ es 4 y hallarla en $x = 3$. Ante estos resultados, conjeture una fórmula para la pendiente de $y = x^2$ en $x = a$, para cualquier $a$.

46. El **triángulo de Sierpinski** es un famoso ejemplo de **fractal**. Para definirlo se toma un triángulo rectángulo (figura A), se marcan los puntos medios de cada lado y se conectan por segmentos rectos (figura B). Se suprime el triángulo central, de modo que quedan tres triángulos equiláteros. En cada uno de éstos marcamos los puntos medios de sus lados, los conectamos con segmentos rectos y suprimimos los triangulitos centrales (figura C). Continuando el proceso (la figura D muestra un paso más) *ad infinitum* se llega al triángulo de Sierpinski.

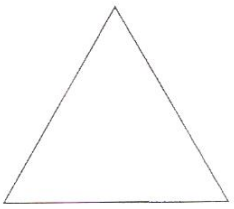


Figura A

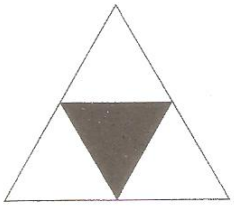


Figura B

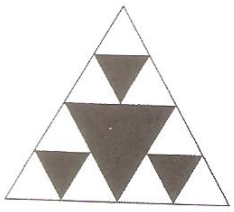


**Figura C**

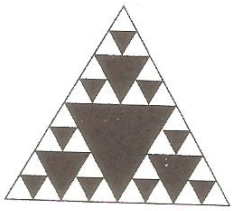
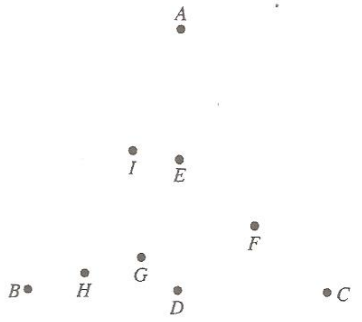


**Figura D**

(a) Sea $a_0$ el área del triángulo inicial. Si cada lado mide 1, $a_0 = \sqrt{3}/4$.
Sea $a_1$ el área tras el primer paso de la construcción (figura B). Probar que $a_1 = 3\sqrt{3}/16$.
Sea $a_2$ el área tras el segundo paso de la construcción (figura C). Hallar $a_2$.
Hallar, asimismo, $a_3$ y $a_4$. Conjeturar el valor de $\lim_{n\to\infty} a_n$.

(b) Sean ahora $p_0$ (= 3) el perímetro del triángulo original, $p_1$ el perímetro tras el primer paso de la construcción, $p_2$ el perímetro tras el segundo paso, etc. Hallar $\lim_{n\to\infty} p_n$.
Los fractales suelen ser muy bellos e intrincados. Constituyen, además, un reto matemático por aparentes contradicciones como la que acaba de descubrir: ¿cómo puede algo ser de longitud infinita y de área cero?

47. Cerramos la sección con una de la constantes de este libro: hay conexiones inesperadas entre áreas muy distintas de las matemáticas. Una de tales «coincidencias» implica al triángulo de Sierpinski y al llamado **juego del caos**.
Partimos de los vértices $A$, $B$, $C$ de un triángulo equilátero. Elegimos uno al azar (B en la figura) y después otro (C). Nos movemos del primero hacia el segundo y marcamos el punto medio (D). Repetir el siguiente proceso: elegir un vértice al azar (A en la figura) y caminar desde la actual posición hacia él marcando el punto medio (E), que pasa a ser nuestra nueva situación.
La figura muestra unos cuantos pasos, pero otras elecciones al azar producirán puntos muy diferentes. ¿Qué aspecto tendrá la figura cuando hayamos marcado mil puntos? Programe una calculadora para que lleve a cabo el proceso. Ver llenarse la pantalla de puntos produce una sorpresa notable.




# EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO

**En los ejercicios 1-6, resolver la ecuación despejando $x$.**

1. $3x + 1 > 4$
2. $1 < 2x - 3 \leq 5$
3. $x^2 - 2x - 8 > 0$
4. $\dfrac{x+2}{x^2-4} > 0$
5. $|1 - 2x| < 3$
6. $|4 + 2x| > 2$

**En los ejercicios 7 y 8, calcular la distancia entre el par de puntos.**

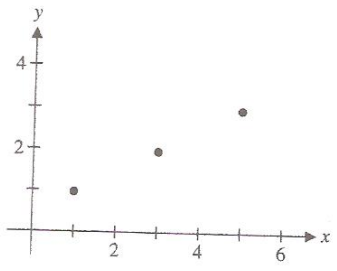
7. (0, 1), (2, 5)
8. (3, 1), (5, 2)

**En los ejercicios 9 y 10, hallar la pendiente de la recta que pasa por los dos puntos indicados.**

9. (2, 3), (0, 7)
10. (1, 4), (3, 1)

**En los ejercicios 11 y 12, determinar si las rectas son paralelas, perpendiculares o ninguna de ambas cosas.**

11. $y = 3x + 1$ e $y = 3(x - 2) + 4$
12. $y = -2(x + 1) - 1$ e $y = \dfrac{1}{2}x + 2$
13. Los puntos (1, 2), (2, 4) y (0, 6) ¿forman un triángulo rectángulo?
14. Marcar los puntos correspondientes a estos datos de población: (0, 2100), (1, 3050), (2, 4100) y (3, 5050). Comentar cualquier pauta apreciable y predecir la población al año siguiente.
15. Hallar una ecuación para la recta que pasa por los puntos dados y calcular la coordenada $y$ correspondiente a $x = 4$.



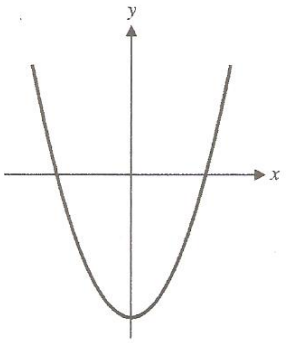

16. Dada $f(x) = x^2 - 3x - 4$, calcular $f(0)$, $f(2)$ y $f(4)$.

**En los ejercicios 17 y 18, hallar una ecuación para la recta con pendiente y punto indicados.**

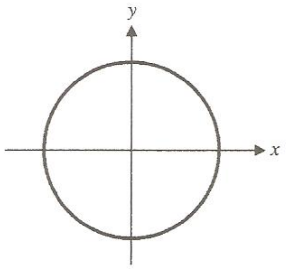
17. $m = -\dfrac{1}{3}$, (−1, −1)
18. $m = \dfrac{1}{4}$, (0, 2)

**En los ejercicios 19 y 20, investigar si la curva es gráfica de alguna función utilizando el criterio de la recta vertical.**

19.




20.




**En los ejercicios 21 y 22, determinar el dominio de la función.**

21. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

22. $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-2}$

**En los ejercicios 23-36, esbozar la gráfica de la función indicando los extremos, las intersecciones con los ejes y las asíntotas.**

23. $f(x) = x^2 + 2x - 8$

24. $f(x) = x^3 - 6x + 1$

25. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

26. $f(x) = x^5 - 4x^3 + x - 1$

27. $f(x) = \dfrac{4x}{x+2}$

28. $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-x-2}$

29. $f(x) = \operatorname{sen} 3x$

30. $f(x) = \tan 4x$

31. $f(x) = \operatorname{sen} x + 2\cos x$

32. $f(x) = \sec 2x$

33. $f(x) = 4e^{2x}$

34. $f(x) = 3e^{-4x}$

35. $f(x) = \ln 3x$

36. $f(x) = e^{\ln 2x}$

37. Hallar las intersecciones con los ejes de $y = x^2 + 2x - 8$ (véase ejercicio 23).

38. Hallar las intersecciones con los ejes de $y = x^4 - 2x^2 + 1$ (véase ejercicio 25).

39. Hallar las intersecciones con los ejes de $y = \dfrac{4x}{x+2}$ (véase ejercicio 27).

40. Hallar las intersecciones con los ejes de $y = \dfrac{x-2}{x^2-x-2}$ (véase ejercicio 28).

**En los ejercicios 41-44, hallar o estimar los ceros de la función.**

41. $f(x) = x^2 - 3x - 10$

42. $f(x) = x^3 + 4x^2 + 3x$

43. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

44. $f(x) = x^4 - 3x - 2$

**En los ejercicios 45 y 46, determinar el número de soluciones.**

45. $\operatorname{sen} x = x^3$

46. $\sqrt{x^2 + 1} = x^2 - 1$

**En los ejercicios 47 y 48, discutir si la función es periódica o no.**

47. $f(x) = \cos 2x + 2 \operatorname{sen} 4x$

48. $f(x) = \operatorname{sen} 4x + 2\cos \pi x$

49. Alguien, tumbado a 50 pies de distancia de un poste de teléfonos, mide un ángulo de 34° entre la base y el punto más alto. ¿Qué altura tiene el poste?

50. Hallar $\operatorname{sen}\theta$ sabiendo que $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ y $\cos\theta = \dfrac{1}{5}$.

51. Pasar a forma de fracción o de raíz: (a) $5^{-1/2}$ (b) $3^{-2}$.

52. Pasar a forma exponencial: (a) $\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ (b) $\dfrac{3}{x^2}$.

53. Reescribir $\ln 8 - 2\ln 2$ como un solo logaritmo.

54. Resolver la ecuación $e^{\ln 4x} = 8$.

**En los ejercicios 55 y 56, resolver la ecuación.**

55. $3e^{2x} = 8$

56. $2\ln 3x = 5$.

**En los ejercicios 57 y 58, hallar $f \circ g$ y $g \circ f$ e identificar sus dominios respectivos.**

57. $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x-1}$

58. $f(x) = x^2$, $g(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$

**En los ejercicios 59 y 60, identificar funciones $f$ y $g$ tales que la función propuesta se escriba como $(f \circ g)(x)$.**

59. $e^{3x^2+2}$

60. $\sqrt{\operatorname{sen} x + 2}$

**En los ejercicios 61 y 62, completar el cuadrado y explicar cómo transformar la gráfica de $y = x^2$ en la gráfica de la función dada.**

61. $f(x) = x^2 - 4x + 1$

62. $f(x) = x^2 + 4x + 6$

**En los ejercicios 63 y 64, estimar numéricamente la pendiente de $y = f(x)$ en $x = a$.**

63. $f(x) = x^2 - 2x$, $a = 2$

64. $f(x) = \operatorname{sen} 2x$, $a = 0$

**En los ejercicios 65 y 66, estimar numéricamente la longitud de la curva usando (a) $n = 4$ y (b) $n = 8$ segmentos rectos y coordenadas $x$ uniformemente espaciadas.**

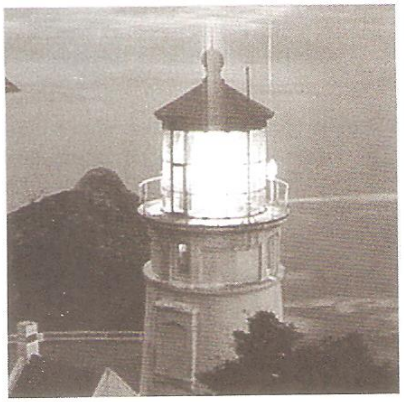
65. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $0 \le x \le \dfrac{\pi}{4}$

66. $f(x) = x^2 - x$, $0 \le x \le 2$

**En los ejercicios 67 y 68, evaluar los cuatro primeros términos de la sucesión y conjeturar el valor de $\lim_{n\to\infty} a_n$.**

67. $a_n = \dfrac{3}{n^2-3}$, $n \ge 2$

68. $a_n = 2 - \dfrac{3n}{n^2+1}$, $n \ge 0$



# CAPÍTULO 1

# LÍMITES Y CONTINUIDAD

Al entrar en una habitación oscura, nuestros ojos se adaptan a la escasez de luz aumentando el tamaño de las pupilas, de modo que reciban más luz y sea más fácil ver los objetos. Por el contrario, al entrar en un lugar con luz intensa, las pupilas se contraen para reducir la cantidad de luz que entra por los ojos. Es necesario porque con demasiada intensidad luminosa nuestro sentido de la vista no funciona. Es una sensación que se experimenta durante un paseo en días soleados o cuando el oftalmólogo dilata nuestras pupilas para examinar el fondo del ojo. La dilatación agranda las pupilas, incapaces en consecuencia de controlar la cantidad excesiva de luz incidente.

Algunos animales poseen también este mecanismo de ajuste automático. Los investigadores estudian el fenómeno en experimentos e intentan formular matemáticamente sus resultados. Sería deseable, por ejemplo, expresar el tamaño de la pupila como función de la intensidad luminosa presente. Dos características básicas exigibles a un tal **modelo matemático** son:

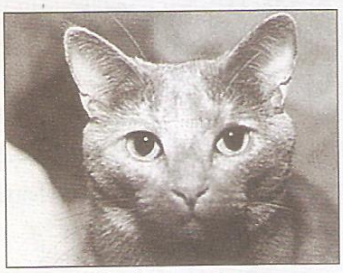
1. Al crecer la intensidad luminosa ($x$), el tamaño de la pupila ($y$) decrece.
2. Al decrecer la intensidad luminosa ($x$), el tamaño de la pupila ($y$) crece.

Pupilas pequeñas.

Una función lineal con pendiente negativa satisface ambos requisitos [por ejemplo, $f(x) = 1 - x$].

Sin embargo, hay otros factores a tener en cuenta. Por ejemplo, el tamaño de la pupila no puede ser negativo. De hecho, cada animal tiene un tamaño mínimo de pupila del que no puede bajar. Por esa razón, bajo una luminosidad muy intensa, nos vemos obligados a cerrar los ojos. También hay un tamaño máximo que las pupilas no pueden sobrepasar. Por eso, si la oscuridad es casi total, no podemos ver. Así, pues, tenemos que modificar los principios anteriores de nuestro modelo como sigue:

1. Al crecer la intensidad ($x$), el tamaño de la pupila ($y$) decrece hacia un valor mínimo $p$.
2. Al decrecer la intensidad ($x$), el tamaño de la pupila ($y$) crece hacia un tamaño máximo $P$.



Pupilas grandes.

Hallar una función con esas propiedades ya no es tan fácil (¡inténtelo!). Una gráfica posible de tal función sería la de la figura 1.1.

En este capítulo desarrollamos el concepto de **límite**, útil en la descripción de una función con las características citadas. En el caso de un modelo matemático para el tamaño de la pupila, queremos que el límite sea $P$ cuando la intensidad luminosa decrece hacia cero y que

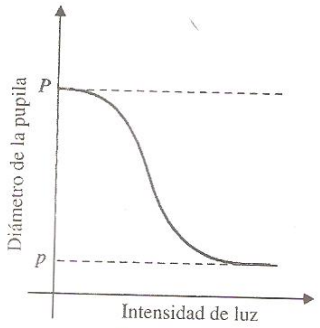



**Figura 1.1**
Tamaño de la pupila.

sea $p$ cuando la intensidad crece hacia infinito. El cálculo y la visualización de este tipo de límites es el objetivo principal de este capítulo.

El concepto de límite constituye la noción fundamental del Cálculo. Es la amalgama que une todo cuanto abarca el estudio posterior del Cálculo. Aparecerán límites en la definición de casi todos los conceptos relevantes del Cálculo: continuidad, derivada, integral definida, sucesiones y series.

Si se pretende **comprender** todo cuanto el Cálculo encierra, es preciso algo más que un conocimiento superficial sobre los límites. No nos referimos sólo a la capacidad de calcular límites, porque esto, por sí sólo, es insuficiente. Invertir tiempo ahora en un estudio profundo del concepto de límite dará excelentes dividendos en nuestro recorrido por las sendas del Cálculo.

## 1.1 EL CONCEPTO DE LÍMITE

En esta sección presentamos la noción de límite en términos coloquiales y la ilustramos con ejemplos sencillos. Es una noción sutil, fácil de manejar intuitivamente, pero difícil de plasmar con rigor. Relegamos a la sección 1.5 la definición precisa del concepto de límite. La presentación informal que introducimos a continuación es adecuada a muchos efectos.

Para empezar, consideremos las funciones

$$f(x) = \frac{x^2 - 5}{x - 2} \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}.$$

¿Qué es lo primero que se observa en ellas? Que no están definidas en $x = 2$. ¿Qué significa eso aparte de que no podemos sustituir $x = 2$? Con frecuencia, una gráfica en la calculadora proporciona claves importantes sobre el comportamiento de funciones (figuras 1.2a y 1.2b). Antes de analizar con cuidado ese par de funciones vamos a comentar algunas deficiencias de estas gráficas.

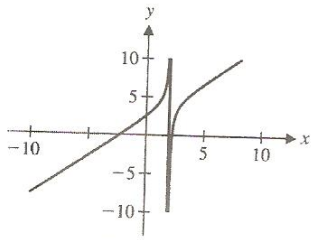



**Figura 1.2a**
$y = \dfrac{x^2 - 5}{x - 2}$.

Muchas calculadoras dibujan el segmento vertical que aparece en la figura 1.2a, aunque **no** forma parte de la gráfica real. Se debe al intento de la calculadora de unir dos puntos, uno ligeramente a la izquierda de $x = 2$ y otro a la derecha, donde un valor de la función es grande y positivo y el otro muy negativo. Ese segmento recto vertical sugiere la asíntota vertical indicada correctamente en la figura 1.2c como la recta de trazo discontinuo $x = 2$. Esos segmentos verticales suelen indicar la existencia de asíntotas verticales. Discutimos las asíntotas con más calma en la sección 1.4.

La gráfica de la figura 1.2b, generada en una calculadora, parece ser una recta sin nada reseñable en las proximidades de $x = 2$. En realidad, en la gráfica verdadera de $y = g(x)$ hay un hueco en $x = 2$, pero no es visible en la figura 1.2b.

Ésta es otra limitación de la calculadora o de los programas de cálculo simbólico (PCS). No son capaces de mostrar que falta un punto en la gráfica. Indicaremos tales puntos con un circulito hueco como el de la figura 1.2d

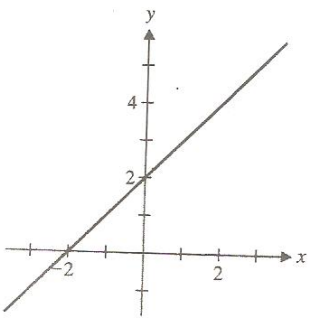



**Figura 1.2b**
$y = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$.

Las gráficas de las dos funciones son muy distintas en el entorno de $x = 2$. Aunque no podemos afirmar nada acerca del valor de las dos funciones en $x = 2$ (ya que ese valor de $x$

| $x$ | $f(x) = \dfrac{x^2 - 5}{x - 2}$ | $g(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ |
|---|---|---|
| 1,9 | 13,9 | 3,9 |
| 1,99 | 103,99 | 3,99 |
| 1,999 | 1.003,999 | 3,999 |
| 1,9999 | 10.003,9999 | 3,9999 |
| 1,99999 | 100.003,99999 | 3,99999 |
| 1,999999 | 10.000.004 | 3,999999 |

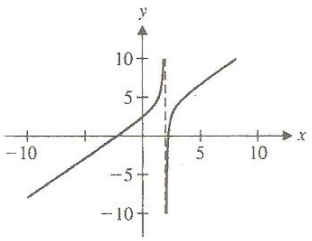



**Figura 1.2c**

$$y = \frac{x^2 - 5}{x - 2}.$$

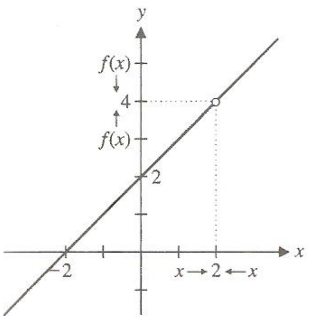



**Figura 1.2d**

$$y = \frac{x^2 - 4}{x - 2}.$$

está fuera del dominio de ambas), podemos examinar su comportamiento cerca de ese punto. Es útil evaluar las funciones en varios puntos próximos, como recoge la tabla anterior.

Al bajar por la primera columna de la tabla, los valores de $x$ se van acercando a 2, pero son menores que 2. Tanto la tabla como la gráfica sugieren que cuando $x$ **tiende a 2 por la izquierda**, denotado como $x \to 2^-$, $g(x)$ se acerca más y más a 4. En vista de ello, decimos que **el límite de $g(x)$ cuando $x$ tiende a 2 por la izquierda es 4**, expresado por el símbolo

$$\lim_{x \to 2^-} g(x) = 4.$$

Por otra parte, la tabla y la gráfica indican que cuando $x$ se va acercando a 2 por valores menores que 2, $f(x)$ crece sin tope. Puesto que no existe un número al que $f(x)$ se acerque más y más, decimos que **el límite de $f(x)$ cuando $x$ tiende a 2 por la izquierda no existe**, lo que expresaremos por el símbolo

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) \text{ no existe}$$

Análogamente, veamos qué sucede con los valores de las funciones cuando $x$ se acerca a 2 por valores mayores que 2. Usaremos la notación $x \to 2^+$ para expresar que **$x$ tiende a 2 por la derecha**. La tabla muestra algunos de esos valores.

| $x$ | $f(x) = \dfrac{x^2 - 5}{x - 2}$ | $g(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ |
|---|---|---|
| 2,1 | –5,9 | 4,1 |
| 2,01 | –95,99 | 4,01 |
| 2,001 | –995,999 | 4,001 |
| 2,0001 | –9.995,9999 | 4,0001 |
| 2,00001 | –99.995,99999 | 4,00001 |
| 2,000001 | –999.995,999999 | 4,000001 |

De nuevo, la tabla y la figura sugieren que $g(x)$ se acerca más y más a 4, por lo que diremos que **el límite de $g(x)$ cuando $x$ tiende a 2 por la derecha es 4**; en símbolos,

$$\lim_{x \to 2^+} g(x) = 4.$$

Finalmente, tabla y gráfica sugieren que $f(x)$ decrece sin tope cuando $x$ tiende a 2 por la derecha. Como no hay ningún número al que tienda $f(x)$, decimos que

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) \text{ no existe.}$$

Se llama **límites laterales** a $\lim_{x \to 2^-} g(x)$ y $\lim_{x \to 2^-} g(x)$. El hecho de que los dos límites laterales de $g(x)$ son iguales, se resume diciendo que **el límite de $g(x)$ cuando $x$ tiende a 2 es 4**; en símbolos

$$\lim_{x \to 2} g(x) = 4.$$

Por otra parte, como no hay valor común para los límites laterales de $f(x)$ (de hecho, no existen), se dice que **el límite de $f(x)$ cuando $x$ tiende a 2 no existe**; en símbolos

$$\lim_{x \to 2} f(x) \text{ no existe.}$$

Antes de seguir, un par de advertencias. En primer lugar, **un límite existe si, y sólo si, los dos límites laterales existen y son iguales**. Esto es,

$$\lim_{x \to a} f(x) = L, \text{ para algún número } L, \text{ si, y sólo si, } \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L.$$

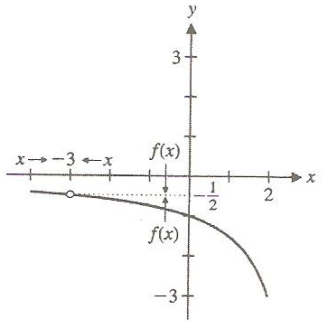



**Figura 1.3**

$$\lim_{x \to -3} \frac{3x+9}{x^2-9} = -\frac{1}{2}.$$

| $x$ | $\dfrac{3x+9}{x^2-9}$ |
|---|---|
| −3,1 | −0,491803 |
| −3,01 | −0,499168 |
| −3,001 | −0,499917 |
| −3,0001 | −0,499992 |
| −3,00001 | −0,499999 |

| $x$ | $\dfrac{3x+9}{x^2-9}$ |
|---|---|
| −2,9 | −0,508475 |
| −2,99 | −0,500835 |
| −2,999 | −0,500083 |
| −2,9999 | −0,500008 |
| −2,99999 | −0,500001 |

Y en segundo lugar, la noción de límite analiza el comportamiento de la función cerca de un cierto punto de interés, pero no en el propio punto.

Observemos ahora que factorizando el numerador de $g(x)$ podemos escribir

$$\lim_{x \to 2} g(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} \quad \text{Cancelar los factores } (x-2).$$

$$= \lim_{x \to 2} (x+2) = 4, \quad \text{Cuando } x \text{ tiende a 2, } (x+2) \text{ tiende a 4.}$$

donde hemos cancelado los factores $(x - 2)$ porque al calcular el límite para $x \to 2$, $x$ es próximo a 2, pero $x \neq 2$, de manera que $x - 2 \neq 0$.

### Ejemplo 1.1 Un límite en el que se cancelan factores

Calcular $\lim_{x \to -3} \dfrac{3x+9}{x^2-9}$.

**Solución** El dominio de la función incluye todos los $x$ excepto $x = \pm 3$. Nuevamente, examinamos una gráfica (figura 1.3) y evaluamos la función en varios valores de $x$ próximos a −3. Ante la doble evidencia, gráfica y numérica, es razonable conjeturar que

$$\lim_{x \to -3^+} \frac{3x+9}{x^2-9} = \lim_{x \to -3^-} \frac{3x+9}{x^2-9} = -\frac{1}{2}.$$

Nótese, además, que

$$\lim_{x \to -3^-} \frac{3x+9}{x^2-9} = \lim_{x \to -3^-} \frac{3(x+3)}{(x+3)(x-3)} \quad \text{Cancelar los factores } (x+3).$$

$$= \lim_{x \to -3^-} \frac{3}{x-3} = -\frac{1}{2},$$

ya que $(x - 3) \to -6$ cuando $x \to -3$. Una vez más la cancelación de $(x + 3)$ es válida porque en el estudio del límite para $x \to -3$, $x$ es próximo a −3, pero $x \neq -3$, por lo que $x + 3 \neq 0$. Del mismo modo,

$$\lim_{x \to -3^+} \frac{3x+9}{x^2-9} = -\frac{1}{2}.$$

Finalmente, como los dos límites laterales de la función son iguales, podemos escribir

$$\lim_{x \to -3} \frac{3x+9}{x^2-9} = -\frac{1}{2}.$$

En el ejemplo 1.1, el límite existe porque los límites laterales existen y son iguales. En el ejemplo que sigue ninguno de los límites laterales existe.

### Ejemplo 1.2 Un límite que no existe

Analizar si $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x}$ existe o no.

**Solución** Representamos la gráfica de la función $y = \frac{1}{x}$ (figura 1.4) y la evaluamos en algunos $x$ cercanos a 0 (es fácil hacerlo a mano).

Observamos que cuando $x \to 0^+$, $\frac{1}{x}$ crece sin tope. Así, pues,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} \text{ no existe.}$$

Análogamente, se ve que

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} \text{ no existe.}$$

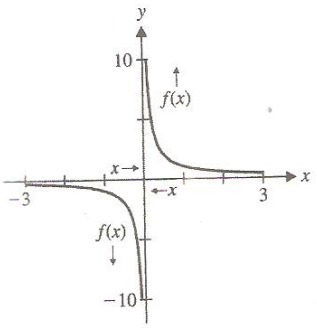



**Figura 1.4**

$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ no existe.

| $x$ | $\frac{1}{x}$ |
|---|---|
| 0,1 | 10 |
| 0,01 | 100 |
| 0,001 | 1.000 |
| 0,0001 | 10.000 |
| 0,00001 | 100.000 |

| $x$ | $\frac{1}{x}$ |
|---|---|
| −0,1 | −10 |
| −0,01 | −100 |
| −0,001 | −1.000 |
| −0,0001 | −10.000 |
| −0,00001 | −100.000 |

Como ninguno de los dos límites laterales existe, decimos que

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \text{ no existe.}$$

Hemos estudiado los dos límites laterales con el fin de hacer el análisis completo. Pero debe quedar claro que en cuanto uno de los límites laterales no existe, el límite no existe.

### Ejemplo 1.3 Estimación del valor de un límite

Hallar $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x}$.

**Solución** Contrariamente a lo que ocurría en límites anteriores, aquí el álgebra no ayuda a simplificar la expresión. Pero aún podemos disponer de una gráfica (figura 1.5) y de unos cuantos valores de la función.

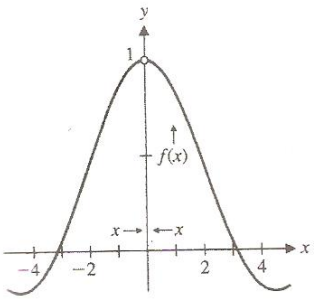



**Figura 1.5**

$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$

| $x$ | $\frac{\text{sen } x}{x}$ |
|---|---|
| 0,1 | 0,998334 |
| 0,01 | 0,999983 |
| 0,001 | 0,99999983 |
| 0,0001 | 0,9999999983 |
| 0,00001 | 0,999999999983 |

| $x$ | $\frac{\text{sen } x}{x}$ |
|---|---|
| −0,1 | 0,998334 |
| −0,01 | 0,999983 |
| −0,001 | 0,99999983 |
| −0,0001 | 0,9999999983 |
| −0,00001 | 0,999999999983 |

La gráfica y la tabla de valores sugieren que

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\text{sen } x}{x} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{\text{sen } x}{x} = 1,$$

lo que nos lleva a conjeturar el valor

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1.$$

**Nota 1.1**

Las calculadoras no resultan fiables en el cálculo de límites. Usamos gráficas y tablas de valores tan sólo como (fuerte) evidencia de lo que puede ser la respuesta. Para estar seguros, es necesario verificar rigurosamente las conjeturas. En las próximas secciones veremos cómo hacerlo.

En el Capítulo 2 examinamos este límite con más cuidado (y confirmaremos que la conjetura es correcta).

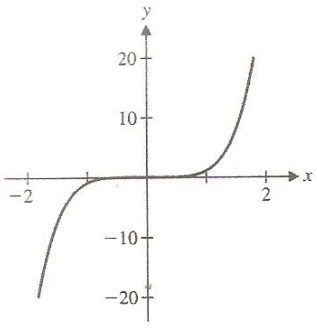



**Figura 1.6**
$y = (x + 0{,}01)^5$.

### Ejemplo 1.4 Un límite en el que las estimaciones son falaces

Examinar $\lim_{x \to 0} (x + 0{,}01)^5$.

**Solución** Veamos qué ocurre gráfica y numéricamente. La figura 1.6 muestra una gráfica de $y = (x + 0{,}01)^5$. La tabla de valores adjunta también puede ser de utilidad.

| $x$ | $(x + 0{,}01)^5$ |
|---|---|
| 0,1 | $1{,}611 \times 10^{-5}$ |
| 0,01 | $3{,}2 \times 10^{-9}$ |
| 0,001 | $1{,}611 \times 10^{-10}$ |
| 0,0001 | $1{,}051 \times 10^{-10}$ |

| $x$ | $(x + 0{,}01)^5$ |
|---|---|
| −0,1 | $-5{,}905 \times 10^{-6}$ |
| −0,01 | 0,0 |
| −0,001 | $5{,}905 \times 10^{-11}$ |
| −0,0001 | $9{,}51 \times 10^{-11}$ |

¿Qué cabe concluir de ambas? A primera vista, es tentador concluir que $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$. Pero un examen más reposado permite ver que cuando $x \to 0$, $(x + 0{,}01) \to 0{,}01$, lo que implicaría que $(x + 0{,}01)^5 \to 0{,}01^5 = 1 \times 10^{-10}$. Añada dos o tres líneas más a la tabla para ver qué se nos está escapando. Moraleja: hay que ser muy escéptico ante las respuestas generadas por calculadora. Puede alegarse que, después de todo, la respuesta no estaba tan lejos de la verdad. Por desgracia, éste no es el único tipo de error que cabe esperar. En la sección 1.6 investigaremos errores más serios y difíciles de detectar.

### Ejemplo 1.5 Un caso en el que los límites laterales son necesarios

Calcular $\lim_{x \to 0} \dfrac{x}{|x|}$.

**Solución** La gráfica generada en la calculadora (figura 1.7a) es reveladora. Ya hemos advertido que la calculadora puede trazar un segmento vertical para unir los dos segmentos horizontales. De nuevo, ese segmento vertical no forma parte de la gráfica, sino que proviene del intento de la calculadora por unir puntos a cada lado del eje $x$. En este caso, no hay asíntota vertical en $x = 0$.

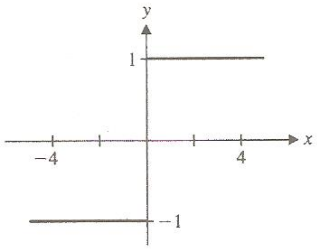



**Figura 1.7a**
$y = \dfrac{x}{|x|}$.

La gráfica de la figura 1.7b muestra correctamente dos pequeños círculos huecos en las intersecciones de sus dos mitades con el eje $y$. Además,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} \qquad \text{porque } |x| = x, \text{ si } x > 0.$$
$$= \lim_{x \to 0^+} 1$$
$$= 1$$

y

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x}{-x} \qquad \text{porque } |x| = -x, \text{ si } x < 0.$$
$$= \lim_{x \to 0^-} -1$$
$$= -1$$

de donde se sigue que

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{|x|} \text{ no existe,}$$

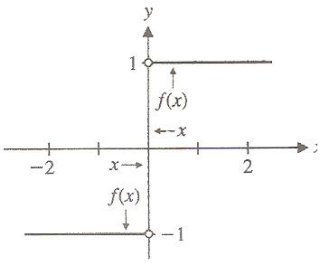


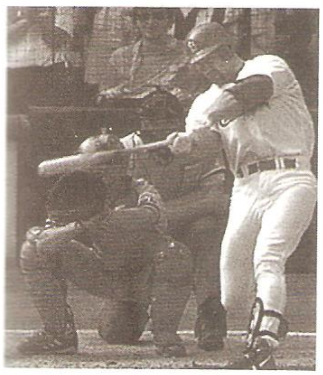

**Figura 1.7b**
$\lim_{x \to 0} \dfrac{x}{|x|}$ no existe.

y que los límites laterales no son iguales (conclusión perfectamente compatible con la gráfica). Nótese, asimismo, que la función se puede reescribir como

$$\frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0 \\ -1, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Siempre que se encuentra uno ante funciones como ésta, definidas a trozos, debe calcular los límites laterales, tal como hemos hecho en el ejemplo anterior.

## Ejemplo 1.6 Un límite asociado a un golpe de bate en béisbol



El *knuckleball* es uno de los golpes más raros del béisbol. Los bateadores afirman que la pelota se mueve en cualquier sentido de forma impredecible. Ese movimiento se debe a las costuras de la pelota, que actúan como un ala de avión, produciendo una «fuerza de ascenso» en ella. El movimiento es errático porque, mientras la pelota se mueve, la orientación de las costuras cambia y esa fuerza cambia de dirección.

Para una velocidad típica de 60 mph, la posición izquierda/derecha de la pelota (en pies) mientras cruza la base viene dada por

$$f(\omega) = \frac{1{,}7}{\omega} - \frac{5}{8\omega^2}\,\text{sen}(2{,}72\omega)$$

(según datos experimentales de Watts y Bahill en su excelente libro *Keeping Your Eye on the Ball*), donde $\omega$ es la velocidad de giro en rad/seg y donde $f(\omega) = 0$ corresponde al centro de la base. Es creencia general entre los lanzadores que cuanto menor es el giro, mejor el lanzamiento.

Para investigar esa teoría, consideremos el límite de $f(\omega)$ cuando $\omega \to 0$. Como siempre, miramos una gráfica (figura 1.8) y una tabla de valores de la función. La evidencia de ambas sugiere que $\lim_{\omega \to 0} f(\omega) = 0$.

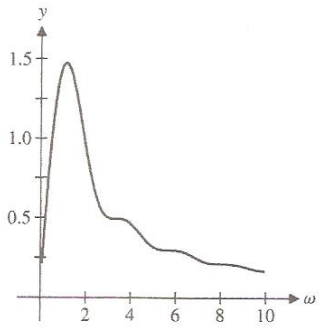



**Figura 1.8**

$$y = \frac{1{,}7}{\omega} - \frac{5}{8\omega^2}\,\text{sen}(2{,}72\omega).$$

| $\omega$ | $f(\omega)$ |
|---|---|
| 10 | 0,1645 |
| 1 | 1,4442 |
| 0,1 | 0,2088 |
| 0,01 | 0,021 |
| 0,001 | 0,0021 |
| 0,0001 | 0,0002 |

Ese límite indica que una *knuckleball* sin giro no se mueve en absoluto (y, por tanto, sería muy fácil de batear). Según Watts y Bahill, una rotación muy lenta, de entre 1 y 3 rad/seg, produce el mejor lanzamiento. Una ojeada a la figura 1.8 lleva a admitir que tal afirmación es razonable.

# EJERCICIOS 1.1

1. Uno de sus compañeros afirma: «El límite de $f(x)$ cuando $x$ tiende a un valor *a es el valor que debería tener $f(a)$*». Esta afirmación, ¿qué significa? ¿Da alguna idea interesante? ¿Hay alguna falacia encerrada en ella? Sustituya las palabras en cursiva por algo que se ajuste más a su propia idea de límite.

2. Su compañero dice después: «El límite es una *predicción* del valor $f(a)$». Comparar esta afirmación con la del ejercicio 1. La inclusión de la palabra **predicción**, ¿hace más útil y correcta la idea de límite?

3. Hemos insistido en que $\lim_{x \to a} f(x)$ no depende del valor $f(a)$, ni tan siquiera de si $f(a)$ existe o no. En principio, funciones como $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq 2 \\ 13 & \text{si } x = 2 \end{cases}$ son tan «normales» como $g(x) = x^2$. Con esto en mente, explicar por qué es importante que el concepto de límite sea independiente de cómo (o de si) $f(a)$ está definido.

4. Un límite común en la vida cotidiana es la **velocidad límite**. Describir por qué este tipo de límite es muy distinto de los límites discutidos en esta sección.

5. Para las funciones cuyas gráficas se adjuntan, identificar cada límite o establecer que no existe.

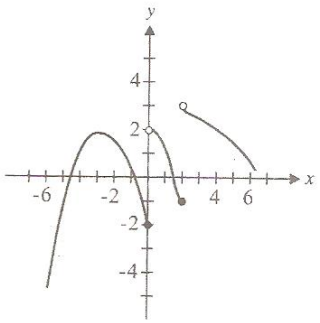
   (a) $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ (b) $\lim_{x \to 0^+} f(x)$

   (c) $\lim_{x \to 0} f(x)$ (d) $\lim_{x \to 1^-} f(x)$

   (e) $\lim_{x \to -1} f(x)$ (f) $\lim_{x \to 2^-} f(x)$

   (g) $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ (h) $\lim_{x \to 2} f(x)$

   (i) $\lim_{x \to -2} f(x)$ (j) $\lim_{x \to 3} f(x)$




6. Para las funciones cuyas gráficas se adjuntan, identificar cada límite o establecer que no existe.

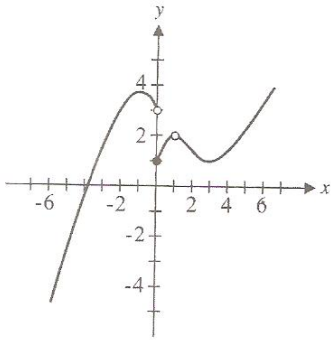
   (a) $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ (b) $\lim_{x \to 0^+} f(x)$

   (c) $\lim_{x \to 0} f(x)$ (d) $\lim_{x \to 2^-} f(x)$

   (e) $\lim_{x \to -2} f(x)$ (f) $\lim_{x \to 1^-} f(x)$

   (g) $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ (h) $\lim_{x \to 1} f(x)$

   (i) $\lim_{x \to -1} f(x)$ (j) $\lim_{x \to 3} f(x)$




7. Evaluar $f(1{,}5)$, $f(1{,}1)$, $f(1{,}01)$ y $f(1{,}001)$ y conjeturar un valor para $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ con $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$. Evaluar $f(0{,}5)$, $f(0{,}9)$, $f(0{,}99)$ y $f(0{,}999)$ y conjeturar un valor para $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ con $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$. ¿Existe $\lim_{x \to 1} f(x)$?

8. Evaluar $f(-1{,}5)$, $f(-1{,}1)$, $f(-1{,}01)$ y $f(-1{,}001)$ y conjeturar un valor para $\lim_{x \to -1^-} f(x)$ con $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-1}$. Evaluar $f(-0{,}5)$, $f(-0{,}9)$, $f(-0{,}99)$ y $f(-0{,}999)$ y conjeturar un valor para $\lim_{x \to -1^+} f(x)$ con $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-1}$. ¿Existe $\lim_{x \to -1} f(x)$?

**En los ejercicios 9-16, usar evidencia gráfica y numérica para conjeturar el valor de cada límite.**

9. $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^2-1}{x+1}$ 10. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2-1}{x+2}$

11. $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^2+x}{x^2-x-2}$ 12. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2-2x}{x^2-4}$

13. $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^2+x}{\operatorname{sen} x}$ 14. $\lim_{x \to \pi} x \operatorname{sen} x$

15. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{\operatorname{sen} x}$ 16. $\lim_{x \to 2} \sqrt{x^2-2x+2}$

**En los ejercicios 17-26, usar evidencia gráfica y numérica para conjeturar si existe o no el límite en $x = a$. Si no existe, describir qué sucede en $x = a$.**

17. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x-2}{|x-2|}$ 18. $\lim_{x \to -1} \dfrac{|x+1|}{x^2-1}$

19. $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^2-1}{x^2+2x-3}$ 20. $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2-x-6}{x^2+9}$

21. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 1}{x - 1}$

22. $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2 + 1}{x - 3}$

23. $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$

24. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 2x - 3}$

25. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1}$

26. $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - x - 6}$

27. Investigar lo siguiente con ayuda de los ejercicios 21 y 22. Sean $f(x)$ y $g(x)$ polinomios con $g(a) = 0$ y $f(a) \neq 0$. ¿Qué se puede conjeturar acerca de $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$?

28. Investigar lo siguiente con ayuda de los ejercicios 19 y 20. Sean $f(x)$ y $g(x)$ polinomios con $f(a) = 0$ y $g(a) \neq 0$. ¿Qué se puede conjeturar acerca de $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$?

**En los ejercicios 29-32, esbozar la gráfica de una función con las propiedades que se especifican.**

29. $f(-1) = 2, f(0) = -1, f(1) = 3$ y $\lim_{x \to 1} f(x)$ no existe.

30. $f(x) = 1$ para $-2 \leq x \leq 1$, $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 3$ y $\lim_{x \to -2} f(x) = 1$.

31. $f(0) = 1$, $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 2$ y $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 3$.

32. $\lim_{x \to 0} f(x) = -2, f(0) = 1, f(2) = 3$ y $\lim_{x \to 2} f(x)$ no existe.

33. Consideremos los siguientes argumentos sobre $\lim_{x \to 0^+} \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{x}$.

Primero, cuando $x > 0$ tiende a 0, $\dfrac{\pi}{x}$ crece sin tope; como sen $t$ oscila al crecer $t$, el límite no existe.

Segundo: tomando $x = 1, 0{,}1, 0{,}01, \ldots$, evaluamos sen $\pi$ = sen $10\pi$ = sen $100\pi$ = ... = 0; por tanto, el límite es 0.

¿Qué argumento le convence más? Investigar el límite para decidir si su respuesta es correcta.

34. Consideremos el siguiente argumento acerca de $\lim_{x \to 0} e^{-1/x}$.

Cuando $x$ tiende a 0, $\dfrac{1}{x}$ crece sin tope y $\dfrac{-1}{x}$ decrece sin tope. Como $e^t$ tiende a 0 cuando $t$ decrece sin tope, el límite es 0. Discutir las falacias de tal argumento.

35. Estimar numéricamente los límites

$$\lim_{x \to 0^+} (1 + x)^{1/x} \text{ y } \lim_{x \to 0^-} (1 + x)^{1/x}.$$

Nótese que los valores de la función para $x > 0$ crecen cuando $x$ decrece y para $x < 0$ decrecen cuando $x$ crece.

Explicar por qué eso indica que el límite $\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x}$ está entre valores de la función para $x$ positivos y negativos. Aproximar este límite con ocho dígitos correctos.

36. Explicar qué falla en este argumento (véase el ejercicio 35 para confirmar que es falso, pero dar la explicación sin referencia a él): cuando $x \to 0$, es claro que $(1 + x) \to 1$. Como 1 elevado a cualquier potencia es 1, $\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = \lim_{x \to 0} (1)^{1/x} = 1$.

37. Estimar numéricamente $\lim_{x \to 0^+} x^{\sec x}$ e intentar estimar $\lim_{x \to 0^-} x^{\sec x}$.

Si su calculadora tiene dificultad para evaluar la función en $x$ negativos, explique por qué.

38. Explicar por qué es falso el siguiente argumento (por el ejercicio 37, la respuesta es casualmente correcta): como 0 elevado a cualquier potencia es 0, $\lim_{x \to 0} x^{\sec x} = \lim_{x \to 0} 0^{\sec x} = 0$.

39. Dar un ejemplo de función $f(x)$ para la que $\lim_{x \to 0} f(x)$ existe, pero $f(0)$ no existe. Dar otra función $g(x)$ para la que $g(0)$ existe, pero $\lim_{x \to 0} g(x)$ no existe.

40. Dar un ejemplo de función $f(x)$ para la que $\lim_{x \to 0} f(x)$ y $f(0)$ existen, pero $\lim_{x \to 0} f(x) \neq f(0)$.

41. En el texto hemos dicho que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ significa que «cuando $x$ se acerca cada vez más al valor $a$, $f(x)$ se acerca más y más a $L$». Cuando $x$ se acerca cada vez más a 0, es cierto que $x^2$ se va aproximando más y más a –0,01 y, sin embargo, no es verdad que $\lim_{x \to 0} x^2 = -0{,}01$. Intente modificar la descripción del límite de forma que quede claro que $\lim_{x \to 0} x^2 \neq -0{,}01$. En la sección 1.5 estudiaremos la definición precisa de límite.

42. (Los resultados obtenidos en este ejercicio dependen de la precisión de la calculadora utilizada. Compare los resultados con los de los compañeros).

Vamos a investigar $\lim_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x^2}$. Empezamos verificando las evaluaciones de la tabla:

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0,1 | –0,499583 ... |
| 0,01 | –0,49999583 ... |
| 0,001 | –0,4999999583 ... |

Describa del modo más preciso posible la pauta observada. ¿Cuál es su predicción para $f(0{,}0001)$? ¿Y para $f(0{,}00001)$? ¿Da su calculadora esa respuesta? Si se intenta con 0,000001, 0,0000001, ..., acabará apareciendo como resultado –0,5. ¿Cree que ésta es la respuesta exacta o ha sido redondeada? ¿Por qué es inevitable el redondeo? Resulta que –0,5 es el valor exacto del límite en cuestión, así que el redondeo ha sido útil. No obstante, si continúa evaluando la función en valores más y más pequeños de $x$, acabará viendo un valor 0. Este redondeo no es tan benigno; discutiremos este error en la sección 1.6. Por ahora, evaluar cos $x$ en $x$ y explicar de dónde proviene ese 0.

## 1.2 CÁLCULO DE LÍMITES

Ahora que ya tenemos idea (intuitiva) de qué es un límite, necesitamos métodos para calcular límites de funciones simples. En esta sección presentamos varias reglas básicas, comenzando por dos sencillas.

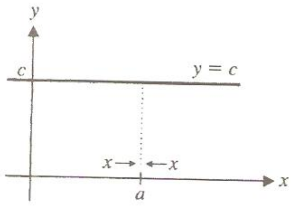



**Figura 1.9**

$\lim_{x \to a} c = c.$

**Teorema 2.1**

Para cualquier constante $c$ y cualquier número real $a$,

$$\lim_{x \to a} c = c.$$

No es sorprendente: la función $f(x) = c$ no depende de $x$, de modo que permanece invariable cuando $x \to a$ (véase figura 1.9).

**Teorema 2.2**

Para cualquier número real $a$,

$$\lim_{x \to a} x = a.$$

Tampoco esto resulta sorprendente, ya que cuando $x \to a$, $x$ se acerca hacia $a$ (figura 1.10). Conviene familiarizarse con la notación de límite hasta ver como evidentes los teoremas 2.1 y 2.2. Los utilizaremos con frecuencia al calcular límites más complicados. Necesitamos también las reglas básicas del teorema siguiente.

**Teorema 2.3**

Si $\lim_{x \to a} f(x)$ y $\lim_{x \to a} g(x)$ existen y $c$ es una constante, entonces

(i) $\lim_{x \to a} [c \cdot f(x)] = c \cdot \lim_{x \to a} f(x),$

(ii) $\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x),$

(iii) $\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]\left[\lim_{x \to a} g(x)\right],$

(iv) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$ (si $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$).

La demostración del teorema 2.3 (apéndice A) requiere el concepto riguroso de límite (sección 1.5). Dado el conocimiento intuitivo que se tiene en este momento de los límites, todas estas reglas parecen evidentes. Conviene traducirlas al lenguaje ordinario. Por ejemplo, (ii) afirma que el límite de una suma (o de una diferencia) es igual a la suma (o diferencia) de los límites, *supuesto que éstos existen.*

El próximo resultado se deduce del teorema 2.3 (iii) sin más que tomar $g(x) = f(x)$. (Un resultado que se sigue inmediatamente de otro se llama **corolario**).

**Corolario 2.1**

Si $\lim_{x \to a} f(x)$ existe,

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^2 = \lim_{x \to a} [f(x) \cdot f(x)]$$

$$= \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]\left[\lim_{x \to a} f(x)\right].$$

Análogamente, podemos aplicar el teorema 2.3 (iii) repetidamente para obtener

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^n = \left[ \lim_{x \to a} f(x) \right]^n \tag{2.1}$$

(véanse ejercicios 57 y 58).

El próximo resultado es consecuencia directa de (2.1) y del teorema 2.2.

---

**Corolario 2.2**

Para cualquier entero $n > 0$ y cualquier número real $a$,

$$\lim_{x \to a} x^n = a^n.$$

---

Este último resultado dice que para hallar el límite de cualquier potencia positiva de $x$ basta sustituir el valor de $x$ en el que se desea calcular el límite.

### Ejemplo 2.1 Límite de una potencia

Calcular $\lim_{x \to -2} x^5$.

**Solución** Por el corolario 2.2,

$$\lim_{x \to -2} x^5 = (-2)^5 = -32.$$

### Ejemplo 2.2 Límite de un polinomio

Aplicar las reglas de los límites para calcular $\lim_{x \to 2} (3x^2 - 5x + 4)$.

**Solución**

$$\lim_{x \to 2} (3x^2 - 5x + 4) = \lim_{x \to 2} (3x^2) - \lim_{x \to 2} (5x) + \lim_{x \to 2} 4 \qquad \text{Por el teorema 2.3 (ii).}$$

$$= 3 \lim_{x \to 2} x^2 - 5 \lim_{x \to 2} x + 4 \qquad \text{Por el teorema 2.3 (i).}$$

$$= 3 \cdot (2)^2 - 5 \cdot 2 + 4 = 6. \qquad \text{Por el corolario 2.2.}$$

### Ejemplo 2.3 Límite de una función racional

Aplicar las reglas de los límites para calcular $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 5x + 4}{x^2 - 2}$.

**Solución**

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 5x + 4}{x^2 - 2} = \frac{\lim_{x \to 3} (x^3 - 5x + 4)}{\lim_{x \to 3} (x^2 - 2)} \qquad \text{Por el teorema 2.3 (iv).}$$

$$= \frac{\lim_{x \to 3} x^3 - 5 \lim_{x \to 3} x + \lim_{x \to 3} 4}{\lim_{x \to 3} x^2 - \lim_{x \to 3} 2} \qquad \text{Por el teorema 2.3 (i) y (ii).}$$

$$= \frac{3^3 - 5 \cdot 3 + 4}{3^2 - 2} = \frac{16}{7}. \qquad \text{Por el corolario 2.2.}$$

---

En este punto el lector puede estar algo escamado. Después de todo, en los dos ejemplos últimos hemos terminado por sustituir el valor de $x$ tras muchos pasos intermedios. En el próximo ejemplo las cosas no son tan sencillas.

**Ejemplo 2.4** **Cálculo de un límite por factorización**

Calcular $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{1 - x}$.

**Solución** Nótese que

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{1 - x} \neq \frac{\lim_{x \to 1} (x^2 - 1)}{\lim_{x \to 1} (1 - x)},$$

ya que el límite del denominador es 0. (Recordemos que el límite de un cociente es el cociente de los límites **sólo** si ambos límites existen **y** el del denominador **no** es cero). No obstante, podemos resolver el problema observando que

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{1 - x} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{-(x - 1)}$$

Factorizar el numerador y factorizar $-1$ como denominador

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x + 1)}{-1} = -2,$$

donde la cancelación de $(x - 1)$ es válida porque al calcular el límite para $x \to 1$, $x$ es próximo a 1, pero $x \neq 1$, de manera que $x - 1 \neq 0$.

El próximo teorema demuestra que el límite de un polinomio es simplemente el valor del polinomio en el punto. Es decir, para calcular el límite de un polinomio cuando $x \to a$, basta sustituir en él $x = a$.

**Teorema 2.4**

Para cualquier polinomio $p(x)$ y cualquier número real $a$,

$$\lim_{x \to a} p(x) = p(a)$$

**Demostración**

Sea $p(x)$ un polinomio de grado $n \geq 0$,

$$p(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0.$$

Por el teorema 2.3 y el corolario 2.2,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} p(x) &= \lim_{x \to a} (c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0) \\ &= c_n \lim_{x \to a} x^n + c_{n-1} \lim_{x \to a} x^{n-1} + \cdots + c_1 \lim_{x \to a} x + \lim_{x \to a} c_0 \\ &= c_n a^n + c_{n-1} a^{n-1} + \cdots + c_1 a + c_0 = p(a). \end{aligned}$$

Ahora ya es muy fácil calcular límites de polinomios.

**Ejemplo 2.5** **Límite de un polinomio**

Calcular $\lim_{x \to 4} (2x^2 - 3x + 12)$.

**Solución** Según el teorema 2.4, basta sustituir $x = 4$:

$$\lim_{x \to 4} (2x^2 - 3x + 12) = 2 \cdot 4^2 - 3 \cdot 4 + 12 = 32.$$

El teorema que sigue parece plausible.

**Teorema 2.5**

Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $n$ es cualquier entero positivo,

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{L},$$

donde si $n$ es par se supone $L > 0$.

La demostración puede verse en el apéndice A. Este resultado afirma que podemos (bajo las condiciones del enunciado) meter el símbolo de límite dentro de una raíz $n$-ésima. Para calcular el límite interior disponemos de las reglas ya conocidas.

**Ejemplo 2.6** **Límite de una raíz de un polinomio**

Calcular $\lim_{x \to 2} \sqrt[5]{3x^2 - 2x}$.

**Solución** Por los teoremas 2.4 y 2.5,

$$\lim_{x \to 2} \sqrt[7]{3x^2 - 2x} = \sqrt[5]{\lim_{x \to 2} (3x^2 - 2x)} = \sqrt[5]{8}.$$

Con el fin de poder manejar funciones más generales que las algebraicas (se llama así a las formadas usando suma, diferencia, multiplicación, división, exponenciación y raíces), enunciamos el siguiente teorema.

**Teorema 2.6**

Para cualquier número real $a$,

(i) $\lim_{x \to a} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a$,

(ii) $\lim_{x \to a} \cos x = \cos a$,

(iii) $\lim_{x \to a} e^x = e^a$,

(iv) $\lim_{x \to a} \ln x = \ln a$, para $a > 0$.

En otras palabras, los límites de las funciones seno, coseno, exponencial y logaritmo natural se calculan por sustitución directa.

**Ejemplo 2.7** **Límite de un cociente de funciones trigonométricas**

Calcular $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$.

**Solución** Por los teoremas 2.3 y 2.6,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x}{\lim_{x \to 0} \cos x} = \frac{0}{1} = 0.$$

Basta ya de límites calculables mediante las reglas elementales, aunque son muchos en la práctica. Sin embargo, otros tantos no son calculables con esas reglas y exigen un análisis más profundo, a menudo por vías indirectas. Por ejemplo, consideremos el siguiente problema.

### Ejemplo 2.8 Un límite de un producto que no es el producto de los límites

Calcular $\lim_{x \to 0} (x \cot x)$.

**Solución** La primera reacción, es decir, que como es el límite de un producto, debe ser el producto de los límites:

$$\lim_{x \to 0} (x \cot x) = \left( \lim_{x \to 0} x \right)\left( \lim_{x \to 0} \cot x \right) \qquad \text{¡Esto es incorrecto!}$$

$$= 0 \cdot ? = 0, \tag{2.2}$$

donde el «?» indica que no sabemos qué hacer con $\lim_{x \to 0} \cot x$. Claro que, puesto que el primer límite es 0, ¿debemos preocuparnos por el segundo? La dificultad aquí es que estamos intentando aplicar el teorema 2.3 en un caso en el que las hipótesis del teorema no se cumplen. El teorema 2.3 asegura que el límite de un producto es el producto de los límites **cuando los límites existen**. Así, pues, ¿qué podemos decir de $\lim_{x \to 0} \cot x$? La gráfica de la función (figura 1.11) sugiere que $\lim_{x \to 0} \cot x$ no existe. La evaluación de la función en varios puntos lleva a la misma conclusión. En consecuencia, la ecuación (2.2) no es aplicable y estamos de nuevo en el punto de partida. Puesto que ninguna de nuestras reglas es aplicable, miramos una gráfica (figura 1.12) y algunos valores de la función (tabla adjunta) en un intento de ver qué está pasando. Ambas indican que los valores de la función tienden a 1 cuando $x \to 0$.

| $x$ | $x \cot x$ |
|---|---|
| ±0,1 | 0,9967 |
| ±0,01 | 0,999967 |
| ±0,001 | 0,99999967 |
| ±0,0001 | 0,9999999967 |
| ±0,00001 | 0,999999999967 |

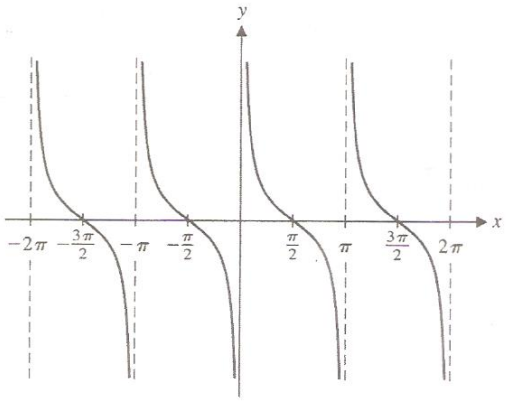



**Figura 1.11**
$y = \cot x$.

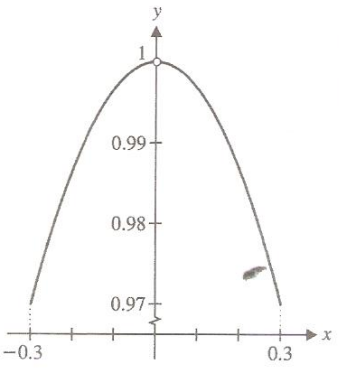



**Figura 1.12**
$y = x \cot x$.

Al dictado de la gráfica y de los valores de la tabla conjeturamos que

$$\lim_{x \to 0} (x \cot x) = 1,$$

distinto de 0, en contra de la primera impresión. Otra forma de mirar ese límite es

$$\lim_{x \to 0} (x \cot x) = \lim_{x \to 0} \left( x \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \right) = \lim_{x \to 0} \left( \frac{x}{\operatorname{sen} x} \cos x \right)$$

$$= \left( \lim_{x \to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} \right)\left( \lim_{x \to 0} \cos x \right)$$

$$= \frac{\lim_{x \to 0} \cos x}{\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}} = \frac{1}{1} = 1,$$

donde hemos usado $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$ y la conjetura del ejemplo 1.3, a saber: $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.

(Verificaremos esta conjetura en la sección 2.5 gracias al teorema del encaje que sigue a continuación).

Ahora introducimos un instrumento que nos ayudará a calcular muchos límites. Y decimos *instrumento*, no *regla*, para insistir en que la mayoría de los problemas matemáticos se resuelven mediante un análisis cuidadoso, no por simple uso de reglas.

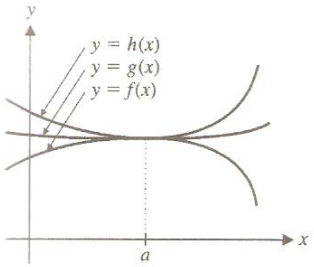



**Figura 1.13**
El teorema del encaje.

**Teorema 2.7 (Teorema del encaje)**
Supongamos que

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

para todo $x$ en algún intervalo $(c, d)$, excepto posiblemente en el punto $a \in (c, d)$ y que

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L,$$

para algún número $L$. Entonces, también

$$\lim_{x \to a} g(x) = L.$$

**Nota 2.1**

El teorema del encaje se aplica también a límites laterales.

La demostración se presenta en el apéndice A porque necesita la noción rigurosa de límite de la sección 1.5. Sin embargo, la figura 1.13 deja claro que si $g(x)$ está entre $f(x)$ y $h(x)$, excepto posiblemente en el propio $a$, y además $f(x)$ y $h(x)$ tienen el mismo límite cuando $x \to a$, entonces $g(x)$, *encajada* entre $f$ y $g$ debe tener ese mismo límite. El reto, si se desea aplicar este teorema, consiste en hallar funciones $f$ y $h$, entre las cuales esté encajada la función $g$ dada, y que tengan el mismo límite para $x \to a$.

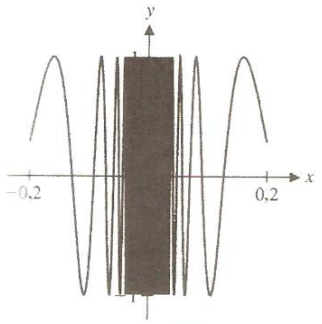



**Figura 1.14**
$y = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

**Ejemplo 2.9** **Cálculo de un límite por el teorema del encaje**

Hallar el valor de $\lim_{x \to 0} [x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)]$.

**Solución** La primera tentación es considerar el límite como límite de un producto y hacer

$$\lim_{x \to 0} \left[x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right] \stackrel{?}{=} \left(\lim_{x \to 0} x^2\right)\left[\lim_{x \to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right], \quad \text{¡Esto es incorrecto!} \qquad (2.3)$$

donde «?» advierte de que no sabemos qué hacer con $\lim_{x \to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$. La gráfica de la figura 1.14 sugiere que $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ oscila entre –1 y 1. Y cuanto más cerca está $x$ de 0, más rápida la oscilación. Calcule algunos valores de la función para convencerse de que $\lim_{x \to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ no existe. La ecuación (2.3) no sirve y estamos como al principio. Puesto que ninguna de nuestras reglas parece aplicable, recurrimos a una gráfica de $y = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ y a una tabla de valores. En la tabla apreciamos la misma oscilación visible en la gráfica.

| $x$ | $x^2 \cos(1/x)$ |
|---|---|
| ±0,1 | –0,008 |
| ±0,01 | $8{,}6 \times 10^{-5}$ |
| ±0,001 | $5{,}6 \times 10^{-7}$ |
| ±0,0001 | $-9{,}5 \times 10^{-9}$ |
| ±0,00001 | $-9{,}99 \times 10^{-11}$ |

A pesar de esa oscilación, conjeturamos que

$$\lim_{x \to 0} [x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)] = 0.$$

Podemos probarlo gracias al teorema del encaje, para lo cual hemos de encontrar funciones $f$ y $h$ tales que

$$f(x) \leq x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq h(x),$$

**Nota 2.2**

No podíamos hallar el límite del ejemplo 2.9 por las reglas del teorema 2.3 y hemos tenido que recurrir a un método indirecto. Este *tour de force* (gráficas más cálculos seguidos de análisis) será una estrategia que utilizaremos con frecuencia: investigar los problemas gráfica, numérica y analíticamente. En el ejemplo 2.9, los dos primeros ingredientes, la figura 1.15 y la tabla de valores, sugerían una conjetura plausible y el tercero proporciona su verificación.

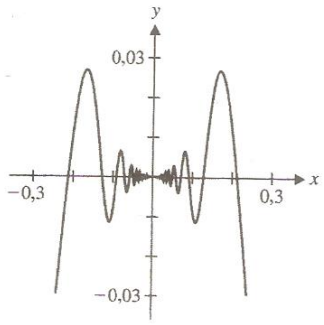



**Figura 1.15**
$y = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

para todo $x \neq 0$ y con $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} h(x) = 0$. ¿Cómo conseguirlo? La dificultad está en que sabemos poco de $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$. ¿Qué sabemos de ella? La única desigualdad sencilla para esa función es

$$-1 \leq \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1, \tag{2.4}$$

para todo $x \neq 0$. Si multiplicamos (2.4) por $x^2$ (como $x^2 \geq 0$, la desigualdad se mantiene), obtenemos

$$-x^2 \leq x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2,$$

para todo $x \neq 0$. Además,

$$\lim_{x \to 0} (-x^2) = 0 = \lim_{x \to 0} x^2.$$

Por tanto, el teorema del encaje asegura que también

$$\lim_{x \to 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0,$$

tal como habíamos conjeturado.

En muchas ocasiones las funciones vienen definidas por diferentes expresiones en otros tantos intervalos. Estas funciones **definidas a trozos**, como la del próximo ejemplo, son importantes.

**Ejemplo 2.10** **Límite de una función definida a trozos**

Calcular $\lim_{x \to 0} f(x)$, para la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2\cos x + 1, & \text{para } x < 0 \\ e^x - 4, & \text{para } x \geq 0 \end{cases}.$$

**Solución** Como $f$ está dada por expresiones distintas para $x < 0$ y $x \geq 0$, debemos investigar los límites laterales. Por el teorema 2.3,

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x^2 + 2\cos x + 1) = 2\cos 0 + 1 = 3,$$

Por otra parte,

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (e^x - 4) = e^0 - 4 = 1 - 4 = -3.$$

Como los límites laterales no coinciden, concluimos que $\lim_{x \to 0} f(x)$ no existe.

Cerramos la sección con un ejemplo de aplicación de los límites al cálculo de la velocidad. En la sección 2.1 vimos que para un móvil en línea recta, cuya posición en el instante $t$ viene dada por la función $f(t)$, la velocidad instantánea en $t = 1$ (o sea, la velocidad en el **instante** $t = 1$, por oposición a la velocidad media en algún intervalo de tiempo) viene dada por el límite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}.$$

**Ejemplo 2.11** **Un límite que describe una velocidad**

La posición de un móvil que se desplaza por una recta viene dada por

$$f(t) = t^2 + 2 \text{ (metros)},$$

con $t$ medido en segundos. Hallar su velocidad instantánea cuando $t = 1$.

**Solución** Con lo que sabemos acerca de límites, este problema es fácil. Se tiene

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{[(1+h)^2+2]-3}{h}$$

No podemos sustituir directamente $h=0$ (¿por qué no?), pero podemos escribir

$$\lim_{h\to 0}\frac{[(1+h)^2+2]-3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(1+2h+h^2)-1}{h}$$ Desarrollar el cuadrado.

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2h+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(2+h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2+h}{1}=2.$$ Cancelar el factor $h$.

Por tanto, la velocidad (instantánea) en el instante $t=1$ es 2 m/s.

## EJERCICIOS 1.2

1. Explicar por qué son evidentes los teoremas 2.1, 2.2 y 2.4 a la vista de lo que sabemos ya sobre las gráficas de polinomios. Citar cinco funciones no polinómicas cuyos límites se calculen por sustitución directa.

2. Supuesto que la gráfica de $y=f(x)$ se puede trazar sin levantar el lápiz del papel, explicar por qué $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ para todo valor de $a$.

3. Explicar el teorema del encaje. Usar una analogía real, por ejemplo, un prisionero que camina esposado entre dos policías, para poner de manifiesto por qué debe ser verdadero.

4. A la vista de la figura 1.15 y de los cálculos que la siguen, puede no estar claro por qué insistimos en usar el teorema del encaje para concluir que $\lim_{x\to 0}[x^2\cos(1/x)]$ es 0. Revise la sección 1.1 y el ejemplo 1.4 para justificar esa insistencia.

**En los ejercicios 5-32, calcular el límite que se especifica.**

5. $\lim_{x\to 0}(x^2-3x+1)$
6. $\lim_{x\to 0}\cos(x^2+\pi)$
7. $\lim_{x\to 1}\sqrt{x^2+2x+4}$
8. $\lim_{x\to 2}\sqrt[3]{2x+1}$
9. $\lim_{x\to 2}\dfrac{x-5}{x^2+4}$
10. $\lim_{x\to -2}\dfrac{x+2}{x^2-4}$
11. $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x-3}$
12. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}$
13. $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-4}$
14. $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2+x}{x^2-3x}$
15. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2+2x-3}$
16. $\lim_{x\to 3}\dfrac{x-1}{x^2+2x-3}$
17. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{\tan x}$
18. $\lim_{x\to \pi/2}(x-\pi/2)\tan x$
19. $\lim_{x\to 0}\dfrac{xe^{-2x+1}}{x^2+1}$
20. $\lim_{x\to 0}\dfrac{xe^{-2x+1}}{x^2+x}$
21. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{x}$
22. $\lim_{x\to 0^+} x^2\operatorname{cosec}^2 x$
23. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$
24. $\lim_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$
25. $\lim_{x\to 2} f(x)$, donde $f(x)=\begin{cases}3x^2-2x+1 & \text{si } x<2\\ x^3+1 & \text{si } x\geq 2\end{cases}$
26. $\lim_{x\to 0} f(x)$, donde $f(x)=\begin{cases}2x\cos x & \text{si } x<0\\ x^3+2x & \text{si } x\geq 0\end{cases}$
27. $\lim_{x\to 2} f(x)$, donde $f(x)=\begin{cases}2x & \text{si } x<2\\ x^2 & \text{si } x\geq 2\end{cases}$
28. $\lim_{x\to -1} f(x)$, donde $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & \text{si } x<-1\\ 3x+1 & \text{si } x\geq -1\end{cases}$
29. $\lim_{x\to 0} f(x)$, donde $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & \text{si } x<-1\\ 3x+1 & \text{si } x\geq -1\end{cases}$
30. $\lim_{x\to 1} f(x)$, donde $f(x)=\begin{cases}2x & \text{si } x<2\\ x^2 & \text{si } x\geq 2\end{cases}$
31. $\lim_{x\to -1} f(x)$, donde $f(x)=\begin{cases}2x+1 & \text{si } x<-1\\ 3 & \text{si } -1<x<1\\ 2x+1 & \text{si } x>1\end{cases}$
32. $\lim_{x\to 1} f(x)$, donde $f(x)=\begin{cases}2x+1 & \text{si } x<-1\\ 3 & \text{si } -1<x<1\\ 2x+1 & \text{si } x>1\end{cases}$
33. Por argumentos gráficos y numéricos, conjeturar el valor de $\lim_{x\to 0} x^2\operatorname{sen}(1/x)$. Use el teorema del encaje para demostrar que estaba en lo cierto: identificar las funciones $f(x)$ y $h(x)$, probar gráficamente que $f(x)\leq x^2\operatorname{sen}(1/x)\leq h(x)$ y justificar $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} h(x)$.

34. ¿Por qué no se puede usar el teorema del encaje como en el ejercicio 33 para demostrar que $\lim_{x \to 0} x^2 \sec(1/x) = 0$? Investigar este límite gráficamente.

35. Probar que $\lim_{x \to 0^+} [\sqrt{x}\cos^2(1/x)] = 0$ usando el teorema del encaje. Identificar las funciones $f(x)$ y $h(x)$, probar gráficamente que $f(x) \le \sqrt{x}\cos^2(1/x) \le h(x)$ para todo $x > 0$ y justificar $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$ y $\lim_{x \to 0^+} h(x) = 0$.

36. Sea $f(x)$ acotada, es decir, tal que existen constantes $m$ y $n$ con $m \le f(x) \le n$ para todo $x$. Usar el teorema del encaje para demostrar que $\lim_{x \to 0} x^2 f(x) = 0$.

**En los ejercicios 37-40, hallar el límite si existe o argumentar por qué no existe.**

37. $\lim_{x \to 4^+} \sqrt{16 - x^2}$

38. $\lim_{x \to 4^-} \sqrt{16 - x^2}$

39. $\lim_{x \to -2^+} \sqrt{x^2 + 3x + 2}$

40. $\lim_{x \to -2^-} \sqrt{x^2 + 3x + 2}$

41. Sabiendo que $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$, calcular rápidamente $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{\sqrt{1 - \cos x}}{x}$.

42. Sabiendo que $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, calcular rápidamente $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos^2 x}{x^2}$.

43. Sea $f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x < a \\ h(x) & \text{si } x > a \end{cases}$, con $g(x)$ y $h(x)$ polinomios. Explicar por qué $\lim_{x \to a^-} f(x) = g(a)$ y hallar $\lim_{x \to a^+} f(x)$.

44. Explicar cómo calcular $\lim_{x \to a} f(x)$ si $g$ y $h$ son polinomios y

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x < a \\ c & \text{si } x = a \\ h(x) & \text{si } x > a \end{cases}.$$

45. Calcular estos límites citando los teoremas apropiados para justificar cada paso.

(a) $\lim_{x \to 2} (x^2 - 3x + 1)$ (b) $\lim_{x \to 0} \dfrac{x - 2}{x^2 + 1}$

46. Calcular estos límites citando los teoremas apropiados para justificar cada paso.

(a) $\lim_{x \to -1} [(x + 1)\operatorname{sen} x]$ (b) $\lim_{x \to 1} \dfrac{xe^x}{\tan x}$

**En los ejercicios 47-50, usar la función posición $f(t)$ para calcular la velocidad en el instante $t = a$.**

47. $f(t) = t^2 + 2,\ a = 2$

48. $f(t) = t^2 + 2,\ a = 0$

49. $f(t) = t^3,\ a = 0$

50. $f(t) = t^3,\ a = 1$

51. En el Capítulo 2 se define la pendiente de la recta tangente a la curva $y = \sqrt{x}$ en $x = 1$ como $m = \lim_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + h} - 1}{h}$. Calcular la pendiente $m$. Representar $y = \sqrt{x}$ y la recta con pendiente $m$ que pasa por el punto $(1, 1)$.

52. En el Capítulo 2 se da $\lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$ como forma alternativa para el límite del ejercicio 51. Calcular ese límite.

**En los ejercicios 53-56, conjeturar, por evidencia numérica, el valor del límite si existe. Comprobar la respuesta con un PCS. Si no coinciden, ¿cuál es la respuesta correcta?**

53. $\lim_{x \to 0^+} (1 + x)^{1/x}$

54. $\lim_{x \to 0^+} e^{1/x}$

55. $\lim_{x \to 0^+} x^{-x^2}$

56. $\lim_{x \to 0^+} x^{\ln x}$

57. Supuesto $\lim_{x \to a} f(x) = L$, usar el teorema 2.3 para probar que $\lim_{x \to a} [f(x)]^3 = L^3$. Demostrar, asimismo, que $\lim_{x \to a} [f(x)]^4 = L^4$.

58. ¿Cómo ha resuelto el ejercicio 57? Probablemente ha usado el teorema 2.3 para pasar de $\lim_{x \to a} [f(x)]^2 = L^2$ a $\lim_{x \to a} [f(x)]^3 = L^3$ y después $\lim_{x \to a} [f(x)]^3 = L^3$ para obtener $\lim_{x \to a} [f(x)]^4 = L^4$. Paso a paso llegaríamos a $\lim_{x \to a} [f(x)]^n = L^n$ para cualquier entero $n > 0$. Ésa es la idea de la **inducción matemática**. Formalmente, necesitamos probar el resultado para un valor concreto $n = n_0$ (el corolario 2.1 lo asegura para $n = 2$) y suponer ahora que es verdadero para un $n = k \ge n_0$ genérico. Si podemos probar que de ahí se sigue el resultado para $n = k + 1$, lo habremos probado para todo entero $n > n_0$. Explicar por escrito por qué eso es cierto. Demostrar, por ese método, que $\lim_{x \to a} [f(x)]^n = L^n$ para todo $n > 0$.

59. Descubrir las falacias en la siguiente cadena incorrecta de igualdades.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \to 0} x \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = 0 \cdot ? = 0.$$

60. Descubrir las falacias en la siguiente cadena incorrecta de igualdades.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{x} = \frac{0}{0} = 1.$$

61. Exhibir funciones $f(x)$ y $g(x)$ tales que $\lim_{x \to 0} [f(x) + g(x)]$ existe, pero $\lim_{x \to 0} f(x)$ y $\lim_{x \to 0} g(x)$ no existen.

62. Exhibir funciones $f(x)$ y $g(x)$ tales que $\lim_{x \to 0} [f(x) \cdot g(x)]$ existe, pero al menos uno de los límites $\lim_{x \to 0} f(x)$ y $\lim_{x \to 0} g(x)$ no existe.

63. Si $\lim_{x \to a} f(x)$ existe y $\lim_{x \to a} g(x)$ no existe, ¿es siempre cierto que $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)]$ no existe? Explicar la respuesta.

64. ¿Es verdadera o falsa la siguiente afirmación? Si $\lim_{x \to 0} f(x)$ no existe, entonces $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{f(x)}$ tampoco existe. Argumentar la respuesta.

65. La carga impositiva sobre $x$ euros en cierto Estado viene dada por

$$T(x) = \begin{cases} 0{,}14x & \text{si } 0 \le x \le 10.000 \\ 1.500 + 0{,}21x & \text{si } 10.000 \le x \end{cases}$$

Calcular $\lim_{x \to 0^+} T(x)$ y $\lim_{x \to 10.000} T(x)$. ¿Por qué el primero es correcto y el segundo no?

66. Los impuestos de cierto Estado gravan al 12% los primeros 20.000 euros y al 16% el resto.

Hallar constantes $a$ y $b$ para la función de impuesto

$$T(x) = \begin{cases} a + 0{,}12x & \text{si } x \le 20.000 \\ b + 0{,}16(x - 20.000) & \text{si } x > 20.000 \end{cases}$$

de modo que $\lim_{x \to 0^+} T(x) = 0$ y $\lim_{x \to 20.000} T(x)$. ¿Por qué es importante que existan esos límites?

67. La **función máximo entero**, denotada por $f(x) = [x]$, es igual al mayor entero $\le x$. Así, $[2{,}3] = 2$, $[-1{,}2] = -2$ y $[3] = 3$. A pesar de este último valor, demostrar que no existe $\lim_{x \to 3} [x]$.

68. Investigar la existencia de

(a) $\lim_{x \to 1} [x]$, (b) $\lim_{x \to 1{,}5} [x]$, (c) $\lim_{x \to 1{,}5} [2x]$.

69. Se dice que $x = 0$ es un **cero de multiplicidad** $n$ ($n \ge 1$) de $f(x)$ si $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x^n}$ existe y es no nulo, mientras que $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x^{n-1}} = 0$. Probar que $x = 0$ es un cero de multiplicidad 2 para $x^2$, $x = 0$ es un cero de multiplicidad 3 para $x^3$ y $x = 0$ es un cero de multiplicidad 4 para $x^4$. Para los polinomios, ¿qué describe la multiplicidad? La definición es más sutil de lo que parece cuando se aplica a funciones no polinómicas. Hallar la multiplicidad de $x = 0$ para $f(x) = \operatorname{sen} x$; $f(x) = x \operatorname{sen} x$; $f(x) = \operatorname{sen} x^2$. Sabiendo que $x = 0$ es un cero de multiplicidad $m$ para $f(x)$ y de multiplicidad $n$ para $g(x)$, ¿qué se puede decir acerca de su multiplicidad para $f(x) + g(x)$; $f(x) \cdot g(x)$; $f(g(x))$?

70. Hemos conjeturado que $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$. Usando evidencia gráfica y numérica, conjeturar los valores de $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{x}$, $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{x}$, $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} \pi x}{x}$ y $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x/2}{x}$ y, en general, el valor de $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} cx}{x}$ para cualquier constante $c$. Sabiendo que $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} cx}{cx} = 1$ para toda constante $c \ne 0$, probar que la conjetura era correcta.

## 1.3 CONTINUIDAD Y SUS CONSECUENCIAS

¿Qué tenemos en mente al decir que algo es *continuo*? Decir que una máquina ha funcionado de manera *continua* durante 60 horas significa que ha estado funcionando **todo** ese tiempo sin interrupción. Los matemáticos quieren significar algo análogo cuando afirman que una función es continua. En términos intuitivos, se dice que una función es **continua** en un intervalo si su gráfica en él se puede trazar sin interrupción, sin levantar el lápiz del papel.

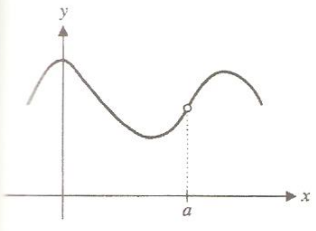



**Figura 1.16**

$f(a)$ no está definida (la gráfica tiene un hueco en $x = a$).

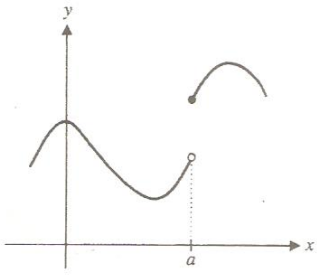



**Figura 1.17**

$f(a)$ está definida, pero $\lim_{x \to a} f(x)$ no existe (la gráfica tiene un salto en $x = a$).

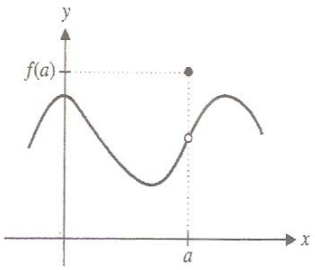



**Figura 1.18**

$\lim_{x \to a} f(x)$ existe y $f(a)$ está definido, pero $\lim_{x \to a} f(x) \ne f(a)$ (la gráfica tiene un salto en $x = a$).

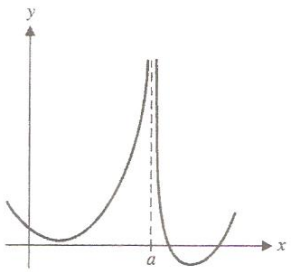



**Figura 1.19**

$\lim_{x \to a} f(x)$ no existe (la gráfica «explota» en $x = a$).

**Advertencia**

El peso de la definición de continuidad recae especialmente en (iii), ya que (i) y (ii) deben ser ciertas para cuestionarse sobre (iii). En realidad, se está diciendo que una función es continua en un punto si su límite en él se puede calcular por sustitución directa.

Analicemos las razones por las cuales las funciones de las figuras 1.16-1.19 son **discontinuas** (o sea, no continuas) en el punto $x = a$.

Eso sugiere la siguiente definición de continuidad en un punto.

**Definición 3.1**

Una función $f$ es **continua** en $x = a$ si

(i) $f(a)$ está definido, (ii) $\lim_{x \to a} f(x)$ existe y (iii) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

En caso contrario, se dice que $f$ es **discontinua** en $x = a$.

**Nota 3.1**

A casi todos los efectos, es preferible la noción intuitiva de continuidad expuesta antes. La definición 3.1 es consecuencia de la comprensión intuitiva del concepto.

**Ejemplo 3.1** **Análisis de la continuidad de una función racional**

Analizar dónde es continua la función $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$.

**Solución** Observemos que

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 3)}{(x - 1)} \qquad \text{Factorizar el numerador.}$$

$$= x + 3, \text{ para } x \neq 1. \qquad \text{Cancelar factores comunes.}$$

De ahí se sigue que la gráfica de $f$ es una recta con un hueco en $x = 1$, como se indica en la figura 1.20. Así, pues, $f$ es discontinua en $x = 1$ y continua en todos los demás puntos. (Salvo en $x = 1$, la gráfica es una recta y se puede trazar sin levantar el lápiz del papel).

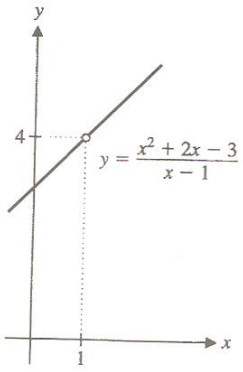



**Figura 1.20**

$$y = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$$

**Ejemplo 3.2** **Una discontinuidad que se puede evitar**

Redefinir la función del ejemplo 3.1 en un único punto de modo tal que la nueva función sea continua en todas partes.

**Solución** La función del ejemplo 3.1 era discontinua en $x = 1$ porque no estaba definida en ese valor de $x$. Pues bien, vamos a definirla. Hagamos

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}, & \text{si } x \neq 1 \\ a, & \text{si } x = 1, \end{cases}$$

para algún número real $a$.

Esta $g(x)$ está definida en todo $x$ y coincide con $f(x)$ en todo $x \neq 1$. En ese punto,

$$\lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} (x + 3) = 4.$$

Por tanto, si elegimos $a = 4$, tenemos

$$\lim_{x \to 1} g(x) = 4 = g(1)$$

y, en consecuencia, $g$ es continua en $x = 1$.

Nótese que la gráfica de $g$ (figura 1.21) es la misma que la de $f$ (figura 1.20), excepto que incluye el punto (1, 4). Y existe una forma bien simple de escribir $g(x)$ (piense en esto).

**Nota 3.2**

¡Ojo! No hay que confundir la continuidad de una función en un punto con el hecho de que la función esté definida en él. Una función puede estar definida en un punto y no ser continua en él (véanse de nuevo las figuras 1.17 y 1.18).

Si una discontinuidad se puede hacer desaparecer redefiniendo la función en el punto, se dice que es una **discontinuidad evitable**. No todas son evitables. Examine con atención las figuras 1.16-1.19 para convencerse de que las discontinuidades de las figuras 1.16 y 1.18 son evitables, mientras que las de las figuras 1.17 y 1.19 son no evitables.

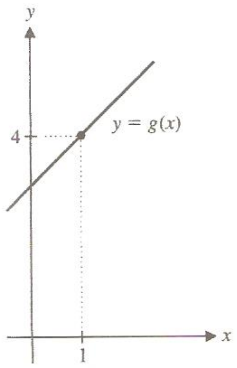



**Figura 1.21**

$y = g(x)$

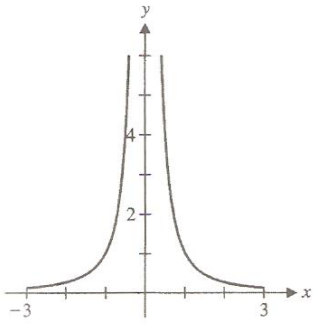



**Figura 1.22a**

$y = \frac{1}{x^2}$.

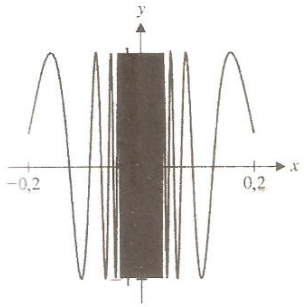



**Figura 1.22b**

$y = \cos(1/x)$.

**Ejemplo 3.3** **Discontinuidades no evitables**

Hallar todas las discontinuidades de $f(x) = \frac{1}{x^2}$ y $g(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

**Solución** De la figura 1.22a (o de una tabla de valores) se desprende que

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} \text{ no existe.}$$

Por tanto, $f$ es discontinua en $x = 0$.

Análogamente, $\lim_{x \to 0} \cos(1/x)$ no existe a causa de la oscilación sin fin de $\cos(1/x)$ cuando $x$ tiende a 0 (figura 1.22b).

En ambos casos, al no existir el límite, no hay manera de redefinir la función en $x = 0$ para convertirla en continua.

Pensando en las gráficas de las funciones citadas en él, el próximo resultado no es sorprendente.

**Teorema 3.1**

Todos los polinomios son continuos en todas partes. Asimismo, sen $x$, cos $x$ y $e^x$ son continuas en todas partes y ln $x$ lo es para $x > 0$.

**Demostración**

Ya hemos establecido (teorema 2.4) que para todo polinomio $p(x)$ y para todo número real $a$,

$$\lim_{x \to a} p(x) = p(a),$$

de modo que $p(x)$ es continua en $x = a$. Análogamente, la continuidad de sen $x$, cos $x$, $e^x$ y ln $x$ se sigue del teorema 2.6.

A partir de estas funciones podemos construir una amplia colección de funciones continuas gracias al siguiente resultado.

**Teorema 3.2**

Si $f$ y $g$ son continuas en $x = a$, entonces

(i) $(f \pm g)$ es continua en $x = a$,

(ii) $(f \cdot g)$ es continua en $x = a$ y

(iii) $(f/g)$ es continua en $x = a$ si $g(a) \neq 0$ y discontinua en $x = a$ si $g(a) = 0$.

**Demostración**

(i) Si $f$ y $g$ son continuas en $x = a$,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] &= \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) && \text{Usar el teorema 2.3} \\ &= f(a) \pm g(a) && \text{Usar que } f \text{ y } g \text{ son continuas en } x = a \\ &= (f \pm g)(a), \end{aligned}$$

por las reglas usuales de los límites. Así, pues, $(f/g)$ es también continua en $x = a$.

Las partes (ii) y (iii) se dejan como ejercicio.

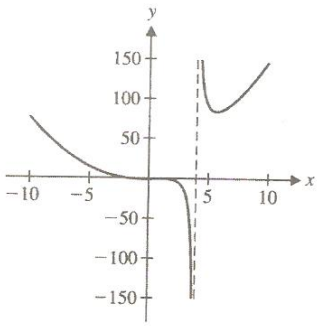



**Figura 1.23**

$y = \dfrac{x^4 - 3x^2 + 2}{x^2 - 3x - 4}$.

**Ejemplo 3.4** **Continuidad de una función racional**

Averiguar dónde es continua la función $f(x) = \dfrac{x^4 - 3x^2 + 2}{x^2 - 3x - 4}$.

**Solución** Es cociente de polinomios (continuos, por tanto). La gráfica de la función (figura 1.23) sugiere una asíntota vertical aproximadamente en $x = 4$, pero no indica ninguna otra discontinuidad. Según el teorema 3.2, $f$ será continua en todo $x$ donde el denominador

$$x^2 - 3x - 4 = (x + 1)(x - 4) \neq 0.$$

Así, pues, $f$ es continua para $x \neq -1, 4$. (Piense por qué no hemos visto nada preocupante en la gráfica para $x = -1$).

Con la adición del próximo teorema dispondremos ya de cuantas reglas básicas son necesarias para establecer la continuidad de la mayoría de las funciones elementales.

**Teorema 3.3**

Si $\lim_{x \to a} g(x) = L$ y $f$ es continua en $L$, entonces

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f\left( \lim_{x \to a} g(x) \right) = f(L).$$

En el apéndice A puede verse la demostración de este teorema.

Este teorema afirma que si $f$ es continua podemos meter «dentro» de ella el límite. Eso tiene sentido porque cuando $x \to a$, $g(x) \to L$ y, por tanto, $f(g(x)) \to f(L)$, ya que $f$ es continua en $L$.

**Corolario 3.1**

Si $g$ es continua en $a$ y $f$ es continua en $g(a)$, la composición $f \circ g$ es continua en $a$.

**Demostración**

Aplicando el teorema 3.3, resulta

$$\lim_{x \to a} (f \circ g)(x) = \lim_{x \to a} f(g(x)) = f\left( \lim_{x \to a} g(x) \right)$$

$$= f(g(a)) = (f \circ g)(a) \quad \text{Porque } g \text{ es continua en } a.$$

**Ejemplo 3.5** **Continuidad de una función compuesta**

Estudiar la continuidad de $h(x) = \cos(x^2 - 5x + 2)$.

**Solución** Nótese que

$$h(x) = f(g(x)),$$

con $g(x) = x^2 - 5x + 2$ y $f(x) = \cos x$. Puesto que $f$ y $g$ son continuas para todo $x$, $h$ es continua para todo $x$, según el corolario 3.1.

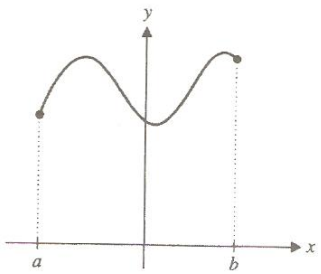



**Figura 1.24**

$f$ continua en $[a, b]$.

**Definición 3.2**

Se dice que $f$ es **continua** en el intervalo abierto $(a, b)$ si es continua en todos sus puntos. Haciendo referencia a la figura 1.24, decimos que $f$ es **continua en el intervalo cerrado** $[a, b]$ si $f$ es continua en el intervalo abierto $(a, b)$ y

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \quad \text{y} \quad \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b).$$

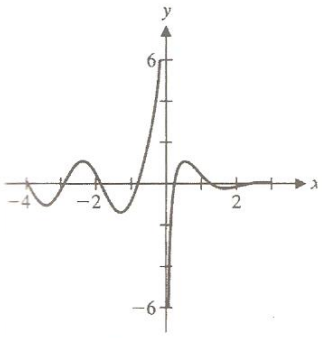



**Figura 1.25**
$y = \dfrac{\text{sen}(3x-7)}{e^x - 1}$.

Finalmente, si $f$ es continua en toda la recta real, decimos simplemente que $f$ es **continua** (es decir, al no especificar ningún intervalo significará que es continua en todas partes).

Para muchas funciones hay un método simple para determinar los intervalos donde son continuas, tal como se ilustra en el siguiente ejemplo.

### Ejemplo 3.6 Intervalos de continuidad

Determinar los intervalos donde es continua la función $f(x) = \dfrac{\text{sen}(3x-7)}{e^x - 1}$.

**Solución** Dado que $f$ es cociente de dos funciones continuas, es continua en todos los $x$ que no hagan cero al denominador.

La figura 1.25 muestra la gráfica de $f$. Como

$$e^x - 1 = 0$$

sólo para $x = 0$, $f$ es continua en todo $x \neq 0$, o sea, en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$.

### Ejemplo 3.7 Intervalo de continuidad de un logaritmo

Analizar dónde es continua la función $f(x) = \ln(x-3)$.

**Solución** Del teorema 3.1 y del corolario 3.1 se sigue que $f$ es continua siempre que $(x-3) > 0$, o sea, para $x > 3$. Así, pues, $f$ es continua en el intervalo $(3, \infty)$.

El gobierno define algunas de las funciones que concitan más odio. En las tablas de impuestos federales de 1998 en Estados Unidos, las primeras líneas que afectaban a contribuyentes individuales eran:

| Base imponible mayor que | y menor que | Tasa aplicable | al exceso sobre |
|---|---|---|---|
| \$0 | \$25.350 | 15% | \$0 |
| \$25.350 | \$61.400 | \$3.802,50 + 28% | \$25.350 |
| \$61.400 | \$128.100 | \$13.896,50 + 31% | \$61.400 |

¿De dónde salen los números \$3.802,50 y \$13.896,50? Si expresamos la cuantía del impuesto $T(x)$ en función de la base liquidable $x$, se tiene

$$T(x) = \begin{cases} 0{,}15x & \text{si } 0 < x \leq 25.350 \\ 3.802{,}5 + 0{,}28(x - 25.350) & \text{si } 25.350 < x \leq 61.400 \\ 13.896{,}5 + 0{,}31(x - 61.400) & \text{si } 61.400 < x \leq 128.100. \end{cases}$$

Analice con detenimiento cómo hemos traducido el problema. Nótese que es muy importante que $T(x)$ sea una función continua. De lo contrario, ¡daría lugar a curiosas situaciones!

### Ejemplo 3.8 Continuidad de los impuestos federales

Verificar que la función $T(x)$ es continua en el punto de «transición» $x = 25.350$.
A continuación, hallar $a$ y $b$ para completar esta tabla:

| Base imponible mayor que | y menor que | Tasa aplicable | al exceso sobre |
|---|---|---|---|
| \$128.100 | \$278.450 | \$ $(a)$ + 36% | \$128.100 |
| \$278.450 | — | \$ $(b)$ + 39,6% | \$278.450 |

**Solución** Para que $T(x)$ sea continua en $x = 25.350$, debe ser

$$\lim_{x \to 25.350^-} T(x) = \lim_{x \to 25.350^+} T(x).$$

Como las dos funciones $0{,}15x$ y $3.802{,}5 + 0{,}28(x - 25.350)$ son continuas, podemos calcular los límites laterales sustituyendo $x = 25.350$.

$$\lim_{x \to 25.350^-} T(x) = 0{,}15(25.350) = 3.802{,}5$$

y

$$\lim_{x \to 25.350^+} T(x) = 3.802{,}5 + 0 = 3.802{,}5$$

Los límites laterales coinciden y son iguales al valor de la función en ese punto, de manera que $T(x)$ es continua en $x = 25.350$. Dejamos como ejercicio verificar que es continua también en $x = 61.400$. Para completar la tabla, elegimos $a$ y $b$ de forma que los restantes límites laterales coincidan. En primer lugar, necesitamos que

$$\lim_{x \to 128.100^-} T(x) = 13.896{,}5 + 0{,}31(128.100 - 61.400)$$
$$= a + 0{,}36(0) = \lim_{x \to 128.100^+} T(x),$$

o sea,

$$34.573{,}5 = a.$$

Y además necesitamos que los límites laterales coincidan en $x = 278.450$. Así, pues,

$$\lim_{x \to 278.450^-} T(x) = 34.573{,}5 + 0{,}36(278.450 - 128.100)$$
$$= b + 0{,}396(0) = \lim_{x \to 278.450^+} T(x),$$

o sea,

$$88.699{,}5 = b.$$

El teorema que sigue debe verse como una consecuencia obvia de nuestra definición intuitiva de continuidad.

**Teorema 3.4 (Teorema del valor intermedio)**
Si $f$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y $W$ es cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$, hay al menos un número $c \in [a, b]$ para el cual $f(c) = W$.

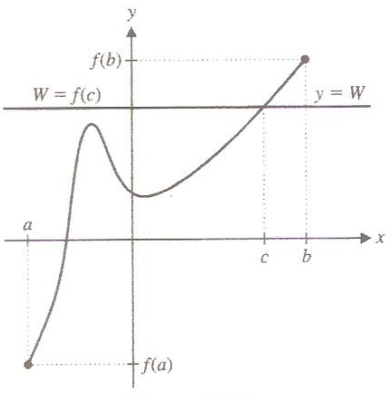



**Figura 1.26a**
Ilustración del teorema del valor intermedio.

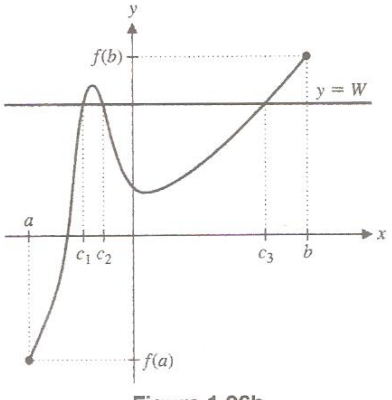



**Figura 1.26b**
Más de un valor de $c$.

### Notas históricas

**Karl Weierstrass (1815-1897).** Matemático alemán que demostró, aparte del teorema del valor intermedio, otros resultados fundamentales del Cálculo. Era reconocido como un excelente profesor. Sus estudiantes hicieron circular sus notas, originales y claras, por toda Europa. Conocido también como gran experto en esgrima, Weierstrass fue uno de los fundadores del análisis matemático moderno.

### Nota 3.3

El teorema afirma que si $f$ es continua en $[a, b]$, debe tomar **todos** los valores intermedios entre $f(a)$ y $f(b)$ al menos una vez. No puede saltar bruscamente de un valor a otro. Para ello tendría que evitar cruzar la recta horizontal $y = W$, algo imposible para una función continua (figura 1.26a). Claro está que una función puede tomar el valor $W$ más de una vez (figura 1.26b). Queremos hacer constar que, si bien esas gráficas parecen razonables, el teorema 3.4, igual que cualquier otro, ha de ser demostrado. Y, de hecho, su demostración resulta ser más complicada de lo que uno imagina. Puede consultarse en textos más avanzados.

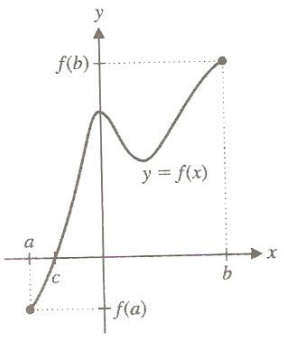



**Figura 1.27**

Teorema del valor intermedio donde $c$ es un cero de $f$.

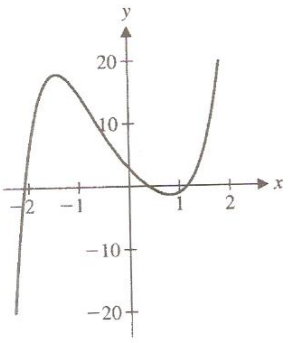



**Figura 1.28**

$y = x^5 + 4x^2 - 9x + 3$.

El corolario que sigue constituye una aplicación útil e inmediata del teorema del valor intermedio.

**Corolario 3.2**

Si $f$ es continua en $[a, b]$ y $f(a) \cdot f(b) < 0$ (es decir, $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos distintos), existe al menos un $c \in [a, b]$ para el cual $f(c) = 0$. ($c$ se llama en tal caso un **cero** de $f$).

El corolario es simplemente el caso especial $W = 0$ del teorema del valor intermedio (figura 1.27). Ambos son **teoremas de existencia**: aseguran que existe un número $c$ que satisface cierta condición, pero **no** dicen quién es ese $c$.

El próximo ejemplo enseña que el corolario 3.2 puede ayudar a localizar los ceros de una función.

**Ejemplo 3.9** **Localización de los ceros por el método de bisección**

Hallar los ceros de $f(x) = x^5 + 4x^2 - 9x + 3$.

**Solución** Si $f$ fuera un polinomio cuadrático sería fácil calcular sus ceros exactamente, pero aquí ¿qué podemos hacer? No disponemos de fórmulas para los ceros de un polinomio de grado 5. La única alternativa es aproximarlos de alguna manera.

Un buen inicio es generar una gráfica en la calculadora, como la de la figura 1.28, en la que se ven tres ceros. (¿Puede convencerse de que **sólo** hay tres ceros?).

Al ser un polinomio, $f$ es continua en todas partes. Por el corolario 3.2 debe haber un cero en cada intervalo donde $f$ cambie de signo. Según la gráfica, debe haberlos entre –3 y –2, entre 0 y 1 y entre 1 y 2. Sin la gráfica se llegaría a la misma conclusión evaluando $f(0) = 3$ y $f(1) = -1$, por ejemplo. Ya conocemos intervalos donde buscar ceros de $f$, pero ¿cómo **hallarlos**?

Un PCS nos daría una buena aproximación de los ceros, pero no es eso lo que nos concierne ahora. Es más importante en este momento entender cómo se pueden hallar que sus valores concretos. Sugerimos el siguiente método, sencillo y muy efectivo, llamado **método de bisección**.

Para encontrar el cero entre 0 y 1, partimos de 0,5, el punto medio. Como $f(0,5) = -0,469 < 0$ y $f(0) = 3 > 0$, hay cambio de signo entre 0 y 0,5, luego allí está el cero. Ahora miramos en el punto medio de [0, 0,5]. Como $f(0,25) = 1,00098 > 0$, el cero está en el intervalo (0,25, 0,5), y así sucesivamente. Continuamos estrechando el intervalo donde se encuentra el cero hasta que cualquier punto del intervalo sirva como aproximación suficiente del cero buscado. Eso hacemos en la tabla adjunta.

| $a$ | $b$ | $f(a)$ | $f(b)$ | Punto medio | $f$(punto medio) |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 3 | –1 | 0,5 | –0,469 |
| 0 | 0,5 | 3 | –0,469 | 0,25 | 1,00098 |
| 0,25 | 0,5 | 1,00098 | –0,469 | 0,375 | 0,195 |
| 0,375 | 0,5 | 0,195 | –0,469 | 0,4375 | –0,156 |
| 0,375 | 0,4375 | 0,195 | –0,156 | 0,40625 | 0,015 |
| 0,40625 | 0,4375 | 0,015 | –0,156 | 0,421875 | –0,072 |
| 0,40625 | 0,421875 | 0,015 | –0,072 | 0,4140625 | –0,029 |
| 0,40625 | 0,4140625 | 0,015 | –0,029 | 0,41015625 | –0,007 |
| 0,40625 | 0,41015625 | 0,015 | –0,007 | 0,408203125 | 0,004 |

Continuando ese proceso 20 pasos más se llega al cero aproximado $x = 0,40892288$, con sus ocho decimales correctos.

**Nota 3.4**

El método de bisección es ciertamente tedioso a mano. Pero, aun sin ser un método especialmente rápido de aproximación de ceros, es interesante porque es el primero que nos sale al paso y es muy fiable. Por supuesto, una calculadora es más rápida y más precisa, pero el usuario no sabe qué está haciendo su calculadora o su PCS. Tenemos como objetivo en este libro proporcionar métodos no sólo para calcular, sino para comprender las respuestas. Eso le hará apreciar mejor la utilidad de programas informáticos de cálculo. Discutiremos algunos métodos potentes en el Capítulo 3.

# EJERCICIOS 1.3

1. Consideremos las siguientes funciones del tiempo sacadas de la vida real: la altura de un objeto que cae, la velocidad de un móvil, el capital depositado en una cuenta bancaria, el nivel de colesterol, el ritmo cardíaco y la cantidad de un producto químico presente en un tubo de ensayo. ¿Cuáles de ellas son continuas? Identificar, para cada una de ellas, las discontinuidades y su significado en la vida real.

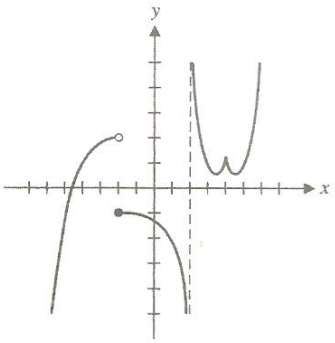
2. No siempre está claro si un proceso es continuo o no. Al mirar la televisión o el cine, la acción parece continua, pero es sólo una ilusión óptica. Lo que estamos viendo es una secuencia de imágenes aisladas proyectadas a gran velocidad. ¿A qué se debe esa ilusión del movimiento continuo? Puesto que una persona parpadea varias veces por minuto, ¿es verdaderamente continua nuestra percepción del mundo? [Un famoso experimento en psicología del conocimiento reveló que el cerebro humano decide, antes de nada, si un estímulo es suficientemente importante para merecer ser considerado. En caso afirmativo, el cerebro «capta» el estímulo y la persona lo identifica (de ahí la diferencia de los tiempos de reacción ante los estímulos)].

3. Cuando dibujamos con lápiz y papel la parábola $y = x^2$, la gráfica trazada ¿es verdaderamente continua a nivel molecular? Muchas calculadoras ofrecen la posibilidad de gráficas conexas o no conexas. A nivel de píxel, ¿gráfica conexa implica función continua? ¿Una gráfica no conexa demuestra que la función no es continua? ¿Plantea dificultades este tipo de cuestiones para la interpretación correcta de las gráficas? En los ejercicios de la sección 1.6 examinamos un caso en el que la percepción depende de la elección.

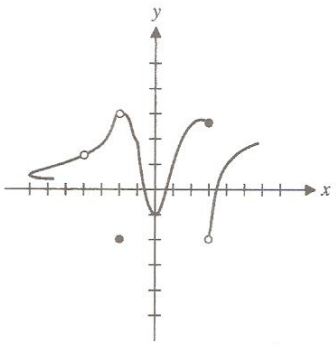
4. Describir, para cada gráfica de las figuras 1.16-1.19, con un ejemplo cuál puede ser la fórmula de $f(x)$ para tener una discontinuidad como la indicada.

**En los ejercicios 5-10, usar la gráfica para identificar las discontinuidades de la función.**

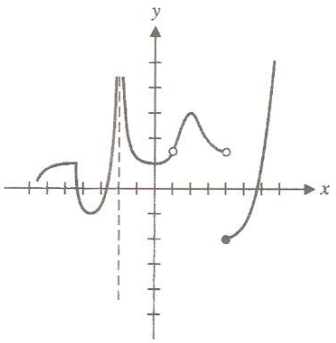
5.



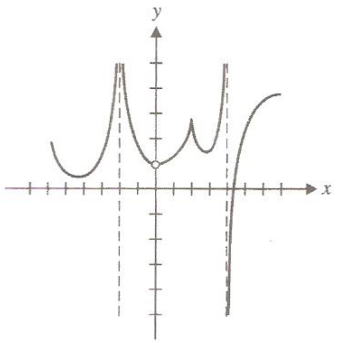

6.



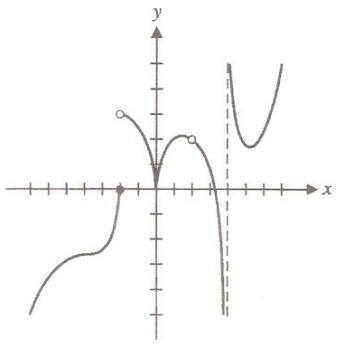

7.



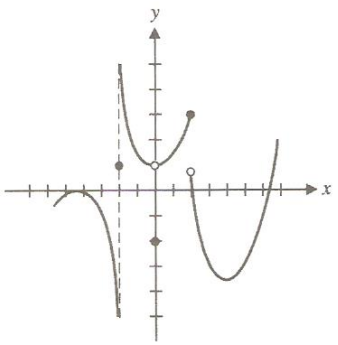

8.




9.



10.




**En los ejercicios 11-16, explicar por qué cada función es discontinua en el punto dado, indicando cuál de las tres condiciones de la definición 3.1 no se satisface.**

11. $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ en $x = 1$

12. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ en $x = 1$

13. $f(x) = \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$ en $x = 0$

14. $f(x) = e^{1/x}$ en $x = 0$

15. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \\ 3x - 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ en $x = 2$

16. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 2 \\ 3x - 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ en $x = 2$

**En los ejercicios 17-28, hallar todas las discontinuidades de $f(x)$. En las que sean evitables, redefinir la función de modo tal que la nueva función sea continua.**

17. $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-1}$

18. $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+x-2}$

19. $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+4}$

20. $f(x) = \dfrac{3x}{x^2-2x-4}$

21. $f(x) = x^2 \tan x$

22. $f(x) = \operatorname{cosec} x$

23. $f(x) = x \cot x$

24. $f(x) = \dfrac{\sec x}{x^2}$

25. $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 1 \\ x^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

26. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

27. $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 + 5x & \text{si } -1 < x < 1 \\ 3x^3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

28. $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 0 \\ \operatorname{sen} x & \text{si } 0 < x \leq \pi \\ x - \pi & \text{si } x > \pi \end{cases}$

**En los ejercicios 29-36, determinar los intervalos en los que $f(x)$ es continua.**

29. $f(x) = \sqrt{x+3}$

30. $f(x) = \sqrt{x^2-4}$

31. $f(x) = \sqrt[3]{x+2}$

32. $f(x) = (x-1)^{3/2}$

33. $f(x) = \operatorname{sen}(x^2+2)$

34. $f(x) = \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$

35. $f(x) = \ln(x+1)$

36. $f(x) = \ln(4-x^2)$

37. Supongamos que la tabla de impuestos en un país es

$$T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 0{,}14x & \text{si } 0 < x < 10.000 \\ c + 0{,}21x & \text{si } 10.000 \leq x \end{cases}$$

¿Qué valor de $c$ hace continua a esa función? Dar una buena razón por la que una tal función debe ser continua.

38. La tasa de impuesto en un país es del 12% sobre los primeros 20.000 euros de base imponible y del 16% sobre el resto. Hallar constantes $a$ y $b$ para las que la función del impuesto

$$T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ a + 0{,}12x & \text{si } 0 < x \leq 20.000 \\ b + 0{,}16(x - 20.000) & \text{si } x > 20.000 \end{cases}$$

sea continua en todo $x$.

39. En el ejemplo 3.8, hallar fórmulas para $T(x)$ en

(a) $128.100 < x \leq 278.450$ y (b) $x > 278.450$.

40. En el ejemplo 3.8, probar que $T(x)$ es continua en $x = 61.400$.

**En los ejercicios 41-46, usar el teorema del valor intermedio para verificar que $f(x)$ tiene un cero en el intervalo que se especifica. A continuación, usar el método de bisección para delimitar un intervalo de longitud 1/32 que contenga a ese cero.**

41. $f(x) = x^2 - 7$, $[2, 3]$

42. $f(x) = x^3 - 4x - 2$, $[2, 3]$

43. $f(x) = x^3 - 4x - 2$, $[-1, 0]$

44. $f(x) = x^3 - 4x - 2$, $[-2, -1]$

45. $f(x) = \cos x - x$, $[0, 1]$

46. $f(x) = e^x + x$, $[-1, 0]$

**Una función $f(x)$ es continua por la derecha en $x = a$ si $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$. En los ejercicios 47-50, analizar si $f(x)$ es continua por la derecha en $x = 2$.**

47. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 2 \\ 3x - 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

48. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \\ 3x - 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

49. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ 3x - 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

50. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 2 \\ 3x - 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

51. Definir qué significa para una función ser **continua por la izquierda** en $x = a$ y estudiar cuáles de las funciones de los ejercicios 47-50 son continuas por la izquierda en $x = 2$.

52. Supuesto que $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ y $h(a) = 0$, decidir si las afirmaciones siguientes son verdaderas, falsas o si no se puede decidir su veracidad. Explicar la respuesta. (a) $\lim_{x \to a} f(x)$ no existe, (b) $f(x)$ es discontinua en $x = a$.

53. El sexo de los cocodrilos recién nacidos en el Mississippi se determina por la temperatura de los huevos en el nido. Los huevos sólo se desarrollan si la temperatura está entre 26°C y 36°C. Los que están entre 26°C y 30°C dan lugar a hembras y los que están entre 34°C y 36°C a machos. El porcentaje de hembras cae del 100% a 30°C al 0% a 34°C. El porcentaje $f(T)$ de hembras nacidas de huevos a temperatura $T$ viene dado por

$$f(T) = \begin{cases} 100 & \text{si } 26 \le T \le 30 \\ g(T) & \text{si } 30 < T < 34 \\ 0 & \text{si } 34 \le T \le 36 \end{cases}$$ para cierta función $g(T)$. Explicar por qué es razonable que $f(T)$ sea continua.

Hallar una $g(T)$ tal que $0 \le g(T) \le 100$ para $30 \le T \le 34$ que haga continua a la correpondiente $f(T)$. [Ayuda: Utilizar una gráfica e intentar con $g(T)$ lineal].

54. Si $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \neq 0 \\ 4, & \text{si } x = 0 \end{cases}$ y $g(x) = 2x$, probar que

$$\lim_{x \to 0} f(g(x)) \neq f\left(\lim_{x \to 0} g(x)\right)$$

55. Cuando empujamos una caja pesada que está en el suelo, al principio no se mueve por la fuerza de rozamiento estático que se opone. Si empujamos más fuerte, empieza a deslizar, aunque sigue actuando una fuerza de rozamiento. Supongamos que hasta 100 libras, el rozamiento impide el movimiento y que por encima de 100 libras la caja se mueve y la fuerza de rozamiento es de 80 libras. Esbozar la gráfica del rozamiento como función de la fuerza aplicada. ¿Dónde es discontinua? ¿Cuál es el significado físico de ese punto? ¿Cree que la fuerza de rozamiento debería ser continua? Modificar la gráfica para hacerla continua pero conservando la mayoría de las propiedades descritas.

56. La función $f(x) = 2x - \dfrac{400}{x}$ cumple $f(-1) > 0$ y $f(2) < 0$. ¿Garantiza el teorema del valor intermedio que hay un cero de $f(x)$ entre $x = -1$ y $x = 2$? ¿Qué ocurre al aplicar el método de bisección?

57. El lunes, una agente de ventas sale de viaje a las 7:13 A.M. y llega a su destino a las 2:03 P.M. A la mañana siguiente, inicia el regreso a las 7:17 A.M. y llega a su casa a las 1:59 P.M. Se da cuenta de que los dos días un reloj próximo a un mismo semáforo cambia de hora de 10:32 A.M. a 10:33 A.M. Concluye que ha estado en el mismo lugar a la misma hora ambos días. Su jefe no da crédito a tan rara coincidencia. Usar el teorema del valor intermedio para argumentar que es necesariamente cierto que haya estado en algún punto del trayecto a la misma hora el lunes y el martes.

58. Un conductor llega con su automóvil a un stop situado en lo alto de una colina, su coche retrocede un metro y él vuelve a llevarlo hasta el cruce del stop. Un policía de tráfico le multa por no haberse detenido completamente. Demuestre, utilizando el teorema del valor intermedio, que en algún momento (de hecho, en al menos dos) su coche ha estado detenido. ¿Cuál es la diferencia entre esa detención y la que el policía esperaba?

59. Un trabajador comienza cobrando 40.000 euros con un incremento de 2.000 euros cada trimestre. Dibujar la gráfica de su salario $s(t)$. ¿Por qué es discontinua? Comparar con ella la función $f(t) = 40.000 + \dfrac{2.000}{3}t$ ($t$ en meses). ¿Por qué sería más fácil hacer cálculos con $f(t)$ que con $s(t)$?

60. Demostrar las dos últimas partes del teorema 3.2.

61. Sea $f(x)$ continua con ceros consecutivos en $x = a$ y $x = b$, es decir, $f(a) = f(b) = 0$ y $f(x) \neq 0$ para $a < x < b$. Si además $f(c) > 0$ en algún $c$ entre $a$ y $b$, probar, usando el teorema del valor intermedio, que $f(x) > 0$ para todo $x$ tal que $a < x < b$.

62. Estimar, por el método de bisección, los otros dos ceros del ejemplo 3.9.

63. En el texto hemos discutido el uso del método de bisección para aproximar la solución de una ecuación tal como $f(x) = x^3 + 5x - 1 = 0$. Empezamos advirtiendo que $f(0) = -1$ y $f(1) = 5$. El teorema del valor intermedio asegura que hay una solución entre 0 y 1. En el método de bisección ensayamos el punto medio $x = 0{,}5$. ¿Hay alguna razón para pensar que la solución está más cerca de 0 que de 1? A la vista de los valores $f(0) = -1$ y $f(1) = 5$, diseñe su propia estrategia. Generalice el proceso para valores arbitrarios $f(a)$ y $f(b)$ de signo opuesto. Compare su método con el de bisección en la ecuación $x^3 + 5x - 1 = 0$. Deténgase, en ambos, cuando el error no exceda de 0,001 respecto de la solución $x \approx 0{,}198437$. ¿Qué método ha aproximado mejor? Antes de sentirse orgulloso de su método, compárelos de nuevo, ahora para $x^3 + 5x^2 - 1 = 0$. ¿Puede explicar por qué su método funcionaba mejor en la primera ecuación?

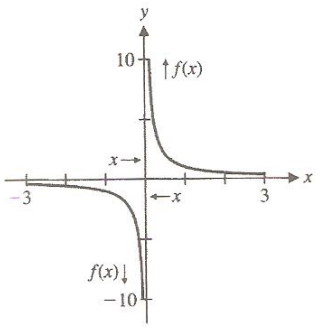



**Figura 1.29**

$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$ y $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.

| $x$ | $\frac{1}{x}$ |
|---|---|
| 0,1 | 10 |
| 0,01 | 100 |
| 0,001 | 1.000 |
| 0,0001 | 10.000 |
| 0,00001 | 100.000 |

| $x$ | $\frac{1}{x}$ |
|---|---|
| –0,1 | –10 |
| –0,01 | –100 |
| –0,001 | –1.000 |
| –0,0001 | –10.000 |
| –0,00001 | –100.000 |

**Nota 4.1**

Puede parecer contradictorio decir que $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x}$ no existe y escribir $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$. Pero como $\infty$ **no** es un número real, no hay contradicción. (Decir que un límite «no existe» significa que no hay ningún número real $L$ al que se aproximen los valores de la función). Escribiremos $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$ para indicar que, cuando $x \to 0^+$, los valores de la función crecen sin tope.

# 1.4 LÍMITES INFINITOS Y LÍMITES EN EL INFINITO

En esta sección volvemos a tratar algunos viejos problemas sobre límites con el fin de dar respuestas más profundas y examinamos cuestiones relacionadas.

**Ejemplo 4.1** **Nueva visita a un límite sencillo**

Analizar $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$.

**Solución** Naturalmente, podemos dibujar una gráfica y elaborar una tabla de valores a mano.

Aunque decimos de ambos, $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x}$ y $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x}$, que no existen, el comportamiento de la función es muy distinto en $x > 0$ y en $x < 0$. Concretamente, cuando $x \to 0^+$, $\frac{1}{x}$ crece sin tope, mientras que cuando $x \to 0^-$, $\frac{1}{x}$ decrece sin tope. Ninguno de los dos límites laterales existe, pero el comportamiento límite es muy diferente a cada lado de $x = 0$. Con el fin de comunicar lo mejor posible el comportamiento cerca de $x = 0$, escribimos

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty \tag{4.1}$$

y

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty. \tag{4.2}$$

Eso significa que la gráfica de $y = \frac{1}{x}$ se acerca a la recta vertical $x = 0$ cuando $x \to 0$, como indica la figura 1.29. Cuando ocurre eso decimos que la recta $x = 0$ es una **asíntota vertical**. Es importante advertir que aunque los límites (4.1) y (4.2) **no existen**, se dice que son «iguales a» $\infty$ y $-\infty$, respectivamente, para dejar claro **por qué** no existen. Finalmente, a la vista de los límites laterales (4.1) y (4.2), decimos que

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \text{ no existe.}$$

**Ejemplo 4.2** **Una función con límites laterales infinitos**

Evaluar $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$.

**Solución** La gráfica (figura 1.30) indica una asíntota vertical en $x = 0$. Es fácil elaborar una tabla de valores a mano.

| $x$ | $\frac{1}{x^2}$ |
|---|---|
| 0,1 | 100 |
| 0,01 | 10.000 |
| 0,001 | $1 \times 10^6$ |
| 0,0001 | $1 \times 10^8$ |
| 0,00001 | $1 \times 10^{10}$ |

| $x$ | $\frac{1}{x^2}$ |
|---|---|
| –0,1 | 100 |
| –0,01 | 10.000 |
| –0,001 | $1 \times 10^6$ |
| –0,0001 | $1 \times 10^8$ |
| –0,00001 | $1 \times 10^{10}$ |

Todo apunta a que

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} = \infty$$

y

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2} = \infty$$

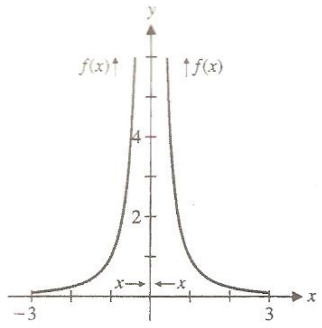



**Figura 1.30**

$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$

Puesto que ambos límites laterales coinciden (los dos tienden a $\infty$), decimos que

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

Este símbolo establece abreviadamente que el límite no existe, pero que $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = 0$ y que $f(x) \to \infty$ cuando $x \to 0$ por ambos lados.

### Ejemplo 4.3 Un caso con límites laterales infinitos distintos

Evaluar $\lim_{x \to 5} \frac{1}{(x-5)^3}$.

**Solución** La gráfica (figura 1.31) indica que hay una asíntota vertical en $x = 5$. La función tiende a $\infty$ por la derecha y a $-\infty$ por la izquierda. Es fácil comprender ese comportamiento, ya que cuando $x \to 5$ el denominador tiende a 0 y el numerador a 1. Por tanto, el cociente crece sin tope en valor absoluto. Concretamente, por la derecha

$$\text{cuando } x \to 5^+, \quad (x-5)^3 \to 0 \quad \text{y} \quad (x-5)^3 > 0.$$

Indicaremos el signo de cada factor poniendo encima o debajo un pequeño signo «+» o «−». En este caso,

$$\lim_{x \to 5^+} \frac{\overset{+}{1}}{\underset{+}{(x-5)^3}} = \infty. \qquad \text{Porque } (x-5)^3 > 0, \text{ para } x > 5.$$

Análogamente, por la izquierda

$$\text{cuando } x \to 5^-, \quad (x-5)^3 \to 0 \quad \text{y} \quad (x-5)^3 < 0.$$

Ahora se tiene

$$\lim_{x \to 5^-} \frac{\overset{+}{1}}{\underset{-}{(x-5)^3}} = -\infty. \qquad \text{Porque } (x-5)^3 < 0, \text{ para } x < 5.$$

Finalmente, decimos que

$$\lim_{x \to 5} \frac{1}{(x-5)^3} \quad \text{no existe.}$$

Esta vez, al ser distintos los límites laterales, ésta es la información más específica que podemos dar.

Según los últimos ejemplos, vemos que si el denominador tiende a 0 y el numerador no, el límite en cuestión no existe. En esa circunstancia, se puede averiguar si cada límite lateral tiende a $\infty$ o a $-\infty$ analizando los signos de los factores en juego.

### Ejemplo 4.4 Otro caso en el que los límites laterales infinitos no coinciden

Calcular $\lim_{x \to -2} \frac{x+1}{(x-3)(x+2)}$.

**Solución** La gráfica de la figura 1.32 sugiere una asíntota vertical en $x = -2$.

Además, la función parece tender a $\infty$ cuando $x \to -2^+$ y a $-\infty$ cuando $x \to -2^-$. Podemos confirmar ese comportamiento observando que

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{\overset{-}{x+1}}{\underset{-}{(x-3)}\underset{+}{(x+2)}} = \infty. \qquad \text{Porque } (x+1) < 0, (x-3) < 0 \text{ y } (x+2) > 0, \text{ para } -2 < x < -1.$$

### Nota 4.2

Se da más información escribiendo $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$ que afirmando que $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$ no existe, ya que no sólo se comunica que el límite no existe, sino la **razón** por la que no existe. Por eso, siempre que sean aplicables esas dos informaciones preferiremos la primera. Es análogo a cuando alguien nos pregunta dónde hemos nacido. Se puede contestar «Valparaíso» o «Chile», ambas correctas, pero la primera información es más completa. Lo mismo con los límites: si se puede dar información más específica, ¡démosla!

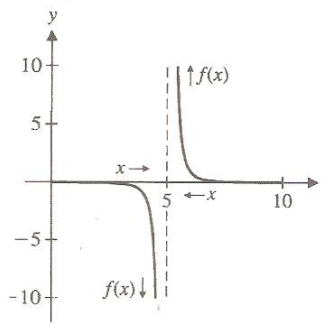



**Figura 1.31**

$\lim_{x \to 5^+} \frac{1}{(x-5)^3} = \infty$

y

$\lim_{x \to 5^-} \frac{1}{(x-5)^3} = -\infty.$

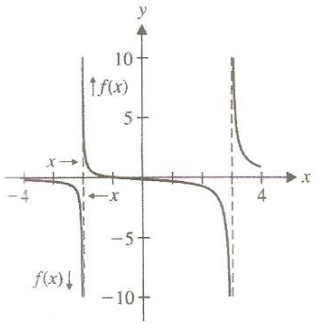



**Figura 1.32**

$$\lim_{x \to -2} \frac{x+1}{(x-3)(x+2)} \text{ no existe.}$$

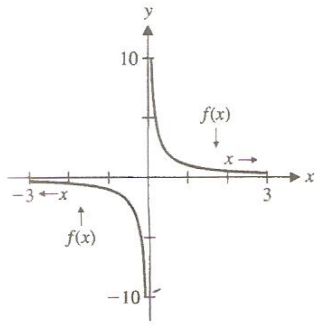



**Figura 1.33**

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

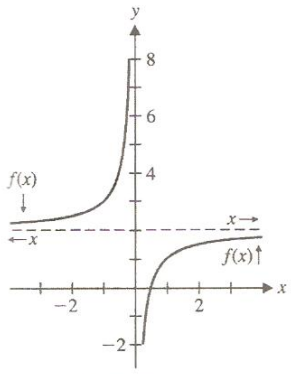



**Figura 1.34**

$$\lim_{x \to \infty} \left(2 - \frac{1}{x}\right) = 2$$

y

$$\lim_{x \to -\infty} \left(2 - \frac{1}{x}\right) = 2.$$

**Nota 4.3**

Todas las reglas usuales de los límites enunciadas en el teorema 2.3 son válidas también para $x \to \pm\infty$.

y

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{x+1}{(x-3)(x+2)} = -\infty. \qquad \begin{array}{l}\text{Porque } (x+1) < 0,\ (x-3) < 0 \text{ y} \\ (x+2) < 0, \text{ para } x < -2.\end{array}$$

Así, pues, $x = -2$ es una asíntota vertical y

$$\lim_{x \to -2} \frac{x+1}{(x-3)(x+2)} \text{ no existe.}$$

## Límites en el infinito

Asimismo, estamos interesados en examinar el comportamiento de las funciones cuando $x$ crece sin tope (en símbolos, $x \to \infty$) o decrece sin tope ($x \to -\infty$). Volviendo a $f(x) = \frac{1}{x}$, vemos que cuando $x \to \infty$, $\frac{1}{x} \to 0$. En vista de ello, escribimos

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Análogamente,

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

En la figura 1.33 se ve que la gráfica se aproxima a la recta horizontal $y = 0$ cuando $x \to \infty$ y cuando $x \to -\infty$. En esas circunstancias se dice que $y = 0$ es una **asíntota horizontal**.

**Ejemplo 4.5** **Asíntotas horizontales**

Hallar las asíntotas horizontales de $f(x) = 2 - \frac{1}{x}$.

**Solución** La figura 1.34 muestra la gráfica de $y = f(x)$. Cuando $x \to \pm\infty$, $\frac{1}{x} \to 0$, así que

$$\lim_{x \to \infty} \left(2 - \frac{1}{x}\right) = 2$$

y

$$\lim_{x \to -\infty} \left(2 - \frac{1}{x}\right) = 2.$$

Así, pues, la recta $y = 2$ es una asíntota horizontal de $f(x)$.

Según el próximo teorema, el comportamiento de $\frac{1}{x^t}$, cuando $x \to \pm\infty$, para cualquier potencia racional $t$, es análogo al de $f(x) = \frac{1}{x}$.

**Teorema 4.1**

Para cualquier número racional $t > 0$,

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^t} = 0,$$

donde, en el caso $x \to -\infty$, suponemos que se puede escribir $t = \frac{p}{q}$ con $q$ impar.

La demostración puede verse en el apéndice A. Asegúrese de entender claramente por qué, si $t > 0$, hacer $x \to \infty$ implica que $x^t \to \infty$; por tanto, $\frac{1}{x^t} \to 0$.

En el teorema siguiente aprenderemos que el comportamiento de un polinomio en el infinito es fácil de determinar.

**Teorema 4.2**

Para un polinomio de grado $n > 0$, $p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$, es

$$\lim_{x \to \infty} p_n(x) = \begin{cases} \infty, & \text{si } a_n > 0 \\ -\infty, & \text{si } a_n < 0 \end{cases}.$$

**Demostración**

En efecto,

$$\lim_{x \to \infty} p_n(x) = \lim_{x \to \infty} (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0)$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left[ x^n \left( a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^n} \right) \right] = \infty,$$

si $a_n > 0$, ya que

$$\lim_{x \to \infty} \left( a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^n} \right) = a_n$$

y $\lim_{x \to \infty} x^n = \infty$. El resultado para $a_n < 0$ se demuestra de forma análoga.

Se pueden establecer afirmaciones similares acerca del valor de $\lim_{x \to -\infty} p_n(x)$, pero hay que tener cuidado con un detalle: esta vez la respuesta cambia según que $n$ sea par o impar (dejamos esto como ejercicio).

El próximo ejemplo vuelve a requerir prudencia al aplicar las reglas básicas de los límites (teorema 2.3).

**Ejemplo 4.6** **Un límite de un cociente que no es el cociente de los límites**

Evaluar $\lim_{x \to \infty} \dfrac{5x - 7}{4x + 3}$.

**Solución** Sentimos la tentación de escribir

$$\lim_{x \to \infty} \frac{5x - 7}{4x + 3} = \frac{\lim_{x \to \infty} (5x - 7)}{\lim_{x \to \infty} (4x + 3)}$$

Este uso del teorema 2.3 (iv) es incorrecto, ya que los límites del numerador y del denominador no existen.

$$= \frac{\infty}{\infty} = 1. \tag{4.3}$$

Para verificar la conjetura, dibujamos una gráfica (figura 1.35) y calculamos algunos valores. A primera vista, la gráfica parece consistente con la conjetura. Los valores de la tabla, por el contrario, sugieren que es falsa. ¿Ve los dos errores en (4.3)? El primero es decir que el límite del cociente es igual al cociente de los límites. Esta regla sólo es aplicable si **ambos** límites existen (y el límite del denominador no es 0). Puesto que numerador y denominador tienden a $\infty$, sus límites **no existen**. Además, es un error escribir

$$\frac{\infty}{\infty} = 1. \quad \text{¡Esto es incorrecto!}$$

Esa operación no tiene sentido porque $\infty$ no es un número real. De hecho, cuando un límite lleva a un cociente del tipo $\frac{\infty}{\infty}$, nada se puede decir a priori acerca del valor del límite. Por esa razón se dice que $\frac{\infty}{\infty}$ es una **forma indeterminada**, lo cual significa que el valor de la expresión no está determinada sabiendo sólo que numerador y denominador tienden a $\infty$. (En las secciones 3.1 y 7.6 examinaremos con detalle $\frac{\infty}{\infty}$ y otras formas indeterminadas, tales como $\frac{0}{0}$, $\infty - \infty$ y $0 \cdot \infty$).

**Receta**: Cuando encuentre una forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$ al calcular el límite de una función racional, divida numerador y denominador por la potencia de $x$ más alta que aparezca en el **denominador**.

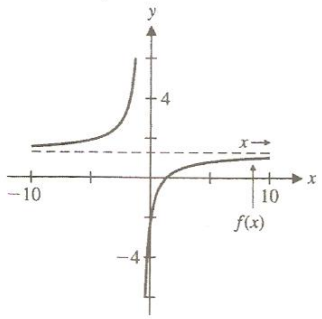



**Figura 1.35**

$\lim_{x \to \infty} \dfrac{5x - 7}{4x + 3} = \dfrac{5}{4}$.

| $x$ | $\frac{5x-7}{4x+3}$ |
|---|---|
| 10 | 1 |
| 100 | 1,223325 |
| 1.000 | 1,247315 |
| 10.000 | 1,249731 |
| 100.000 | 1,249973 |

En nuestro ejemplo,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x-7}{4x+3}=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{5x-7}{4x+3}\cdot\frac{(1/x)}{(1/x)}\right]$$ Multiplicar numerador y denominador por $\frac{1}{x}$.

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{5-7/x}{4+3/x}$$

$$=\frac{\lim_{x\to\infty}(5-7/x)}{\lim_{x\to\infty}(4+3/x)}$$ Usar el teorema 2.3 (iv).

$$=\frac{5}{4}=1{,}25,$$

que es consistente con lo que habíamos observado antes gráfica y numéricamente.

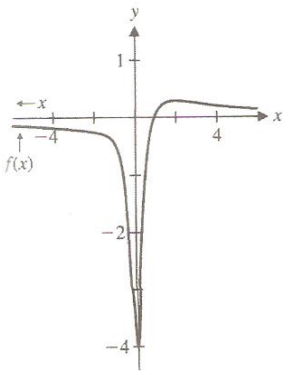



**Figura 1.36**

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{6x^3+3x^2-8}{7x^4+16x^2+2}=0.$$

En los dos próximos ejemplos aplicamos la receta a problemas comunes de límites.

### Ejemplo 4.7 Localización de asíntotas horizontales

Evaluar $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{6x^3+3x^2-8}{7x^4+16x^2+2}$.

**Solución** Antes de efectuar cálculos, miramos una gráfica (figura 1.36). En ella parece que la función tiende a 0 cuando $x\to-\infty$.

Aplicando la receta y el teorema 4.1, vemos que

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{6x^3+3x^2-8}{7x^4+16x^2+2}=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{6x^3+3x^2-8}{7x^4+16x^2+2}\cdot\frac{(1/x^4)}{(1/x^4)}\right]$$ Multiplicar numerador y denominador por $\frac{1}{x^4}$.

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{6/x+3/x^2-8/x^4}{7+16/x^2+2/x^4}$$

$$=\frac{\lim_{x\to-\infty}(6/x+3/x^2-8/x^4)}{\lim_{x\to-\infty}(7+16/x^2+2/x^4)}$$ Usar el teorema 2.3 (iv).

$$=\frac{0}{7}=0.$$

Por tanto, la recta $y=0$ es asíntota horizontal. ¡Cuidado! Eso no significa que la gráfica no cruce la recta $y=0$ (la figura 1.36 muestra claramente que la cruza), sino simplemente que la gráfica tiende a la recta $y=0$ cuando $x\to-\infty$.

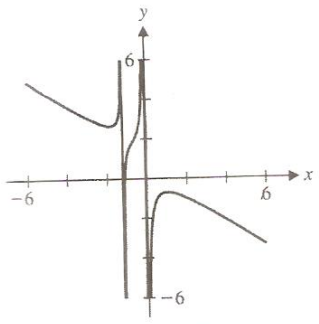



**Figura 1.37a**

$$y=\frac{4x^3+5}{-6x^2-7x}.$$

### Ejemplo 4.8 Localización de asíntotas oblicuas

Evaluar $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{4x^3+5}{-6x^2-7x}$.

**Solución** Como de costumbre, miramos una gráfica (figura 1.37a) y da la impresión de que tiende a $-\infty$ cuando $x\to\infty$. Es más, fuera del intervalo $[-2, 2]$ la gráfica parece una recta. En una ventana mayor (figura 1.37b) esa linealidad es aún más evidente.

Vamos a calcular el límite y ya nos ocuparemos después de saber por qué es como una recta. La receta da

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+5}{-6x^2-7x}=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{4x^3+5}{-6x^2-7x}\cdot\frac{(1/x^2)}{(1/x^2)}\right]$$ Multiplicar numerador y denominador por $\frac{1}{x^2}$.

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4/x+5/x^2}{-6-7/x}$$

$$=-\infty,$$

ya que cuando $x\to\infty$, el numerador tiende a $\infty$ y el denominador tiende a $-6$.

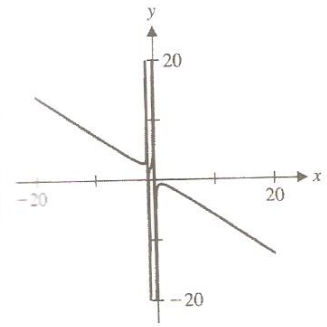



**Figura 1.37b**

$$y=\frac{4x^3+5}{-6x^2-7x}.$$

Para entender el comportamiento que se aprecia en la figura 1.37b, efectuamos la división como sigue.

$$\frac{4x^3 + 5}{-6x^2 - 7x} = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{9} + \frac{5 + 49/9x}{-6x^2 - 7x}.$$

(Compruebe las operaciones). El tercer término de esa suma tiende a 0 cuando $x \to \infty$. Por tanto, los valores de la función tienden a los valores de la función lineal

$$-\frac{2}{3}x + \frac{7}{9},$$

cuando $x \to \infty$. Cuando eso ocurre, se dice que la función tiene una **asíntota oblicua**. Esto es, en lugar de aproximarse a una recta vertical u horizontal, como sucede en las asíntotas verticales u horizontales, la gráfica se acerca a una recta oblicua $y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{9}$. (Éste es el comportamiento que se aprecia en la figura 1.37b).

En el próximo ejemplo volvemos a la discusión sobre la pupila de los animales del comienzo del capítulo.

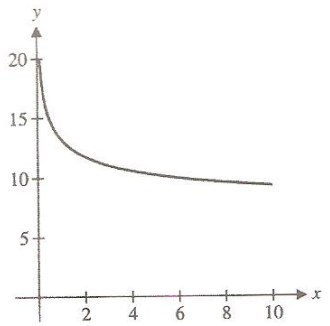



**Figura 1.38a**

$y = f(x)$.

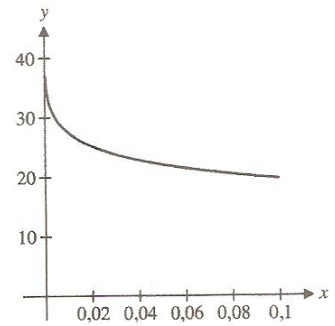



**Figura 1.38b**

$y = f(x)$.

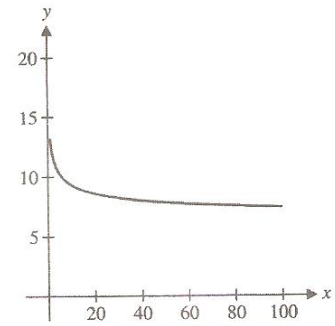



**Figura 1.38c**

$y = f(x)$.

### Ejemplo 4.9 Tamaño de la pupila de un animal

Supongamos que bajo una intensidad luminosa $x$, el diámetro de la pupila viene dado en mm por $f(x) = \dfrac{160x^{-0,4} + 90}{4x^{-0,4} + 15}$. Hallar el diámetro de la pupila bajo intensidad (a) nula, (b) infinita.

**Solución** (a) $f(0)$ no está definido, ya que $0^{-0,4}$ implica una división entre 0. En consecuencia, hemos de analizar el límite de $f(x)$ cuando $x \to 0$; mejor dicho, el límite lateral por la derecha, porque $x$ no puede ser negativo. La figura 1.38a muestra una gráfica de $y = f(x)$ generada en calculadora. En ella, da la impresión de que $f(x)$ tiende a 20 cuando $x \to 0$.

Para calcular el límite, multiplicamos numerador y denominador por $x^{0,4}$ (así eliminamos los exponentes negativos). Se obtiene

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{160x^{-0,4} + 90}{4x^{-0,4} + 15} = \lim_{x \to 0^+} \frac{160x^{-0,4} + 90}{4x^{-0,4} + 15} \cdot \frac{x^{0,4}}{x^{0,4}}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{160 + 90x^{0,4}}{4 + 15x^{0,4}} = \frac{160}{4} = 40 \text{ mm}.$$

El límite no parece compatible con la gráfica, pero la figura 1.38a muestra la curva un poco despegada del eje vertical en $x = 0$. En la figura 1.38b, obtenida haciendo zoom en $0 \le x \le 0,1$, el límite 40 parece razonable.

(b) Consideremos el límite cuando $x \to 0$. La figura 1.38c muestra una gráfica de $y = f(x)$, generada por calculadora, en $0 \le x \le 100$. Sugiere una asíntota horizontal en $y = 5$ aproximadamente. El límite

$$\lim_{x \to \infty} \frac{160x^{-0,4} + 90}{4x^{-0,4} + 15} = \frac{90}{15} = 6 \text{ mm}.$$

significa que la pupila tiende a un tamaño límite de 6 mm.

# EJERCICIOS 1.4

1. Puede parecer extraño usar $\infty$ para describir límites, dado que $\infty$ no es un número real. Debatir sobre $\infty$: ¿es un número o un concepto?

2. En el ejemplo 4.6 aparecía la «forma indeterminada» $\frac{\infty}{\infty}$. Interpretando un límite $\infty$ como «algo que se hace muy grande» y un límite 0 como «algo que se hace muy pequeño», (a) explicar por qué son indeterminadas las formas $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $\infty - \infty$ y $\infty \cdot 0$; (b) describir qué representan estas formas no indeterminadas: $\infty + \infty$, $-\infty - \infty$, $\infty + 0$ y $0/\infty$.

3. Represente en la calculadora $y = 1/(x-2)$ y mire las asíntotas $y = 0$ (horizontal) y $x = 2$ (vertical). Seguramente verá una recta vertical dibujada en $x = 2$ y una gráfica completamente aplastada sobre $y = 0$ para $x$ grandes. ¿Es correcta o falaz esa gráfica? La mayoría de las calculadoras calcula las posiciones de los puntos para $x$ adyacentes e intentan conectarlos con una curva. ¿Por qué eso podría dar lugar a una recta vertical en el lugar de la asíntota vertical?

4. Muchos estudiantes se quedan con la idea de que las asíntotas son rectas a las que la gráfica se acerca más y más sin llegar a tocarlas nunca. Eso es verdad en muchos casos, pero no siempre. Explicar por qué: (a) las asíntotas verticales no se cruzan nunca; (b) las asíntotas horizontales u oblicuas pueden ser cruzadas una o más veces. Dar ejemplos.

**En los ejercicios 5-40, hallar los siguientes límites (la respuesta puede ser un número, $\infty$, $-\infty$ o que no existe).**

5. $\lim_{x \to 1^-} \frac{1-2x}{x^2-1}$
6. $\lim_{x \to 1^+} \frac{1-2x}{x^2-1}$
7. $\lim_{x \to 1} \frac{1-2x}{x^2-1}$
8. $\lim_{x \to -1^-} \frac{1-2x}{x^2-1}$
9. $\lim_{x \to -1^+} \frac{1-2x}{x^2-1}$
10. $\lim_{x \to -1} \frac{1-2x}{x^2-1}$
11. $\lim_{x \to 2^-} \frac{4-x}{(x-2)^2}$
12. $\lim_{x \to 2^+} \frac{4-x}{(x-2)^2}$
13. $\lim_{x \to 2} \frac{4-x}{(x-2)^2}$
14. $\lim_{x \to -2^+} \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$
15. $\lim_{x \to 2^-} \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$
16. $\lim_{x \to 3^+} (x^2-2x-3)^{-2/3}$
17. $\lim_{x \to -1^-} (x^2-2x-3)^{-2/3}$
18. $\lim_{x \to \infty} \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$
19. $\lim_{x \to -\infty} \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$
20. $\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2-x+1}{4x^2-3x-1}$
21. $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3-2x+1}{3x^3+4x^2-1}$
22. $\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2-1}{4x^3-5x-1}$
23. $\lim_{x \to \infty} \frac{x^3-2x+5}{3x^2+4x-1}$
24. $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2-\operatorname{sen} x}{x-5}$
25. $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2-\operatorname{sen} x}{x^2+4x-1}$
26. $\lim_{x \to -\infty} \frac{x+\cos x}{3x+2}$
27. $\lim_{x \to \infty} \frac{3x^3-x+5}{4x^3+4x^2-1}$
28. $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2-x+2}{\sqrt{x^4+2x+3}}$
29. $\lim_{x \to \infty} (\sqrt{x^2+3}-x)$
30. $\lim_{x \to \infty} (\sqrt{4x^2-2x+1}-2x)$
31. $\lim_{x \to \infty} e^{2x}$
32. $\lim_{x \to -\infty} e^{2x}$
33. $\lim_{x \to \infty} \operatorname{sen} 2x$
34. $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}(1/x)$
35. $\lim_{x \to \infty} (e^{-3x} \cos 2x)$
36. $\lim_{x \to -\infty} (e^{4x} \operatorname{sen} x)$
37. $\lim_{x \to \infty} \ln 2x$
38. $\lim_{x \to 0^+} \ln 2x$
39. $\lim_{x \to 0^+} (x \ln 2x)$
40. $\lim_{x \to \infty} (x/\ln 2x)$

**En los ejercicios 41-50, hallar todas las asíntotas, horizontales, verticales y oblicuas.**

41. $f(x) = \frac{x}{4+x^2}$
42. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$
43. $f(x) = \frac{x}{4-x^2}$
44. $f(x) = \frac{x^2}{4-x^2}$
45. $f(x) = \frac{x^3}{4-x^2}$
46. $f(x) = \frac{x^4}{4-x^2}$
47. $f(x) = \frac{x^3}{4+x^2}$
48. $f(x) = \frac{\sqrt{x^4+2}}{4-x^2}$
49. $f(x) = \frac{2x^3}{x^2-x+1}$
50. $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2-2x+1}$

51. Esbozar la gráfica de $f(x) = e^{-x} \cos x$. Identificar la asíntota horizontal. ¿Es asíntota en las dos direcciones, $x \to \infty$ y $x \to -\infty$? ¿Cuántas veces la cruza la gráfica?

52. Explicar por qué es razonable que $\lim_{x \to \infty} f(x) = f(1/x)$ y $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(1/x)$.

53. En los ejercicios de la sección 1.1 vimos que $\lim_{x \to 0^+} (1+x)^{1/x} = \lim_{x \to 0^-} (1+x)^{1/x}$. (De hecho, ambos límites son iguales al número irracional $e$). Argumentar, usando eso y el ejercicio 52, que $\lim_{x \to \infty} (1+1/x)^x = \lim_{x \to -\infty} (1+1/x)^x$.

54. Una de las razones por las que se dice que los límites infinitos no existen es que, de lo contrario, se invalidaría el teorema 2.3 de la sección 1.2. Dar ejemplos de funciones con límites infinitos tales que las partes (ii) y (iv) de ese teorema sean falsas.

55. Si la longitud de un animal $t$ días después de su nacimiento es $h(t) = \dfrac{300}{1 + 9(0{,}8)^t}$ mm, ¿cuánto midió al nacer? ¿Qué tamaño alcanzará como máximo (es decir, cuando $t \to \infty$)?

56. Si la longitud de un animal $t$ días después de su nacimiento es $h(t) = \dfrac{300}{2 + 3(0{,}4)^t}$ mm, ¿cuánto midió al nacer? ¿Qué tamaño alcanzará como máximo (es decir, cuando $t \to \infty$)?

57. Bajo una intensidad luminosa $x$, el tamaño de la pupila de un animal viene dado en mm por $f(x) = \dfrac{80x^{-0,3} + 60}{9x^{-0,3} + 5}$. Calcular el tamaño cuando la intensidad es nula o infinita.

58. Repetir el ejercicio 57 con $f(x) = \dfrac{80x^{-0,3} + 60}{8x^{-0,3} + 15}$.

59. Modificar las funciones de los ejercicios 57 y 58 de modo que la nueva función verifique $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 8$ y $\lim_{x \to \infty} f(x) = 2$.

60. Tras ser inyectado, la concentración de un fármaco en el músculo varía en el tiempo $t$ (en horas) de acuerdo con $f(t) = e^{-0,02t} - e^{-0,42t}$. Hallar el límite de $f(t)$ para $t \to 0$ y para $t \to \infty$ e interpretar los dos límites en el contexto del problema.

61. Un objeto con velocidad inicial $v_0 = 0$ y masa $m$ es acelerado por una fuerza $F$ durante $t$ segundos. Por la ley de Newton, la velocidad del objeto será $v_N = Ft/m$. Según la teoría de la relatividad, su velocidad será $v_E = Fct/\sqrt{m^2c^2 + F^2t^2}$, donde $c$ denota la velocidad de la luz. Calcular $\lim_{t \to \infty} v_N$ y $\lim_{t \to \infty} v_E$.

62. Según la teoría de la relatividad de Einstein, la masa de un objeto que viaja a velocidad $v$ viene dada por $m = m_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, donde $c$ es la velocidad de la luz (300.000 km/s). Calcular $\lim_{v \to 0} m$ y explicar por qué $m_0$ se llama «masa en reposo». Calcular $\lim_{v \to c^-} m$ y discutir sus implicaciones. (¿Qué ocurre si se viaja en una nave espacial a velocidad próxima a la de la luz?). ¿En qué factor aumenta la masa de una persona que viaje a 1.325 m/s (cuatro veces la velocidad del sonido)?

63. Explicar por qué $\lim_{t \to \infty} (e^{-at} \operatorname{sen} t) = 0$ para toda constante $a > 0$. Aunque eso es cierto, no es necesariamente útil en la práctica. La función $e^{-at} \operatorname{sen} t$ es un modelo simple para un sistema muelle-masa, tal como la suspensión de un automóvil. Supongamos $t$ medido en segundos y que los pasajeros no aprecian vibraciones por debajo de 0,01 (pulgadas). Si el sistema de suspensión A tiene función de vibración $e^{-t} \operatorname{sen} t$ y el B tiene $e^{-t/4} \operatorname{sen} t$, analizar gráficamente cuánto tardarán las vibraciones en superar la cota $|f(t)| < 0{,}01$. ¿Sirve de consuelo el resultado $\lim_{t \to \infty} (e^{-at} \operatorname{sen} t) = 0$ al propietario del automóvil B?

64. La velocidad de un paracaidista de 128 libras en caída libre viene dada aproximadamente por $v = \dfrac{128}{k}(1 - e^{-kt/4})$ pies/s, donde la constante $k$ depende de la orientación de su cuerpo. Calcular $\lim_{t \to \infty} v$. Explicar por qué se llama a esto «velocidad terminal». Comparar las velocidades terminales de paracaidistas en posición de águila extendida ($k = 3$) y en posición plegada ($k = 1$). ¿Cómo controlan su velocidad los paracaidistas en caída libre?

65. Enunciar y demostrar un resultado análogo al teorema 4.2 para $\lim_{x \to -\infty} p_n(x)$, con $n$ impar.

66. Enunciar y demostrar un resultado análogo al teorema 4.2 para $\lim_{x \to -\infty} p_n(x)$, con $n$ par.

67. Es muy difícil encontrar enunciados que sean siempre ciertos en Cálculo. De ahí la importancia de los aspectos teóricos. Puede haber oído esta receta: para hallar las asíntotas verticales de $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$, basta resolver $h(x) = 0$. Dar un ejemplo en el que $h(a) = 0$ pero no hay asíntota vertical en $x = a$.

68. El ejercicio 67 prueba la falsedad de esta afirmación: si $h(a) = 0$, entonces $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ tiene asíntota vertical en $x = a$. Pero tal vez la recíproca sea verdadera, es decir: si $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ tiene una asíntota vertical en $x = a$, entonces $h(a) = 0$. ¿Es cierta? ¿Y si $g$ y $h$ son polinomios?

**En los ejercicios 69-74, conjeturar, por evidencia numérica, la representación decimal del límite. Contrastar la respuesta con un PCS. Si las respuestas no coinciden, argumentar cuál es la correcta.**

69. $\lim_{x \to 0^+} x^{1/\ln x}$

70. $\lim_{x \to 1^+} (\ln x)^{x^2 - 1}$

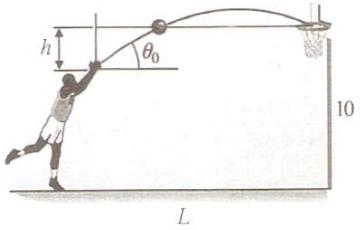
71. $\lim_{x \to \infty} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^x$

72. $\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \dfrac{2}{x}\right)^x$

73. $\lim_{x \to \infty} x^{1/x}$

74. $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{\ln x}{x^2}$

75. Lanzamos un balón a canasta desde la posición de la figura. Para lograr un enceste perfecto hay que conseguir que la velocidad inicial $v_0$ y el ángulo $\theta_0$ satisfagan la ecuación $v_0 = \sqrt{gL} / \sqrt{2 \cos^2 \theta_0 (\tan \theta_0 - h/L)}$. Para un lanzamiento libre, tomar $L = 15$, $h = 2$ y $g = 32$ y representar $v_0$ en función de $\theta_0$. ¿Qué significan las dos asíntotas verticales? Explicar, en términos físicos, qué lanzamiento corresponde a cada una de ellas. Estimar el mínimo valor ($v_{\text{mín}}$) de $v_0$. Explicar por qué es más fácil encestar un lanzamiento con velocidad inicial pequeña. Hay otra desventaja de una velocidad inicial grande. Supongamos que las canastas miden 2 pies de diámetro y el balón 1 pie.



Para un tiro libre, $L = 15$ es perfecto. ¿Cuál es la máxima distancia horizontal, $L_{máx}$, que puede recorrer el balón antes de entrar en la cesta (sin rebote en el tablero)? ¿Y la mínima, $L_{mín}$? Calcular el ángulo $\theta_1$ correspondiente a $v_{mín}$ y $L_{mín}$, y el ángulo $\theta_2$ correspondiente a $v_{mín}$ y $L_{máx}$. La diferencia $|\theta_1 - \theta_2|$ es el margen de error. Brancazio ha demostrado que el margen de error angular para $v_{mín}$ es mayor que para cualquier otra velocidad inicial.

76. En las aplicaciones es usual calcular $\lim_{x \to \infty} f(x)$ para determinar la «estabilidad» de $f(x)$. Sea $f(x) = xe^{-x}$. Cuando $x \to \infty$, el primer factor de $f(x)$ tiende a $\infty$ y el segundo a 0. ¿Qué hace el producto cuando un factor se hace muy grande y otro muy pequeño? Depende de cuál va más rápido, de cuál «domina». Usar evidencia numérica y gráfica para conjeturar el valor de $\lim_{x \to \infty} (xe^{-x})$. ¿Qué función domina? Y en el límite $\lim_{x \to \infty} (x^2e^{-x})$, ¿cuál domina? Misma cuestión para $\lim_{x \to \infty} (x^5e^{-x})$. Según estos ejemplos, ¿es siempre cierto que la exponencial domina a los polinomios? Intente ver cuál de estas funciones domina: ¿polinomios o logaritmos?

## 1.5 LA DEFINICIÓN RIGUROSA DE LÍMITE

Nuestra situación es un tanto incómoda. Hemos dedicado muchas páginas a calcular límites cuando, a decir verdad, todavía no hemos *definido* qué es un límite. Hemos dado sólo una idea intuitiva del tipo siguiente. Decimos que

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

si $f(x)$ se aproxima cada vez más a $L$ cuando $x$ se acerca más y más al valor $a$.

Hasta este momento hemos vivido tranquilos y felices con esta descripción tan vaga, aunque intuitiva. En esta sección seremos más precisos. A tal fin, empezaremos viendo cómo funciona el **análisis matemático** (la rama de las Matemáticas de las que el Cálculo es sólo un primer eslabón).

Estudiar matemáticas más avanzadas sin entender el concepto riguroso de límite es algo así como pretender estudiar cirugía del cerebro sin conocimiento alguno de Biología y Química. Puede parecer que el cirujano no utiliza esos conocimientos, pero ninguno de los autores consentiría ser intervenido por alguien que no posea una base firme en esos campos. La razón es obvia. En Medicina, sólo tras un cuidadoso examen del mundo microscópico se ha alcanzado la comprensión profunda de nuestro mundo macroscópico y los buenos cirujanos deben saber qué están haciendo **y por qué**. La simple eficacia técnica no es suficiente. Del mismo modo, en el análisis matemático sólo a través del comportamiento microscópico de las funciones (el concepto riguroso de límite, por ejemplo) se llega a entender las cosas.

Comenzamos por el examen detallado de un ejemplo elemental. A estas alturas no es difícil creer que

$$\lim_{x \to 2} (3x + 4) = 10.$$

Hemos visto que el límite de un polinomio se halla sustituyendo el valor de $x$ al que se tiende. Imagine que debe explicar el significado de ese límite a un hermano menor. Probablemente repetiría la explicación intuitiva usada hasta ahora: cuando $x$ se acerca más y más a 2, $(3x + 4)$ está cada vez más cerca de 10. Pero ¿qué significa realmente *cerca*? Es una palabra relativa, imprecisa por naturaleza. Por ejemplo, si alguien me pregunta dónde nací y contesto «cerca de Marte», va a pensar que soy un excéntrico. Por el contrario, de visita en otra galaxia, si diera esa misma respuesta a un extraterrestre, mi respuesta sería perfecta (supuesto que él supiera dónde está Marte). Así, pues, al decir *cerca* hablando de límites, ¿qué intentamos comunicar? Una respuesta posible es decir que si $\lim_{x \to 2} (3x + 4) = 10$, podemos acercar $(3x + 4)$ a 10 tanto como queramos tomando $x$ suficientemente próximo a 2. Ahora bien, ¿podemos hacer esto? Por ejemplo, ¿podemos obligar a $(3x + 4)$ a que diste de 10 menos de 1? Para ver qué valores de $x$ garantizan eso, escribimos la desigualdad

$$|(3x + 4) - 10| < 1.$$

### Notas históricas

**Augustin Louis Cauchy (1789-1857).** Matemático francés que introdujo las definiciones ε-δ de límite y continuidad. Cauchy, uno de los matemáticos más prolíficos de la historia, aportó importantes contribuciones en teoría de números, álgebra lineal, ecuaciones diferenciales, astronomía, óptica y análisis complejo. Persona de trato difícil, mereció de un colega este comentario: «Cauchy está loco y no tiene arreglo, pero, hoy por hoy, es el único que sabe cómo hacer matemáticas».

que significa «la distancia de $(3x+4)$ a 10 es menor que 1». Eliminando el valor absoluto, se reescribe

$$-1 < (3x+4) - 10 < 1,$$

es decir,

$$-1 < 3x - 6 < 1.$$

Puesto que queremos saber cómo de cerca debe estar $x$ de 2, despejamos $x-2$ en vez de $x$. Dividiendo entre 3 se obtiene

$$-\frac{1}{3} < x - 2 < \frac{1}{3},$$

o sea,

$$|x-2| < \frac{1}{3}. \tag{5.1}$$

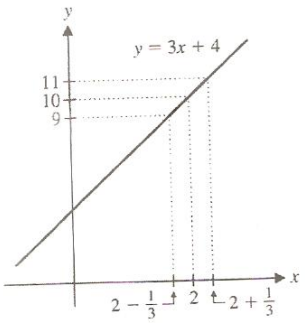



**Figura 1.39a**

$2 - \frac{1}{3} < x < 2 + \frac{1}{3}$ garantiza que $|(3x+4) - 10| < 1$.

Invirtiendo este proceso a partir de (5.1) se ve que si $x$ dista de 2 menos de $\frac{1}{3}$, entonces $(3x+4)$ dista de 10 menos de 1. (La figura 1.39a muestra la interpretación gráfica de esto). ¿Le convence todo lo anterior de que realmente podemos hacer que $(3x+4)$ esté tan cerca como queramos de 10? Probablemente no, pero usando una distancia más pequeña quizá quede más satisfecho. ¿Podemos hacer que $(3x+4)$ diste de 10 menos de $\frac{1}{100}$? Esto equivale a

$$|(3x+4) - 10| < \frac{1}{100},$$

o suprimiendo el valor absoluto,

$$-\frac{1}{100} < (3x+4) - 10 < \frac{1}{100},$$

o sea,

$$-\frac{1}{100} < 3x - 6 < \frac{1}{100}.$$

Dividiendo entre 3 queda

$$-\frac{1}{300} < x - 2 < \frac{1}{300},$$

lo que equivale a

$$|x-2| < \frac{1}{300}.$$

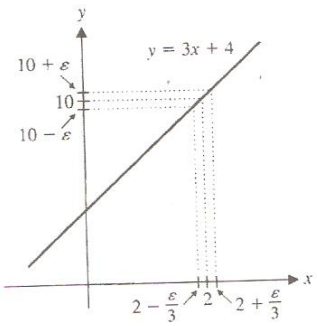



**Figura 1.39b**

Conjunto de valores de $x$ tales que $|(3x+4) - 10| < \varepsilon$.

¿Ya está convencido de que se puede hacer que $(3x+4)$ esté tan cerca de 10 como se desee? Algo más sí, pero seguro que mantiene cierto escepticismo. Todo cuanto hemos probado es que podemos acercar $(3x+4)$ a muy poca distancia de 10. Así que ¿cómo de cerca necesitamos llegar? La respuesta es: arbitrariamente cerca, todo lo cerca que quienquiera pueda demandar.

La forma de probarlo es repetir el argumento, pero esta vez con una distancia no especificada, digamos $\varepsilon$ (*épsilon*, con $\varepsilon > 0$). Esto es, probemos que se puede acercar $(3x+4)$ a una distancia menor que $\varepsilon$ de 10 (por pequeño que sea $\varepsilon$), sin más que tomar $x$ suficientemente próximos a 2 (figura 1.39b). Por tanto, el objetivo es hallar un intervalo de $x$ que satisfaga la condición

$$|(3x+4) - 10| < \varepsilon.$$

O lo que es equivalente,

$$-\varepsilon < (3x+4) - 10 < \varepsilon.$$

o bien

$$-\varepsilon < 3x - 6 < \varepsilon.$$

Dividiendo entre 3 se obtiene

$$-\frac{\varepsilon}{3} < x - 2 < \frac{\varepsilon}{3}$$

es decir,

$$|x-2|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Nótese que cada uno de los pasos precedentes es reversible, de modo que $|x-2|<\frac{\varepsilon}{3}$ implica que $|(3x+4)-10|<\varepsilon$. Eso quiere decir que siempre que $x$ diste de 2 menos de $\frac{\varepsilon}{3}$, $(3x+4)$ dista de 10 menos de la distancia $\varepsilon$ requerida. Es decir,

$$|(3x+4)-10|<\varepsilon \text{ siempre que } |x-2|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Deténgase un momento a reflexionar sobre lo que hemos hecho. Tomando una distancia $\varepsilon$ no especificada, hemos verificado que podemos hacer que $(3x+4)$ esté tan cerca de 10 como se exija (o sea, arbitrariamente cerca, por pequeño que sea el valor de $\varepsilon$), simplemente tomando $x$ suficientemente próximo a 2. Más aún, hemos hecho explícito qué significa «suficientemente próximo a 2» en ese ejemplo. Así, pues, independientemente de cuán cerca de 10 se nos exija llevar $(3x+4)$, lo podemos conseguir tomando $x$ en el intervalo apropiado.

A continuación, examinamos esta noción más precisa de límite en el caso de una función que no está definida en el punto en cuestión.

### Ejemplo 5.1 Demostración de que un límite es correcto

Demostrar que $\lim_{x\to 1}\dfrac{2x^2+2x-4}{x-1}=6$.

**Solución** Dejamos como ejercicio (fácil) aplicar las reglas usuales de los límites para llegar a esa conclusión. Otra cosa es verificar que ese valor es correcto según nuestro nuevo baremo de rigor para la definición de límites. En este caso, queremos saber cómo hay que tomar $x$, cercano a 1, para garantizar que

$$f(x)=\frac{2x^2+2x-4}{x-1}$$

dista de 6 menos de una cantidad $\varepsilon$ no especificada.

Nótese, antes de nada, que $f$ no está definida **en** $x=1$. Buscamos una distancia $\delta$ (*delta*, $\delta>0$) tal que si $x$ dista de 1 menos que $\delta$ (pero $x\neq 1$), entonces $|f(x)-6|<\varepsilon$. Eso equivale a decir que

$$0<|x-1|<\delta \text{ garantiza que } |f(x)-6|<\varepsilon.$$

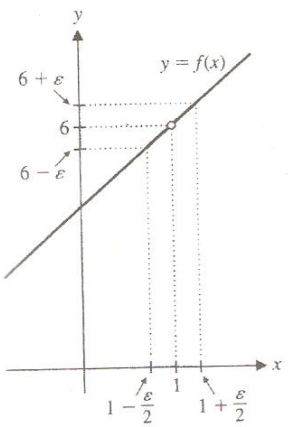



**Figura 1.40**

$0<|x-1|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ garantiza que

$6-\varepsilon<\dfrac{2x^2+2x-4}{x-1}<6+\varepsilon.$

Hemos exigido $0<|x-1|$ para asegurarnos de que $x\neq 1$. La condición $|f(x)-6|<\varepsilon$ equivale a

$$-\varepsilon<\frac{2x^2+2x-4}{x-1}-6<\varepsilon.$$

Reduciendo a común denominador, se obtiene

$$-\varepsilon<\frac{2x^2+2x-4-6(x-1)}{x-1}<\varepsilon, \quad \text{o sea,} \quad -\varepsilon<\frac{2x^2-4x+2}{x-1}<\varepsilon.$$

Factorizando el numerador, queda

$$-\varepsilon<\frac{2(x-1)^2}{x-1}<\varepsilon.$$

Puesto que $x\neq 1$ podemos cancelar los factores $(x-1)$ para obtener

$$-\varepsilon<2(x-1)<\varepsilon.$$

Finalmente, dividiendo entre 2 se llega a

$$-\frac{\varepsilon}{2}<x-1<\frac{\varepsilon}{2},$$

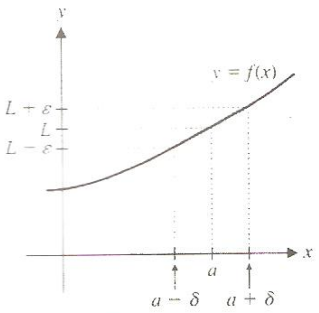



**Figura 1.41**

$a - \delta < x < a + \delta$ implica que $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$.

### Nota 5.1

Queremos recalcar que la idea que subyace en esta definición rigurosa de límite no es nueva. Es tan sólo una formulación matemáticamente precisa de la noción intuitiva que hemos estado manejando desde el comienzo de este capítulo. Además, hay que añadir, para ser sinceros, que es muy difícil, en general, hallar $\delta$ en función de $\varepsilon$, excepto en unos cuantos casos simples. A pesar de lo cual, aprender cómo funciona la definición aclara mucho un concepto tan profundo como éste.

lo que equivale a $|x - 1| < \varepsilon/2$. Por tanto, tomando $\delta = \varepsilon/2$ y volviendo hacia atrás vemos que exigiendo que $x$ satisfaga

$$0 < |x - 1| < \delta$$

tenemos garantizado que

$$\left| \frac{2x^2 + 2x - 4}{x - 1} - 6 \right| < \varepsilon.$$

La figura 1.40 ilustra el proceso gráficamente.

Lo anterior motiva la siguiente definición general, ilustrada en la figura 1.41.

**Definición 5.1 (Definición rigurosa de límite)**
Para una función $f$ definida en un intervalo abierto que contiene $x = a$ (pero no necesariamente en el propio $a$), se dice que

$$\lim_{x \to a} f(x) = L,$$

si dado cualquier número $\varepsilon > 0$, existe otro número $\delta > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta$ garantiza que $|f(x) - L| < \varepsilon$.

El ejemplo que sigue, apenas un poco más complicado, plantea un reto inesperado.

**Ejemplo 5.2** **Aplicación de la definición rigurosa de límite**

Usando la definición 5.1, demostrar que $\lim_{x \to 2} (x^2 + 1) = 5$.

**Solución** Es otro caso simple de límite de un polinomio. Si el enunciado es correcto, para cada $\varepsilon > 0$ debe haber un $\delta > 0$ con el cual $0 < |x - 2| < \delta$ garantiza que

$$|(x^2 + 1) - 5| < \varepsilon.$$

Nótese que

$$\begin{aligned} |(x^2 + 1) - 5| &= |x^2 - 4| \\ &= |x + 2|\,|x - 2|. \end{aligned} \qquad \text{Factorizar la diferencia de cuadrados} \qquad (5.2)$$

Queremos despejar $|x - 2|$, así que hemos de hacer algo con el término $|x + 2|$. Como sólo nos interesa lo que ocurre cerca de $x = 2$, vamos a considerar sólo los $x$ que distan de 2 menos de 1, es decir, $|x - 2| < 1$. Eso será cierto si exigimos $\delta \leq 1$ y $|x - 2| < \delta$. En tal caso,

$$|x + 2| \leq 5, \qquad \text{Porque } x \in [1, 3].$$

así que de (5.2) se sigue

$$\begin{aligned} |(x^2 + 1) - 5| &= |x + 2|\,|x - 2| \\ &\leq 5|x - 2|. \end{aligned} \qquad (5.3)$$

Finalmente, si exigimos

$$5|x - 2| < \varepsilon, \qquad (5.4)$$

entonces (5.3) implica que

$$|(x^2 + 1) - 5| \leq 5|x - 2| < \varepsilon.$$

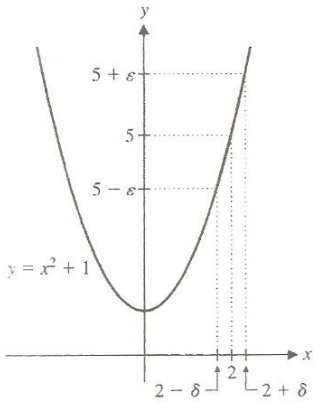



**Figura 1.42**

$0 < |x - 2| < \delta$ implica que $|(x^2 + 1) - 5| < \varepsilon$.

Naturalmente, (5.4) es también equivalente a

$$|x - 2| < \frac{\varepsilon}{5}.$$

En vista de lo cual tenemos ahora dos restricciones: $|x - 2| < 1$ y $|x - 2| < \frac{\varepsilon}{5}$. Para asegurar que ambas se satisfacen, elegimos $\delta = \text{mín}\left\{1, \frac{\varepsilon}{5}\right\}$ (el **mínimo** de 1 y $\frac{\varepsilon}{5}$). Volviendo hacia atrás vemos que para esa elección de $\delta$,

$$0 < |x - 2| < \delta$$

implica que

$$|(x^2 + 1) - 5| < \varepsilon,$$

como deseábamos. La figura 1.42 ilustra la situación.

## Exploración gráfica del concepto de límite

Hallar el $\delta$ apropiado para cada $\varepsilon$ dado no es tarea fácil. Incluso en el ejemplo 5.2, con algo tan simple como un polinomio cuadrático, es un reto. Por desgracia, no hay un método que funcione en todos los casos. Sin embargo, ante funciones complicadas podemos explorar la definición gráficamente. En primer lugar, reexaminemos el ejemplo 5.2 gráficamente.

### Ejemplo 5.3 Exploración gráfica del concepto de límite

Analizar gráficamente la definición rigurosa del límite $\lim_{x \to 2} (x^2 + 1) = 5$.

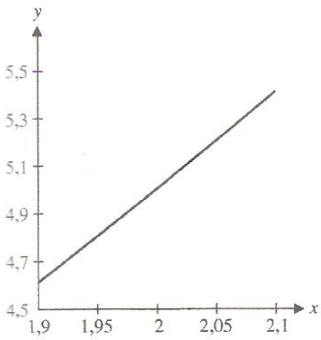



**Figura 1.43**

$y = x^2 + 1$.

**Solución** En el ejemplo 5.2 descubrimos que con $\delta = \text{mín}\left\{1, \frac{\varepsilon}{5}\right\}$,

$$0 < |x - 2| < \delta \text{ implica que } |(x^2 + 1) - 5| < \varepsilon.$$

Eso significa que (con $\varepsilon \leq 5$) si dibujamos la gráfica de $y = x^2 + 1$ sólo para los $x$ del intervalo $\left(2 - \frac{\varepsilon}{5}, 2 + \frac{\varepsilon}{5}\right)$, los valores de $y$ estarán en el intervalo $(5 - \varepsilon, 5 + \varepsilon)$. Tomemos $\varepsilon = \frac{1}{2}$, por ejemplo. Si dibujamos la gráfica en la ventana $2 - \frac{1}{10} \leq x \leq 2 + \frac{1}{10}$ y $4{,}5 \leq y \leq 5{,}5$, la gráfica no saldrá verticalmente fuera de ella (figura 1.43). Es evidente que podemos dibujar una gráfica análoga para cualquier valor de $\varepsilon$, ya que disponemos de una fórmula explícita para calcular $\delta$ a partir de un $\varepsilon$ dado. En la mayoría de las situaciones no somos tan afortunados.

### Ejemplo 5.4 Exploración del límite de una función trigonométrica

Hallar gráficamente un $\delta > 0$ correspondiente (a) $\varepsilon = \frac{1}{2}$ y (b) $\varepsilon = 0{,}1$ para $\lim_{x \to 2} \text{sen}\, \frac{\pi x}{2} = 0$.

**Solución** El valor del límite parece razonable, ya que $\text{sen}\, \frac{2\pi}{2} = 0$ y la función $f(x) = \text{sen}\, x$ es continua, como ya sabemos. Pero estamos tratando de probarlo con rigor. Dado cualquier $\varepsilon > 0$, deseamos encontrar un $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - 2| < \delta \quad \text{garantice que} \quad \left|\text{sen}\, \frac{\pi x}{2} - 0\right| < \varepsilon.$$

Como no hay álgebra que simplifique $\text{sen}\, \frac{\pi x}{2}$, no hay esperanza de lograrlo por ese camino. En vez de eso, vamos a intentar hallar gráficamente los $\delta$ correspondientes a $\varepsilon$ dados.

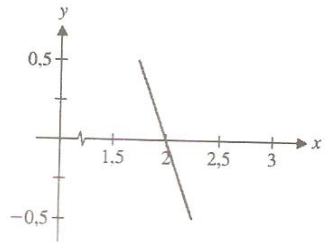



**Figura 1.44a**
$y = \text{sen}\,\frac{\pi x}{2}$.

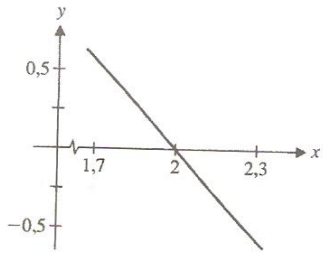



**Figura 1.44b**
$y = \text{sen}\,\frac{\pi x}{2}$.

En primer lugar, para $\varepsilon = \frac{1}{2}$ buscamos un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - 2| < \delta$, entonces

$$-\frac{1}{2} < \text{sen}\,\frac{\pi x}{2} - 0 < \frac{1}{2}.$$

Dibujando la gráfica de $y = \text{sen}\,\frac{\pi x}{2}$ en el intervalo [1, 3] obtenemos la figura 1.44a.

Si utiliza una calculadora comprobará que la gráfica no escapa de la pantalla (o sea, los valores de $y$ están en el intervalo [–0,5, 0,5] para $x \in [1{,}666667, 2{,}333333]$). Así, hemos probado gráficamente que para $\varepsilon = \frac{1}{2}$, la elección

$$\delta = 2{,}333333 - 2 = 2 - 1{,}666667 = 0{,}333333$$

es adecuada. (Cualquier valor de $\delta$ menor que 0,333333 valdría también, claro está). Eso queda aún más claro si dibujamos de nuevo la última gráfica restringiendo $x$ al intervalo [1,666667, 2,333333] (figura 1.44b). En este caso, la gráfica queda dentro de la ventana en ese intervalo de $x$.

(b) Si $\varepsilon = 0{,}1$, necesitamos valores de $x$ próximos a $x = 2$ que garanticen que $\text{sen}\,\frac{\pi x}{2}$ estará entre –0,1 y 0,1. Repetimos la figura 1.44a con el rango de $y$ restringido al intervalo [–0,1, 0,1] (figura 1.45). En ella vemos que los valores de $y$ pertenecen al rango deseado si $x \in [1{,}936508, 2{,}063492]$. Por tanto, hemos determinado experimentalmente que

$$\delta = 2{,}063492 - 2 = 2 - 1{,}936508 = 0{,}063492$$

es una elección correcta. Y de nuevo queda más claro si repetimos la figura 1.45 usando el nuevo rango de valores de $x$ (figura 1.46), ya que la gráfica no escapa de la pantalla para esos valores de $x$.

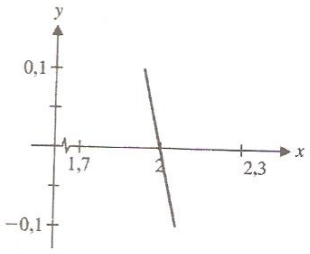



**Figura 1.45**
$y = \text{sen}\,\frac{\pi x}{2}$.

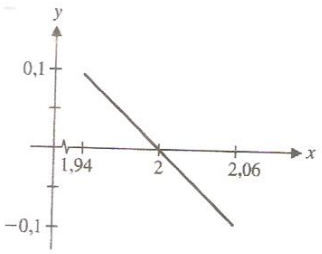



**Figura 1.46**
$y = \text{sen}\,\frac{\pi x}{2}$.

Es importante advertir que con lo que acabamos de hacer no hemos **demostrado** que el límite era correcto. Demostrar eso requeriría encontrar un $\delta$ para **cualquier** $\varepsilon$. Sólo hemos aprovechado las gráficas para familiarizarnos con la definición y con lo que representan $\varepsilon$ y $\delta$ en ella.

| $x$ | $\frac{x^2 + 2x}{\sqrt{x^3 + 4x^2}}$ |
|---|---|
| 0,1 | 1,03711608 |
| 0,01 | 1,0037461 |
| 0,001 | 1,00037496 |
| 0,0001 | 1,0000375 |

**Ejemplo 5.5** **Exploración de la definición de límite cuando el límite no existe**

Averiguar si es cierto que $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 2x}{\sqrt{x^3 + 4x^2}} = 1$.

**Solución** Ese valor del límite viene avalado por la tabla de valores al margen. Pero sería un **grave** error no mirar qué ocurre para valores $x < 0$ ni una gráfica como ayuda (véase la figura 1.47a, generada con calculadora). Estos descuidos son muy peligrosos. En la gráfica no

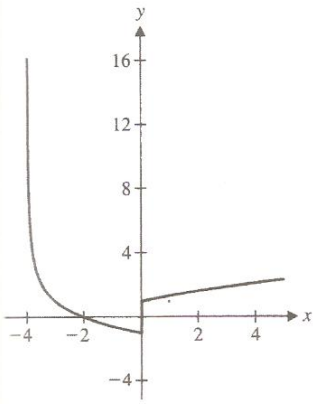



**Figura 1.47a**

$y = \dfrac{x^2 + 2x}{\sqrt{x^3 + 4x^2}}$.

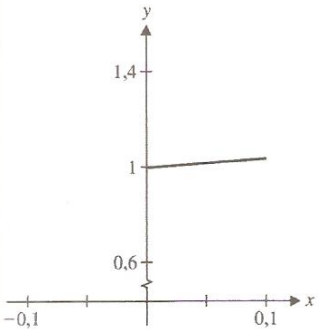



**Figura 1.47b**

$y = \dfrac{x^2 + 2x}{\sqrt{x^3 + 4x^2}}$.

da la impresión de que los valores de $y$ se aproximen a 1 cuando $x \to 0^-$. Vamos a investigar el límite gráficamente para $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Hemos de hallar un $\delta > 0$ tal que $0 < |x| < \delta$ garantice que

$$1 - \frac{1}{2} < \frac{x^2 + 2x}{\sqrt{x^3 + 4x^2}} < 1 + \frac{1}{2},$$

es decir,

$$\frac{1}{2} < \frac{x^2 + 2x}{\sqrt{x^3 + 4x^2}} < \frac{3}{2}.$$

Ensayamos con $\delta = 0{,}1$ para ver si es suficientemente pequeño. Tomamos $x$ con rango $[-0{,}1,\ 0{,}1]$ e $y$ con rango $[0{,}5,\ 1{,}5]$, lo que da la figura 1.47b. No aparece punto alguno en $x < 0$. La definición exige que los valores de $y$ deben estar en el intervalo $(0{,}5,\ 1{,}5)$ para **todo** $x$ en $(-\delta,\ \delta)$. Vemos que $\delta = 0{,}1$ no sirve. Así, $x = -0{,}05$ está en $(-\delta,\ \delta)$ y, sin embargo, $f(-0{,}05) \approx -0{,}981$ no está en $(0{,}5,1{,}5)$. Pues bien, es fácil convencerse de que la situación no tiene arreglo: por pequeño que se tome $\delta$ hay un $x$ en el intervalo $(-\delta,\ \delta)$ para el que $f(x) \notin (0{,}5,\ 1{,}5)$ [para cualquier $x$ en $(-1,\ 0)$, $f(x) < 0$]. En consecuencia, el límite 1 conjeturado no es correcto.

Una observación pertinente: una tabla de valores incluyendo $x < 0$ o hacer zoom en la gráfica inicial nos hubiera disuadido de conjeturar el valor 1 para ese límite. Así, hemos probado que el límite no es 1; demostrar que no existe es más difícil.

## Límites infinitos y límites en el infinito

Recordemos que $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2}$ no existe, pero para ser más explícitos hemos acordado escribir

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$$

Este símbolo significa que el límite no existe porque la función crece sin tope cuando $x \to 0$. Al igual que nuestra noción intuitiva de $\lim_{x \to a} f(x) = L$, esta descripción adolece de falta de rigor. Afirmando que $\dfrac{1}{x^2}$ crece sin tope cuando $x \to 0$ queremos comunicar que podemos hacer $\dfrac{1}{x^2}$ tan grande como queramos sin más que tomar $x$ suficientemente próximo a 0. Ahora bien, ¿cómo de grande queremos hacer $\dfrac{1}{x^2}$? Digamos que, dado cualquier número $M > 0$ grande, debemos ser capaces de lograr que $\dfrac{1}{x^2} > M$ para $x$ suficientemente próximos a 0. Medimos la proximidad aquí igual que antes. Si piensa que ha llegado el momento de plasmar todo esto en una definición, está en lo cierto.

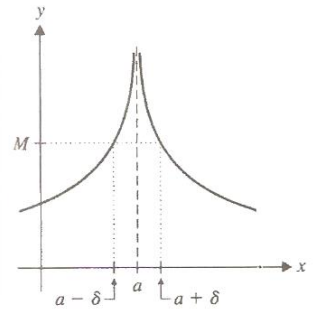



**Figura 1.48a**

$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$.

**Definición 5.2**

Sea $f$ una función definida en un intervalo abierto que contiene al número $a$ (pero no necesariamente en el propio $a$). Decimos que

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty,$$

si dado cualquier $M > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta$ implica que $f(x) > M$ (figura 1.48a).

Análogamente, escribimos $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$, si $f$ decrece sin tope cuando $x \to a$. Piense cómo formular esto en términos precisos y compare con la definición siguiente.

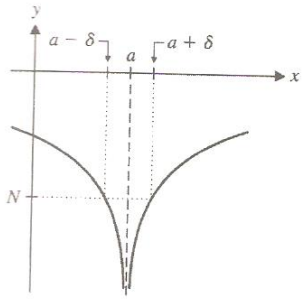



**Figura 1.48b**

$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$.

**Definición 5.3**

Sea $f$ una función definida en un intervalo abierto que contiene al número $a$ (pero no necesariamente en el propio $a$). Decimos que

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty,$$

si dado cualquier $N < 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta$ implica que $f(x) < N$ (figura 1.48b).

Es fácil recordar estas definiciones si se piensa en su significado. Se aplican de forma muy parecida a como se hacía con la definición 5.1.

**Ejemplo 5.6** **Aplicando la definición rigurosa a un límite infinito**

Demostrar que $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$.

**Solución** Dado un número (grande) $M > 0$, necesitamos saber si existe alguna distancia $\delta > 0$ tal que para todo $x$ que diste de 0 menos que $\delta$ (pero $x \neq 0$), sea

$$\frac{1}{x^2} > M. \tag{5.5}$$

Como $M$ y $x^2$ son positivos ambos, (5.5) equivale a

$$x^2 < \frac{1}{M}.$$

Tomando la raíz cuadrada de ambos miembros y recordando que $\sqrt{x^2} = |x|$, obtenemos

$$|x| < \sqrt{\frac{1}{M}}.$$

Así, pues, para cualquier $M > 0$, si tomamos $\delta = \sqrt{\frac{1}{M}}$ y volvemos atrás, vemos que $0 < |x - 0| < \delta$ garantiza que

$$\frac{1}{x^2} > M,$$

tal como deseábamos. Eso quiere decir que, por ejemplo, para $M = 100$, $\frac{1}{x^2} > 100$ siempre que $0 < |x| < \frac{1}{100} = \frac{1}{10}$. (Comprobar, como ejercicio, que es cierto).

Todavía restan dos límites por precisar. Antes de leer las definiciones que siguen, intente adivinar cómo han de ser.

En primer lugar, escribimos $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ para comunicar que cuando $x$ crece sin tope, $f(x)$ se aproxima más y más a $L$. O sea, que puede hacerse $f(x)$ tan próximo a $L$ como se quiera eligiendo $x$ suficientemente grandes. Con más precisión, se tiene la siguiente definición.

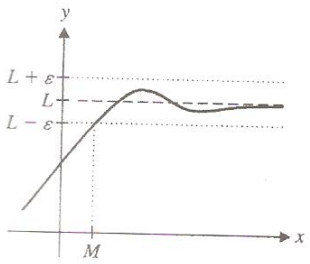



**Figura 1.49a**

$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$.

**Definición 5.4**

Sea $f$ una función definida en $(a, \infty)$, para algún $a > 0$. Diremos que

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L,$$

si dado cualquier $\varepsilon > 0$ existe algún $M > 0$ tal que $x > M$ implica que

$$|f(x) - L| < \varepsilon.$$

(Véase la figura 1.49a).

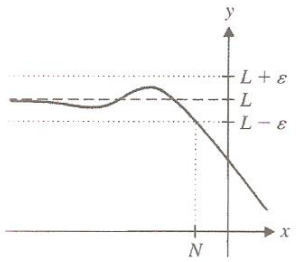



**Figura 1.49b**

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L.$

Análogamente, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$ significa que cuando $x$ decrece sin tope, $f(x)$ se aproxima más y más a $L$. En otras palabras, puede hacerse $f(x)$ tan próximo a $L$ como se desee sin más que elegir $x$ negativo y suficientemente grande en valor absoluto. Eso se plasma en la siguiente definición.

**Definición 5.5**

Sea $f$ una función definida en $(-\infty, a)$, para algún $a < 0$. Diremos que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L,$$

si dado cualquier $\varepsilon > 0$ existe algún $N < 0$ tal que $x < N$ implica que

$$|f(x) - L| < \varepsilon.$$

(Véase la figura 1.49b).

**Nota 5.2**

Las cinco definiciones son sorprendentemente parecidas, porque todas ellas se ocupan de precisar qué significa «cerca». (En cursos más avanzados de Análisis matemático reaparece este tipo de cuestiones). Es aconsejable que reflexione sobre estas definiciones hasta que su significado sea claro y las sepa traducir a su manera. No las memorice de forma automática.

Ya hemos definido cinco tipos de límites diferentes. Todas sus definiciones son fáciles de recordar si se piensa en su significado. Lo que no debe hacerse es intentar memorizar una serie de frases sin sentido. El próximo ejemplo muestra que las definiciones 5.4 y 5.5 se utilizan como las precedentes.

**Ejemplo 5.7** **Aplicación de la definición de un límite en el infinito**

Demostrar que $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0.$

**Solución** Para demostrarlo usando la definición, hay que probar que dado cualquier $\varepsilon > 0$, podemos hacer que $\frac{1}{x}$ diste de 0 menos de $\varepsilon$ eligiendo $x$ negativos y de valor absoluto suficientemente grande. Por tanto, necesitamos $x$ para los cuales

$$\left| \frac{1}{x} - 0 \right| < \varepsilon,$$

o sea,

$$\left| \frac{1}{x} \right| < \varepsilon. \tag{5.6}$$

Como $x < 0$, $|x| = -x$, de modo que (5.6) se lee

$$\frac{1}{-x} < \varepsilon.$$

Dividiendo entre $\varepsilon$ y multiplicando por $x$ (al ser $x < 0$ y $\varepsilon > 0$, la desigualdad se invierte), obtenemos

$$-\frac{1}{\varepsilon} > x.$$

Por tanto, si tomamos $N = -\frac{1}{\varepsilon}$ y volvemos atrás, vemos que se satisface la definición, así que hemos demostrado que el límite propuesto es correcto.

No recurriremos a estas definiciones para demostrar con rigor todos y cada uno de los límites que nos salgan al paso, sino sólo unos pocos. Pero las usaremos para demostrar algunos teoremas sobre límites que hemos estado utilizando sin justificación rigurosa. Una vez justificados de forma rigurosa, el uso posterior de esos teoremas proporcionará una argumentación sólida para cada límite nuevo. Como ilustración, probamos la regla para el límite de una suma.

**Teorema 5.1**

Supongamos que $a$ es un número real, $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \to a} g(x) = L_2$. Entonces,

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = L_1 + L_2.$$

**Demostración**

Por ser $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$, para cada $\varepsilon_1 > 0$ dado existe un $\delta_1 > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta_1 \text{ implica que } |f(x) - L_1| < \varepsilon_1. \tag{5.7}$$

Asimismo, al ser $\lim_{x \to a} g(x) = L_2$, para cada $\varepsilon_2 > 0$ dado existe un $\delta_2 > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta_2 \text{ implica que } |g(x) - L_2| < \varepsilon_2, \tag{5.8}$$

Para demostrar que

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = (L_1 + L_2),$$

hemos de probar que, dado cualquier número $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \text{ implica que } |[f(x) + g(x)] - (L_1 + L_2| < \varepsilon.$$

Observemos que

$$\begin{aligned} |[f(x) + g(x)] - (L_1 + L_2| &= |[f(x) - L_1] + [g(x) - L_2]| \\ &\leq |f(x) - L_1| + |g(x) - L_2, \end{aligned} \tag{5.9}$$

por la desigualdad triangular. Los dos términos de la derecha en (5.9) se pueden hacer arbitrariamente pequeños gracias a (5.7) y (5.8). En particular, si tomamos $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dfrac{\varepsilon}{2}$, siempre que

$$0 < |x - a| < \delta_1 \quad \text{y} \quad 0 < |x - a| < \delta_2,$$

de (5.7), (5.8) y (5.9) se deduce

$$\begin{aligned} |[f(x) + g(x)] - (L_1 + L_2)| &\leq |f(x) - L_1| + |g(x) - L_2| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

como se deseaba. Naturalmente, eso ocurrirá tomando

$$0 < |x - a| < \delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$$

Las otras reglas de los límites se demuestran de forma similar (véase apéndice A).

## EJERCICIOS 1.5

1. En su obra maestra de 1726, *Mathematical Principles of Natural Philosophy*, donde se hallan los fundamentos del Cálculo, Sir Isaac Newton describe el importante límite $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ (lo estudiaremos con detalle en el Capítulo 2) como «el límite al que converge siempre el cociente de cantidades que decrecen sin tope y al que se aproximan por debajo de cualquier diferencia sin ir nunca más allá de él ni alcanzarlo hasta que las cantidades se anulan».
Si en algún momento se siente abrumado por las notaciones del Cálculo, ¡piense lo que sería expresado en palabras!

(a) ¿Qué restricciones imponen las expresiones «sin ir nunca más allá» y «ni alcanzarlo»?

(b) Dar un ejemplo de un límite simple, no necesariamente de la forma $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, que viole esas restricciones.

(c) Describa, a su manera, qué es el límite, evitando restricciones como las de Newton.

(d) ¿Por qué los matemáticos consideran la definición $\varepsilon-\delta$ más simple y elegante?

2. Hemos calculado muchos límites antes de dar la definición rigurosa. Explique cómo cambia o/y mejora la definición su comprensión del proceso de límite.

3. Cada palabra de la definición $\varepsilon-\delta$ ha sido cuidadosamente elegida y colocada. Explique, mediante ejemplos, por qué las siguientes «definiciones» son incorrectas:

(a) Existe $\varepsilon>0$ tal que existe un $\delta>0$, para el cual si $0<|x-a|<\delta$, entonces $|f(x)-L|<\varepsilon$.

(b) Para todo $\varepsilon>0$ y para todo $\delta>0$, si $0<|x-a|<\delta$, entonces $|f(x)-L|<\varepsilon$.

(c) Para todo $\delta>0$ existe un $\varepsilon>0$ tal que $0<|x-a|<\delta$ y $|f(x)-L|<\varepsilon$.

4. Para que un límite exista, debe haber, para cada $\varepsilon>0$, un $\delta>0$ que satisfaga ciertas condiciones si/entonces. Para probar que no existe, debemos hallar un $\varepsilon>0$ concreto tal que las desigualdades si/entonces no se cumplan para ningún $\delta>0$. Para entender mejor la diferencia, establezca una analogía con la siguiente situación. Supongamos cierta la afirmación «Toda persona ama a alguien». Si quisiera probar su veracidad, ¿por qué tendría que preguntar a todos los habitantes de la Tierra? Por el contrario, si fuese falsa, ¿qué tendría que hacer para probar su falsedad?

**En los ejercicios 5-12, determinar, gráfica y numéricamente, un $\delta$ adecuado al $\varepsilon$ dado. Representar la función en la ventana $\varepsilon-\delta$ con rango $(a-\delta, a+\delta)$ para $x$ y rango $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ para $y$ con el fin de probar que su elección es buena.**

5. $\lim_{x\to 0}(x^2+1)=1,\ \varepsilon=0{,}1$

6. $\lim_{x\to 0}(x^2+1)=1,\ \varepsilon=0{,}05$

7. $\lim_{x\to 0}\cos x=1,\ \varepsilon=0{,}1$

8. $\lim_{x\to 0}\cos x=1,\ \varepsilon=0{,}05$

9. $\lim_{x\to 1}\sqrt{x+3}=2,\ \varepsilon=0{,}1$

10. $\lim_{x\to 1}\sqrt{x+3}=2,\ \varepsilon=0{,}05$

11. $\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x^2}=3,\ \varepsilon=0{,}1$

12. $\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x^2}=3,\ \varepsilon=0{,}05$

**En los ejercicios 13-24, hallar analíticamente $\delta$ en términos de $\varepsilon$.**

13. $\lim_{x\to 0}3x=0$

14. $\lim_{x\to 1}3x=3$

15. $\lim_{x\to 2}(3x+2)=8$

16. $\lim_{x\to 1}(3x+2)=5$

17. $\lim_{x\to 1}(3-4x)=-1$

18. $\lim_{x\to -1}(3-4x)=7$

19. $\lim_{x\to -1}(1+x/2)=1/2$

20. $\lim_{x\to 1}(1+x/2)=3/2$

21. $\lim_{x\to 1}(x^2-1)=0$

22. $\lim_{x\to 1}(x^2-x+1)=1$

23. $\lim_{x\to 2}(x^2-1)=3$

24. $\lim_{x\to 0}(x^3+1)=1$

25. Dar una fórmula para $\delta$ en términos de $\varepsilon$ para $\lim_{x\to a}(mx+b)$. (Ayuda: usar los ejercicios 13-20). ¿Depende la fórmula del valor de $a$? Explique esta respuesta gráficamente.

26. Según los ejercicios 21 y 23, ¿depende el valor de $\delta$ del valor de $a$ para $\lim_{x\to a}(x^2+b)$?

27. Modificar la definición $\varepsilon-\delta$ para definir los límites laterales $\lim_{x\to a^-}f(x)$ y $\lim_{x\to a^+}f(x)$.

28. (a) Hallar el mayor $\delta$ correspondiente a $\varepsilon=0{,}1$ en la definición de $\lim_{x\to 1^-}1/x=1$.

(b) Ídem en la de $\lim_{x\to 1^+}1/x=1$.

(c) ¿Qué $\delta$ puede usarse en la definición de $\lim_{x\to 1}1/x=1$? Explicar la respuesta y probar que $\lim_{x\to 1}1/x=1$.

**En los ejercicios 29-34, hallar un $\delta$ correspondiente a $M=100$ o a $N=-100$ (lo que proceda) para cada límite.**

29. $\lim_{x\to 1^+}\frac{2}{x-1}=\infty$

30. $\lim_{x\to 1^-}\frac{2}{x-1}=-\infty$

31. $\lim_{x\to 0^+}\cot x=\infty$

32. $\lim_{x\to \pi^-}\cot x=-\infty$

33. $\lim_{x\to 2^-}\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}=\infty$

34. $\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$

**En los ejercicios 35-40, hallar un $M$ o $N$ correspondiente a $\varepsilon=0{,}1$ para cada límite en el infinito.**

35. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2}{x^2+x+1}=1$

36. $\lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{x^2+x+1}=0$

37. $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+3}{4x^2-4}=0{,}25$

38. $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-2}{x^2+1}=3$

39. $\lim_{x\to\infty}e^{-2x}=0$

40. $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+x}{e^x-x^2}=1$

**En los ejercicios 41-48, probar que el límite es correcto usando la definición apropiada ($k$ denota un entero).**

41. $\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x^3}=0$

42. $\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{x^3}=0$

43. $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^k}=0$, para $k>0$

44. $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^k}=0$, para $k>0$

45. $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x^2+2}-3\right)=-3$

46. $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{(x-7)^2}=0$

47. $\lim_{x\to-3}\frac{-2}{(x+3)^4}=-\infty$

48. $\lim_{x\to 7}\frac{3}{(x-7)^2}=\infty$

49. $\lim_{x\to 5}\frac{4}{(x-5)^2}=\infty$

50. $\lim_{x\to-4}\frac{-6}{(x+4)^6}=-\infty$

**En los ejercicios 51-54, encontrar un valor $\varepsilon > 0$ para el cual ningún $\delta > 0$ satisfaga la definición de límite.**

51. $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 1 \\ x^2 + 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$, $\lim_{x \to 1} f(x) \neq 2$

52. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 0 \\ -x - 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$, $\lim_{x \to 0} f(x) \neq -2$

53. $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 1 \\ 5 - x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$, $\lim_{x \to 1} f(x) \neq 2$

54. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 0 \\ x - 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$, $\lim_{x \to 0} f(x) \neq -2$

55. Una arandela metálica de radio exterior $r$ pulgadas pesa $2r^2$ onzas. Una empresa fabrica arandelas de 2 pulgadas para varios clientes que imponen diferentes márgenes de error. Si el cliente exige arandelas de $8 \pm \varepsilon$ onzas, ¿cuál es la tolerancia de error en el radio? Es decir, hallar un $\delta > 0$ tal que un radio $r$ en el intervalo $(2 - \delta, 2 + \delta)$ garantice un peso en $(8 - \varepsilon, 8 + \varepsilon)$.

56. Una fábrica comercializa bolas de vidrio. Si el volumen de cada bola debe ser $\pi/6$ con un error máximo admisible $\varepsilon$, ¿cuál es la cota de error admisible para el radio respecto del valor 1/2?

## 1.6 LÍMITES Y PÉRDIDA DE CIFRAS SIGNIFICATIVAS

«No prestes atención al hombre de detrás de la cortina . . .» (de *El mago de Oz*)

Las cosas no siempre son lo que parecen. De hecho, buena parte de nuestra vida está dedicada a distinguir lo real de lo aparente. Cometemos muchos errores de apreciación y nos va invadiendo un cierto escepticismo. Quizá ya habrá advertido que las Matemáticas son terreno abonado para el escepticismo. Es necesario; no se puede aceptar algo por su simple apariencia.

Un peligro de las calculadoras, citado con frecuencia, es que provocan una adicción excesiva. Hay algo de verdad en eso, ya que tendemos a aceptar la respuesta de una calculadora como algo no sujeto a debate. En esta sección examinaremos las limitaciones de las calculadoras al evaluar funciones.

Cuando evaluamos una función en la calculadora, debemos ser conscientes de que la calculadora realiza las operaciones aproximadamente. Eso no causa problemas la mayor parte de las veces, ya que las calculadoras actuales trabajan con un alto grado de fiabilidad. Sin embargo, ocasionalmente los efectos del redondeo en cadenas largas de cálculos son fatales. A continuación analizaremos estos errores y aprenderemos cómo detectarlos y evitar algunos de ellos.

### Ejemplo 6.1 Un límite con comportamiento gráfico y numérico inusual

Evaluar $\lim_{x \to \infty} \dfrac{(x^3 + 4)^2 - x^6}{x^3}$.

**Solución** El numerador es de la forma indeterminada $\infty - \infty$ y el denominador tiende a $\infty$. Antes de hacer operaciones en el numerador, dibujamos una gráfica y evaluamos la función en algunos puntos. (Hemos hecho los cálculos con una TI-86 y las gráficas con Maple. Otros PCS producen errores diferentes). En la figura 1.50a la función parece casi constante hasta que comienza a oscilar en $x = 40.000$ aproximadamente. Nótese que la tabla de valores es incompatible con esa figura.

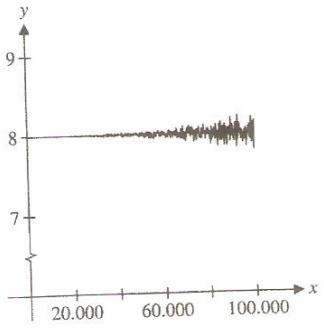



**Figura 1.50a**

$y = \dfrac{(x^3 + 4)^2 - x^6}{x^3}$.

| $x$ | $\dfrac{(x^3 + 4)^2 - x^6}{x^3}$ |
|---|---|
| 10 | 8,016 |
| 100 | 8,000016 |
| $1 \times 10^3$ | 8,0 |
| $1 \times 10^4$ | 8,0 |
| $1 \times 10^5$ | 0,0 |
| $1 \times 10^6$ | 0,0 |

| $x$ | $\dfrac{(x^3 + 4)^2 - x^6}{x^3}$ |
|---|---|
| $2 \times 10^4$ | 8,0 |
| $3 \times 10^4$ | 8,14815 |
| $4 \times 10^4$ | 7,8125 |
| $5 \times 10^4$ | 0 |

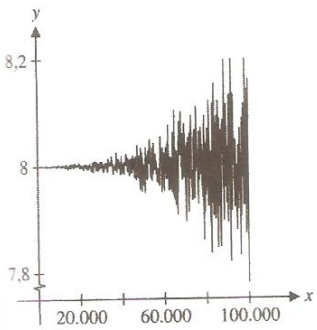



**Figura 1.50b**

$$y = \frac{(x^3 + 4)^2 - x^6}{x^3}.$$

Los dos últimos valores de la tabla son sorprendentes. Los anteriores se acercaban suavemente hacia 8.0. Entonces, ¿qué ocurre? y ¿cuál es el valor correcto del límite? Obviamente, algo inusual sucede entre $x = 1 \times 10^4$ y $x = 1 \times 10^5$. Buscando más detalle en esa zona, elaboramos la tabla de la derecha.

En la figura 1.50b se ha realzado la escala vertical para visualizar mejor las oscilaciones entre $x = 1 \times 10^4$ y $x = 1 \times 10^5$. El resultado es una gráfica aún más confusa. Cuanto más en detalle miramos este límite, más errática parece la función. Decimos **parece** porque todo ese comportamiento oscilatorio que estamos viendo es una pura ilusión óptica creada por la precisión finita de la calculadora.

## Representación de números en las calculadoras

El extraño comportamiento en el ejemplo 6.1 se debe a cómo representan las calculadoras los números reales. Sin entrar en los detalles de la aritmética de las calculadoras, basta saber que los almacenan en notación científica. Así, 1.234.567 se almacena como $1{,}234567 \times 10^6$. El número que precede a la potencia de 10 se llama **mantisa**, de modo que la mantisa es 1,234567 y el **exponente** es 6. Todas las calculadoras tienen memoria finita y, por tanto, los tamaños admisibles de mantisa y exponente son limitados. (Es lo que se conoce como **precisión finita**). Las TI-86 manejan una mantisa de 14 dígitos y un exponente de 3 dígitos, de modo que sólo retiene los 14 primeros dígitos de la escritura decimal de un número.

### Ejemplo 6.2 Representación de un número racional en una calculadora

Determinar cómo se almacena internamente

(a) $\frac{1}{3}$ en una calculadora de 10 dígitos, y

(b) $\frac{2}{3}$ en una de 14 dígitos.

**Solución** (a) En una calculadora de 10 dígitos, $\frac{1}{3}$ se almacena como $\underbrace{3{,}333333333}_{\text{10 dígitos}} \times 10^{-1}$.

(b) En una de 14 dígitos (como la TI-86), $\frac{2}{3}$ se guarda como $\underbrace{6{,}6666666666667}_{\text{14 dígitos}} \times 10^{-1}$.

A muchos efectos, la precisión finita no supone ningún problema. Pero en ocasiones es fuente de errores desastrosos. En el ejemplo que sigue, restamos dos números casi iguales y examinamos el error catastrófico resultante.

### Ejemplo 6.3 Diferencia de dos números muy próximos

Comparar el valor exacto de

$$\underbrace{1{,}00000000000004}_{\text{13 ceros}} \times 10^{18} - \underbrace{1{,}00000000000001}_{\text{13 ceros}} \times 10^{18}$$

con el resultado obtenido en una calculadora con mantisa de 14 (o menos) dígitos.

**Solución** El valor exacto es

$$\underbrace{1{,}00000000000004}_{\text{13 ceros}} \times 10^{18} - \underbrace{1{,}00000000000001}_{\text{13 ceros}} \times 10^{18} = \underbrace{0{,}00000000000003}_{\text{13 ceros}} \times 10^{18}$$

$$= 30.000. \qquad (6.1)$$

Sin embargo, si se realiza ese cálculo en una calculadora con mantisa de 14 dígitos (o menos), los dos números de la izquierda son almacenados como $1 \times 10^{18}$ y, en consecuencia, la calculadora dará 0 como valor de la diferencia. Ensaye con su calculadora.

**Ejemplo 6.4** **Otra diferencia de números muy próximos**

Comparar el valor exacto de

$$\underbrace{1,00000000000006}_{13\text{ ceros}} \times 10^{20} - \underbrace{1,00000000000004}_{13\text{ ceros}} \times 10^{20}$$

con el resultado obtenido en una calculadora con mantisa de 14 dígitos.

**Solución** El valor exacto es

$$\underbrace{1,00000000000006}_{13\text{ ceros}} \times 10^{20} - \underbrace{1,00000000000004}_{13\text{ ceros}} \times 10^{20} = \underbrace{0,00000000000002}_{13\text{ ceros}} \times 10^{20}$$

$$= 2.000.000.$$

Sin embargo, si se realiza ese cálculo en una calculadora con mantisa de 14 dígitos (o menos), el primer número se almacena como $1,00000000000001 \times 10^{20}$ y el segundo como $1,0 \times 10^{20}$ debido a la precisión finita y al redondeo. La diferencia entre esos dos valores se calcularía como $0,00000000000001 \times 10^{20}$, o sea, 10.000.000. De nuevo, un grave error.

En los ejemplos 6.3 y 6.4 hemos sido testigos de un error serio provocado por la resta de dos números muy próximos entre sí. Este tipo de error sutil, desastroso a veces, se llama error por **pérdida de cifras significativas**. Volviendo al ejemplo 6.1, veremos que uno de estos errores era la causa de tan extraño comportamiento.

**Ejemplo 6.5** **Error por pérdida de cifras significativas**

En el ejemplo 6.1 se consideró la función $f(x) = \dfrac{(x^3 + 4)^2 - x^6}{x^3}$.

Siga paso a paso el cálculo de $f(5 \times 10^4)$ tal como lo efectuaría una calculadora de 14 dígitos.

**Solución**

$$f(5 \times 10^4) = \frac{[(5 \times 10^4)^3 + 4]^2 - (5 \times 10^4)^6}{(5 \times 10^4)^3}$$

$$= \frac{(1,25 \times 10^{14} + 4)^2 - 1,5625 \times 10^{28}}{1,25 \times 10^{14}}$$

$$= \frac{(125.000.000.000.000 + 4)^2 - 1,5625 \times 10^{28}}{1,25 \times 10^{14}}$$

$$= \frac{(1,25 \times 10^{14})^2 - 1,5625 \times 10^{28}}{1,25 \times 10^{14}} = 0,$$

ya que 125.000.000.000.004 se redondea a 125.000.000.000.000.

El culpable no es aquí el redondeo de 125.000.000.000.004, sino el hecho de que a continuación se ha efectuado la diferencia de dos números casi iguales. Conste además que no es sólo en el cálculo de límites donde se produce esta clase de errores; es frecuente en el cálculo numérico.

**Nota 6.1**

Siempre que sea posible, debe evitarse restar dos números casi idénticos. A veces se consigue evitarlo con unas cuantas manipulaciones algebraicas.

En el caso de la función del ejemplo 6.5 podemos evitar la resta, y con ella el error por pérdida de cifras significativas, reescribiendo $f(x)$ como

$$f(x) = \frac{(x^3 + 4)^2 - x^6}{x^3}$$

$$= \frac{(x^6 + 8x^3 + 16) - x^6}{x^3}$$

$$= \frac{8x^3 + 16}{x^3}.$$

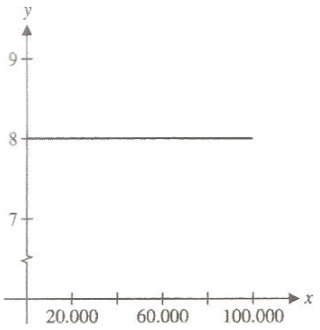



**Figura 1.51**

$$y = \frac{8x^3 + 16}{x^3}.$$

| $x$ | $\dfrac{8x^3 + 16}{x^3}$ |
|---|---|
| 10 | 8,016 |
| 100 | 8,000016 |
| $1 \times 10^3$ | 8,000000016 |
| $1 \times 10^4$ | 8,00000000002 |
| $1 \times 10^5$ | 8,0 |
| $1 \times 10^6$ | 8,0 |
| $1 \times 10^7$ | 8,0 |

Con esta nueva expresión, ya sin la resta, se puede elaborar una tabla de valores fiable. Es más, si volvemos a dibujar la gráfica de la figura 1.50a usando esta nueva expresión (véase figura 1.51), ya no se ve la oscilación de las figuras 1.50a y 1.50b.

Así, pues, evitando la resta hemos dado con una expresión que permite hallar valores precisos de la función en un rango de valores mucho más extenso (véase la tabla adjunta). La nueva gráfica y la nueva tabla sugieren que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(x^3 + 4)^2 - x^6}{x^3} = 8.$$

Dejamos como ejercicio demostrar que este valor es correcto.

En el próximo ejemplo examinamos una pérdida de cifras significativas que ocurre para $x$ cercanos a 0.

## Ejemplo 6.6 Pérdida de cifras significativas en una función trigonométrica

Calcular $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x^2}{x^4}$.

**Solución** Como de costumbre, miramos una gráfica (figura 1.52) y una tabla de valores.

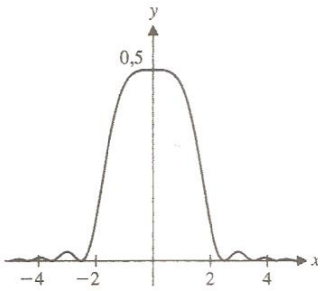



**Figura 1.52**

$$y = \frac{1 - \cos x^2}{x^4}.$$

| $x$ | $\dfrac{1 - \cos x^2}{x^4}$ |
|---|---|
| 0,1 | 0,499996 |
| 0,01 | 0,5 |
| 0,001 | 0,5 |
| 0,0001 | 0,0 |
| 0,00001 | 0,0 |

| $x$ | $\dfrac{1 - \cos x^2}{x^4}$ |
|---|---|
| −0,1 | 0,499996 |
| −0,01 | 0,5 |
| −0,001 | 0,5 |
| −0,0001 | 0,0 |
| −0,00001 | 0,0 |

Igual que en el ejemplo 6.1, los valores de la función parecen aproximarse a 0,5, pero entonces saltan bruscamente a 0,0. Una vez más, estamos sufriendo las consecuencias de un error por pérdida de cifras significativas. Ahora se debe a la resta de dos números casi iguales, $\cos x^2$ y 1. Podemos evitar el error eliminando la resta.

$$\frac{1 - \cos x^2}{x^4} = \frac{1 - \cos x^2}{x^4} \cdot \frac{1 + \cos x^2}{1 + \cos x^2}$$ Multiplicamos numerador y denominador por $(1 + \cos x^2)$

$$= \frac{1 - \cos^2(x^2)}{x^4(1 + \cos x^2)}$$ $1 - \cos^2(x^2) = \operatorname{sen}^2(x^2)$.

$$= \frac{\operatorname{sen}^2(x^2)}{x^4(1 + \cos x^2)}.$$

| $x$ | $\dfrac{\operatorname{sen}^2(x^2)}{x^4(1 + \cos x^2)}$ |
|---|---|
| ±0,1 | 0,499996 |
| ±0,01 | 0,4999999996 |
| ±0,001 | 0,5 |
| ±0,0001 | 0,5 |
| ±0,00001 | 0,5 |

La última expresión, sin resta, ya se puede utilizar para obtener valores fiables (véase la tabla adjunta) sin temor a pérdida de cifras significativas.

A la vista de la gráfica y de la nueva tabla, conjeturamos que

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^4} = \frac{1}{2}.$$

---

Terminamos con otro ejemplo de error por pérdida de cifras significativas, pero en el que no hay resta explícita.

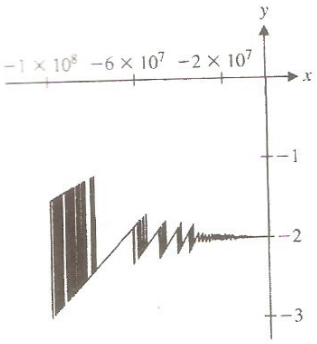



**Figura 1.53**
$y = x[(x^2 + 4)^{1/2} + x]$.

| $x$ | $x[(x^2 + 4)^{1/2} + x]$ |
|---|---|
| −10 | −1,9804 |
| −100 | −1,9998 |
| $-1 \times 10^3$ | −1,999998 |
| $-1 \times 10^4$ | −2,0 |
| $-1 \times 10^5$ | −2,0 |
| $-1 \times 10^6$ | −2,0 |
| $-1 \times 10^7$ | 0,0 |
| $-1 \times 10^8$ | 0,0 |

## Ejemplo 6.7 Error por pérdida de cifras significativas en una suma

Calcular $\lim_{x \to -\infty} x[(x^2 + 4)^{1/2} + x]$.

**Solución** En principio cabe pensar que, puesto que no hay ninguna resta (explícita), no habrá pérdida de cifras significativas. Antes de nada, dibujamos una gráfica (figura 1.53) y elaboramos una tabla de valores.

Se aprecia un salto brusco en los valores y una oscilación fuerte en la gráfica. Y es que, si bien no explícita, hay una resta debida a que $x < 0$ y $(x^2 + 4)^{1/2} > 0$. De nuevo podemos evitarla mediante manipulaciones algebraicas.

$$x[(x^2 + 4)^{1/2} + x] = x[(x^2 + 4)^{1/2} + x] \frac{[(x^2 + 4)^{1/2} - x]}{[(x^2 + 4)^{1/2} - x]}$$ Multiplicamos numerador y denominador por el conjugado

$$= x \frac{[(x^2 + 4) - x^2]}{[(x^2 + 4)^{1/2} - x]}$$ Simplificamos el numerador

$$= \frac{4x}{[(x^2 + 4)^{1/2} - x]}.$$

Con esta última expresión generamos la tabla de valores adjunta y la gráfica de la figura 1.54, con aspecto de recta horizontal, sin rastro de las oscilaciones que, en la misma ventana, presentaba la figura 1.53.

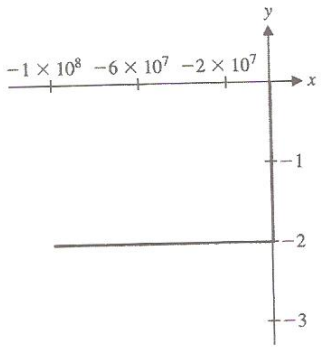



**Figura 1.54**
$y = \dfrac{4x}{[(x^2 + 4)^{1/2} - x]}$.

| $x$ | $\dfrac{4x}{[(x^2 + 4)^{1/2} + x]}$ |
|---|---|
| −10 | −1,9804 |
| −100 | −1,9998 |
| $-1 \times 10^3$ | −1,999998 |
| $-1 \times 10^4$ | −1,99999998 |
| $-1 \times 10^5$ | −1,9999999998 |
| $-1 \times 10^6$ | −2,0 |
| $-1 \times 10^7$ | −2,0 |
| $-1 \times 10^8$ | −2,0 |

Además, los valores de la tabla ya no muestran ese salto brusco que presagia un error por pérdida de cifras significativas. Ahora podemos conjeturar que

$$\lim_{x \to -\infty} x[(x^2 + 4)^{1/2} + x] = -2.$$

En los ejemplos precedentes aparecía un error por pérdida de cifras significativas y hemos indicado cómo evitarlo. Pero no se dispone de un método sistemático para detectar y evitar tales errores. En su defecto, confiamos al menos en que, una vez vistos algunos ejemplos, el lector hará un uso más inteligente y precavido de las calculadoras.

# EJERCICIOS 1.6

1. Los límites del tipo $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ jugarán un papel clave en el Capítulo 2. Dados una función $f$ y un $a$ concreto, podríamos elaborar una tabla de valores para $h$ más y más pequeños. ¿Por qué tendríamos que tener cuidado con posibles errores por pérdida de cifras significativas?

2. En el ejemplo 6.7 hemos racionalizado el numerador. La clásica regla de racionalizar el denominador es otro ejemplo de reescritura de una expresión en un intento de minimizar errores computacionales. Cuando no se disponía de calculadoras, las raíces cuadradas eran difíciles de evaluar. Para comprender por qué es deseable tener la raíz cuadrada en el numerador, supongamos que tenemos sólo un decimal de precisión, así que $\sqrt{3} \approx 1{,}7$. Comparar $\frac{6}{1{,}7}$ con $\frac{6}{\sqrt{3}}$ y, a continuación, comparar $2(1{,}7)$ con $\frac{6}{\sqrt{3}}$. ¿Cuál de las aproximaciones podría hacer mentalmente?

**En los ejercicios 3-10, (a) usar gráficas y tablas de valores para conjeturar el valor del límite, (b) generar una gráfica en calculadora que muestre un error por pérdida de cifras significativas, (c) reescribir la función con el fin de evitar dicho error.**

3. $\lim_{x \to \infty} x(\sqrt{4x^2+1}-2x)$

4. $\lim_{x \to -\infty} x(\sqrt{4x^2+1}+2x)$

5. $\lim_{x \to \infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+4}-\sqrt{x+2})$

6. $\lim_{x \to \infty} x^2(\sqrt{x^4+8}-x^2)$

7. $\lim_{x \to \infty} x(\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2+2})$

8. $\lim_{x \to \infty} x(\sqrt{x^3+8}-x^{3/2})$

9. $\lim_{x \to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{12x^2}$

10. $\lim_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x^3}{x^6}$

**En los ejercicios 11 y 12, comparar los límites para poner de manifiesto que pequeños errores pueden causar efectos desastrosos.**

11. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2+x-2}{x-1}$ y $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2+x-2{,}01}{x-1}$

12. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x-2}{x^2-4}$ y $\lim_{x \to 2} \dfrac{x-2}{x^2-4{,}01}$

13. Comparar $f(x) = \operatorname{sen} \pi x$ y $g(x) = \operatorname{sen} 3{,}14x$ para $x = 1$ (en radianes), $x = 10$, $x = 100$ y $x = 1.000$.

14. Seguir la pista al ejercicio 3 con $x = 10^5$, tal como efectuaría las operaciones una calculadora con mantisa de 10 dígitos. Identificar cuándo ocurre el error por pérdida de cifras significativas.

**En los ejercios 15 y 16, comparar la respuesta exacta con la obtenida en una calculadora con mantisa de 6 dígitos.**

15. $(1{,}000003 - 1{,}000001) \times 10^7$

16. $(1{,}000006 - 1{,}000001) \times 10^7$

17. En este ejercicio analizamos un aspecto de la teoría matemática del caos. Iterar $f(x) = x^2 - 2$ partiendo de $x_0 = 0{,}5$, es decir, calcular $x_1 = f(0{,}5)$, $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2)$, etc. Aunque la secuencia de números permanece acotada, nunca se repiten (salvo por accidente de redondeo). Una propiedad impactante de las funciones caóticas es el **efecto mariposa** (*dependencia sensible de las condiciones iniciales*), aplicable a la predicción meteorológica. Establece que el batir de alas de una mariposa en Brasil puede provocar o dispersar un tornado en Texas pocos días después. Por eso las predicciones a largo plazo son imposibles.
   (a) Para ilustrar el efecto mariposa, iterar $f(x)$ partiendo de 0,5 y de 0,51. ¿Cuántas iteraciones son necesarias para que los resultados difieran en más de 0,1? Intente de nuevo con 0,5 y 0,501.
   (b) Repetir lo mismo con la función $g(x) = x^2 - 1$. Aunque las funciones son casi idénticas, $g(x)$ no es caótica y se comporta de manera muy distinta.

   Esto aporta una idea novedosa a la Medicina, las enfermedades dinámicas: un pequeño cambio en una de las constantes de una función (por ejemplo, el ritmo de una señal eléctrica en el corazón) puede producir un cambio drástico en el sistema (por ejemplo, el bombeo de sangre en los ventrículos).

18. Las calculadoras no sólo dan errores numéricos, también gráficos. Después de todo, calculan valores de la función para representarla. Represente en su calculadora $y = \operatorname{sen} x^2$ (una gráfica de trazo discontinuo es preferible). Verá las oscilaciones típicas del seno, pero la amplitud crece con $x$. Desplace la ventana de la pantalla hacia la derecha varias veces. En algún momento, la gráfica será confusa, ilegible. Dependiendo de la calculadora empleada se pueden ver ciertas pautas. ¿Son reales o ficticias? Para explicar qué está pasando, recordemos que la gráfica es un conjunto de píxeles asociado cada uno a un par $x$, $y$. Supongamos que la calculadora está marcando puntos en $x = 0$, $x = 0{,}1$, $x = 0{,}2$, etc. Los valores de $y$ serían $\operatorname{sen} 0^2$, $\operatorname{sen} 0{,}1^2$, $\operatorname{sen} 0{,}2^2$. Investigar qué ocurrirá entre $x = 15$ y $x = 16$. Evaluar $(15, \operatorname{sen} 15^2)$, $(15{,}1, \operatorname{sen} 15{,}1^2)$. Si tuviera que marcar esos puntos, ¿qué pauta se vería? Para explicar esa pauta, argumentar que hay aproximadamente medio período de la curva seno ausente entre cada punto marcado. Analizar asimismo qué sucede entre $x = 31$ y $x = 32$.

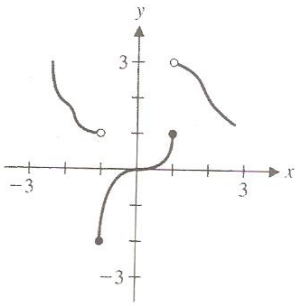
# EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO

**En los ejercicios 1-4, usar evidencias gráfica y numérica para conjeturar el valor del límite.**

1. $\lim_{x \to -2} \dfrac{x+2}{|x+2|}$
2. $\lim_{x \to 0} (1+2x)^{1/x}$
3. $\lim_{x \to \infty} \left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x}$
4. $\lim_{x \to \infty} x^{2/x}$

**En los ejercicios 5 y 6, identificar los límites de la gráfica de $f(x)$.**

5. (a) $\lim_{x \to -1^-} f(x)$ (b) $\lim_{x \to -1^+} f(x)$
   (c) $\lim_{x \to -1} f(x)$ (d) $\lim_{x \to 0} f(x)$
6. (a) $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ (b) $\lim_{x \to 1^+} f(x)$
   (c) $\lim_{x \to 1} f(x)$ (d) $\lim_{x \to 2} f(x)$




7. Identificar las discontinuidades de la función de la figura anterior.
8. Esbozar una gráfica de una función tal que $f(-1) = 0$, $f(0) = 0$, $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1$ y $\lim_{x \to 1^+} f(x) = -1$.

**En los ejercicios 9-28, evaluar el límite. La respuesta puede ser un número, $\infty$, $-\infty$ o que no existe.**

9. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x-2}{x^2-4}$
10. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2-1}{x^2+x-2}$
11. $\lim_{x \to -2} \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2-4}}$
12. $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^{2x}}{x-2}$
13. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{\sec x}$
14. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x^2}{x^2}$
15. $\lim_{x \to 1} f(x)$, con $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x < 1 \\ x^2+1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$
16. $\lim_{x \to 2} f(x)$, con $f(x) = \begin{cases} 3x-1 & \text{si } x < 2 \\ x^2+1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$
17. $\lim_{x \to 1^+} \sqrt{x^2+1}$
18. $\lim_{x \to 2^+} \sqrt{x^2-4}$
19. $\lim_{x \to 1^+} \dfrac{x+1}{x^2-1}$
20. $\lim_{x \to 2^-} \dfrac{1-x}{x^2+4x+4}$
21. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x^2-4}{3x^2+x+1}$
22. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+4}}$
23. $\lim_{x \to \infty} e^{-3x}$
24. $\lim_{x \to -\infty} e^{-x^2}$
25. $\lim_{x \to \infty} \ln 2x$
26. $\lim_{x \to 0^+} \ln 3x$
27. $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{2x}{x^2+3x-5}$
28. $\lim_{x \to -2} \dfrac{2x}{x^2+3x+2}$
29. Usar el teorema del encaje y el hecho de que $0 \leq \dfrac{x^2}{x^2+1} < 0$ para probar que $\lim_{x \to 0} \dfrac{2x^3}{x^2+1} = 0$.
30. Usar el teorema del valor intermedio para verificar que $f(x) = x^3 - x - 1$ tiene un cero en el intervalo [1, 2]. Hallar, por el método de bisección, un intervalo de longitud 1/32 que contenga al cero.

**En los ejercicios 31-34, hallar las discontinuidades y analizar cuáles son evitables.**

31. $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+2x-3}$
32. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-4}$
33. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 4x-3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$
34. $f(x) = x \cot x$

**En los ejercicios 35-38, determinar los intervalos de continuidad.**

35. $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-x-6}$
36. $f(x) = \ln(3x-4)$
37. $f(x) = \operatorname{sen}(1+e^x)$
38. $f(x) = \sqrt{x^2-4}$

**En los ejercicios 39-42, localizar todas las asíntotas, verticales, horizontales y oblicuas.**

39. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-3x+2}$
40. $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-2x-8}$
41. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1}$
42. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-x-2}$
43. Determinar, gráfica y numéricamente, un $\delta$ correspondiente a $\varepsilon = 0{,}1$ para $\lim_{x \to \pi/2} \operatorname{sen} x = 1$.
44. Determinar, gráfica y numéricamente, un $\delta$ correspondiente a $\varepsilon = 0{,}01$ para $\lim_{x \to \pi/2} \operatorname{sen} x = 1$.
45. Hallar analíticamente $\delta$ en términos de $\varepsilon$ para $\lim_{x \to 0} (2x+1) = 1$.
46. Hallar analíticamente $\delta$ en términos de $\varepsilon$ para $\lim_{x \to 1} (x^2+1) = 2$.
47. Hallar un $M$ correspondiente a $\varepsilon = 0{,}1$ para $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x^2}{x^2+1} = 1$.

48. Hallar un $M$ correspondiente a $\varepsilon = 0{,}1$ para $\lim_{x \to \infty} \frac{2}{x^2} = 0$.

**En los ejercicios 49 y 50, (a) conjeturar, por evidencias gráfica y numérica, el valor del límite. (b) Poner de manifiesto el error por pérdida de cifras significativas en una gráfica generada en una calculadora. (c) Reescribir la función de manera que se evite dicho error.**

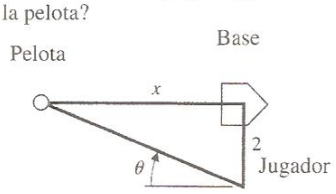
49. $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{2x^2}$

50. $\lim_{x \to \infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x$

51. En la figura, $\theta$ es el ángulo de la mirada del jugador siguiendo la pelota. Sea $x'$ la velocidad de la pelota y $\theta'$ el ritmo de cambio del ángulo. Para un lanzamiento a 90 mph, $x' = -132$ pies/s y $\theta' = \frac{264}{4 + x^2}$ rad/seg.

A la vista de esta fórmula, explicar por qué $\theta'$ crece cuando $x$ decrece. Explicar eso mismo por argumentos físicos.

Finalmente, calcular $\lim_{x \to 0} \theta'$, el máximo ritmo de cambio angular de la mirada. No es un límite infinito, pero dado que no se puede mantener el enfoque a más de $\pi/2$ rad/seg, ¿cómo es de grande el máximo de $\theta'$? El jugador ¿puede mantener la mirada puesta en la pelota?



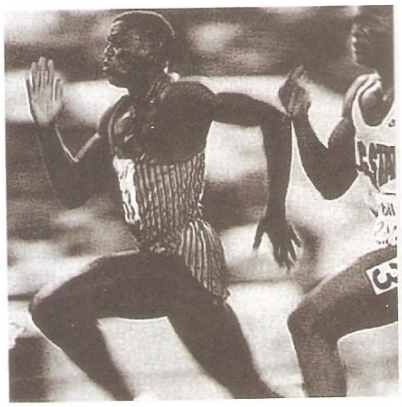

52. El límite de una función, si existe, es un número. El concepto de límite se puede extender a comportamientos límite más complicados que un único número, como se hace en la teoría del **caos** (**dinámica no lineal**, más exactamente), explorada varias veces en nuestro camino a través del Cálculo. Veamos diferentes ejemplos de comportamiento límite. Iteramos la función $f_2(x) = x(2 - x)$ partiendo de $x_0 = 0{,}5$. Esto es, calculamos $x_1 = f_2(x_0)$, $x_2 = f_2(x_1)$, etc. Comprobar con calculadora que $x_1 = 0.5(2 - 0{,}5) = 0{,}75$, $x_2 = 0{,}9375$, $x_3 = 0{,}99609375$, $x_4 = 0{,}9999847412$, etc. Parece concluirse que el límite es 1. Ahora iteramos $f_{3,2}(x) = x(3{,}2 - x)$, partiendo de $x_0 = 0{,}5$. Comprobar que $x_1 = 1{,}35$, $x_2 = 2{,}4975$, $x_3 = 1{,}75449375$, $x_4 = 2{,}536131681$, etc.

Continuando este proceso, se observa un tipo de límite distinto: alternancia entre dos valores, aproximadamente 1,641742431 y 2,558257569. ¿En qué se puede comparar este comportamiento a una función periódica?

Para encontrar otros comportamientos distintos, ensaye con $f_{3,48}(x) = x(3{,}48 - x)$, $f_{3,555}(x)$, $f_{3,565}(x)$ y $f_{3,569}(x)$. ¿Qué pauta sigue el tamaño de los períodos? Nótese que el parámetro (subíndice) de esta familia de funciones cambia cada vez menos para producir períodos mayores. El límite de esos parámetros también es interesante (ejercicio 54).

53. En el ejercicio 52, al ir creciendo el valor de $c$ desde 2 hasta 3,57 en la familia de funciones $f_c(x) = x(c - x)$, el comportamiento límite (llamado **atractor**) cambia de convergencia a un único punto (**1-ciclo**) a alternancia entre dos puntos (**2-ciclo**), a alternancia entre cuatro puntos (**4-ciclo**), etc., hasta llegar al caos (acotado, pero aperiódico). La transición de un tipo de comportamiento límite a otro ocurre en valores especiales de $c$ llamados **puntos de bifurcación**. Por prueba y error, hallar el primer punto de bifurcación, esto es, el número $b$ tal que $f_c(x)$ tiene un 1-ciclo atractor si $c < b$ y un 2-ciclo atractor si $c > b$.

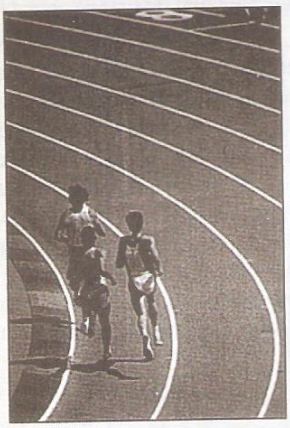
54. Vamos a analizar otra faceta de la teoría del caos. Iteramos (ejercicios 52 y 53) la función $f(x) = x(4 - x)$ a partir de $x_0 = 0{,}5$, calculando $x_1 = f_2(x_0)$, $x_2 = f_2(x_1)$, etc. Aunque la sucesión de números permanece acotada, los números nunca se repiten (salvo accidentalmente por redondeo). Este comportamiento acotado y no periódico se llama **caos matemático**. El clima es un buen ejemplo de proceso natural que se considera caótico. ¿En qué sentido es acotado el clima, pero no periódico (la temperatura en un lugar, por ejemplo)? Explicar por qué es intrínsecamente imposible conseguir predicciones meteorológicas a largo plazo.



# CAPÍTULO 2

# LA DERIVADA

¿Qué velocidad puede alcanzar el ser humano? Esta cuestión ha fascinado a lo largo de miles de años, ya que innumerables culturas han celebrado competiciones atléticas desde los tiempos más remotos. En los tiempos modernos, se ha dado en considerar «hombre más rápido del mundo» al vencedor en la final de 100 metros de los Juegos Olímpicos. No obstante, la elección de 100 metros como distancia apropiada para dicho título no es aceptada unánimemente. Por ejemplo, el ganador de los 100 metros en 1996, Donovan Bailey, y el vencedor en 200 y 400, Michael Johnson, se enfrentaron en una célebre carrera sobre una distancia de 150 metros para dilucidar quién era el hombre más rápido del mundo en 1997.



El debate acerca de la distancia apropiada abre la puerta a una pregunta de interés matemático: ¿qué entendemos exactamente por *más rápido*? Podemos imaginar un velocímetro portado por cada velocista y el que presente el registro más alto sería declarado más rápido. Cabría argumentar que es muy importante la capacidad de mantener una velocidad alta durante un cierto lapso de tiempo, pero vamos a centrarnos en la **velocidad instantánea** que marca el velocímetro.

Sin velocímetro, ¿cómo podemos determinar un pico en la velocidad del atleta? Por el momento, sólo disponemos de la fórmula elemental

$$\text{distancia} = \text{velocidad} \times \text{tiempo}.$$

O bien, despejando la velocidad,

$$\text{velocidad} = \frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}}.$$

Sin embargo, lo que realmente da esta fórmula es la **velocidad media** sobre el lapso de tiempo (y de distancia) elegido. Si el atleta corre los 100 metros en 10 segundos, su velocidad media es $\frac{100\text{ m}}{10\text{ s}} = 10$ m/s. Pero ¿es ésa su máxima velocidad? Parece claro que no. En los primeros metros, el atleta se esfuerza por conseguir una velocidad muy alta, y en los últimos metros, el cansancio puede hacer bajar su velocidad. En buena parte del recorrido, el velocista no alcanza el pico de velocidad.

Si calculamos su velocidad media en intervalos de tiempo más cortos, tendremos una idea más precisa de su velocidad pico. Por ejemplo, si recorre 10 metros en 0,91 segundos, su velocidad media es $\frac{10\text{ m}}{0{,}91\text{ s}} \approx 11$ m/s. Las objeciones expuestas pierden parte de su peso sobre una distancia de 10 metros, más aún si se mide el tramo de 10 metros en la mitad de la carrera. Sin embargo, es bien posible que el velocista cambie de ritmo en cuatro o cinco zancadas, así que sería mejor una distancia menor. Usando intervalos más cortos, se ha estimado que

Carl Lewis alcanzó un pico de 12,5 m/s (45 km/h) en la carrera en la que conquistó la medalla de oro en los Juegos Olímpicos de Barcelona de 1992.

Cuanto menor sea el intervalo utilizado, más precisa será la estimación. En la sección 2.1 definimos la velocidad como el límite de las velocidades medias cuando el intervalo de tiempo tiende a cero. Más tarde veremos que el mismo límite aparece en un amplio espectro de situaciones, tantas que se le ha dado un nombre específico: **derivada**. Las secciones 2.3 a 2.8 introducen un gran número de reglas de derivación que permiten hallar la derivada de casi cualquier función.

Aparte de la velocidad, la derivada permite calcular infinidad de ritmos de cambio de magnitudes diversas, como quedará claro en las aplicaciones del Capítulo 3. Entender el concepto de ritmo de cambio es un objetivo clave del Cálculo.

## 2.1 RECTA TANGENTE Y VELOCIDAD

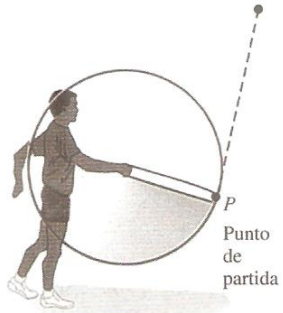



**Figura 2.1**
Trayectoria de la piedra.

Hacemos girar una honda hasta que, en un cierto instante, soltamos la cuerda y la piedra sale libre (figura 2.1). Al soltar la cuerda, ¿en qué dirección sale la piedra? Mucha gente cree que la piedra sigue una trayectoria curvada, pero no. La segunda ley de Newton afirma que seguirá un camino recto. En efecto, sigue la recta tangente a la circunferencia de giro en el punto donde se suelta.

Determinar la trayectoria de esa piedra es sencillo porque las rectas tangentes a una circuferencia son fáciles de hallar. (La recta tangente toca a la circunferencia en un solo punto, según sabemos por geometría elemental). El objetivo de esta sección es extender la noción de recta tangente a curvas más generales. Entre otras cosas, veremos que las rectas tangentes dan información valiosa sobre el movimiento de objetos en general.

Para fijar ideas, supongamos que deseamos hallar la recta tangente a la curva $y = x^2 + 1$ en el punto (1, 2) (figura 2.2). Por desgracia, la idea de que la recta tangente es aquella que corta a la curva en un único punto no sirve aquí. Por ejemplo, la figura 2.3 muestra dos rectas que sólo cortan a la curva en el punto (1, 2). ¿Son rectas tangentes ambas? Ciertamente no. Sólo una de ellas se ciñe a la curva como la tangente a una circunferencia. En otras palabras, tiene la misma dirección que la curva en el punto de tangencia.

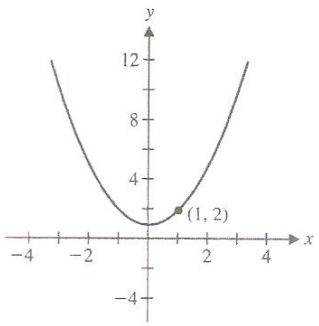



**Figura 2.2**
$y = x^2 + 1$.

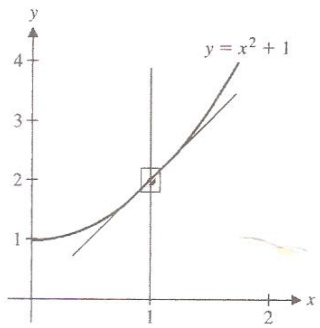



**Figura 2.3**
$y = x^2 + 1$ y dos rectas que cortan a la curva en un único punto.

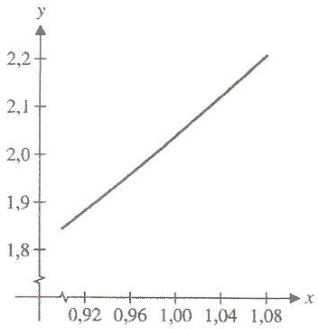



**Figura 2.4**
$y = x^2 + 1$.

Es decir, si nos situamos en el punto de tangencia y damos un paso intentando permanecer sobre la curva, lo daremos en la dirección de la recta tangente.

Otra forma de mirar la situación consiste en observar que si se aplica el zoom varias veces en un entorno del punto, la curva aparecerá como casi recta (figura 2.4). (Cuidado: los ejes de la figura 2.4 no se cortan en el origen. Se indican simplemente como referencia de la escala de la gráfica). Tomemos dos puntos sobre la curva, digamos (1, 2) y (3, 10), y calculemos la pendiente de la recta que los une. Esa recta se llama **recta secante** y su pendiente, denotada por $m_{sec}$, es:

$$m_{sec} = \frac{10 - 2}{3 - 1} = 4.$$

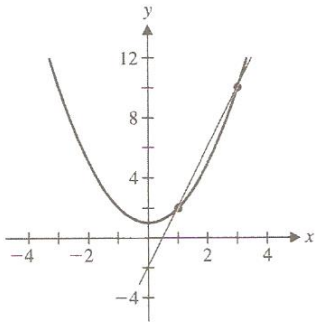



**Figura 2.5a**

Recta secante que une (1, 2) y (3, 10).

La ecuación de la recta secante se escribe

$$\frac{y-2}{x-1} = 4,$$

o sea,

$$y = 4(x-1) + 2.$$

Como muestra la figura 2.5a, esta recta secante dista mucho de ser tangente.

Tomemos ahora otro punto más cercano al de tangencia, digamos (2, 5). La pendiente de su recta secante es

$$m_{sec} = \frac{5-2}{2-1} = 3,$$

y su ecuación $y = 3(x-1) + 2$. Esta recta ya es más parecida a la recta tangente (figura 2.5b), pero todavía no lo es exactamente. Eligiendo otro punto más próximo al de tangencia, digamos (1,05, 2,1025), la nueva recta secante (figura 2.5c), de pendiente

$$m_{sec} = \frac{2{,}1025 - 2}{1{,}05 - 1} = 2{,}05$$

y ecuación $y = 2{,}05\ (x-1) + 2$, ya parece tangente incluso vista con el zoom (figura 2.5d).

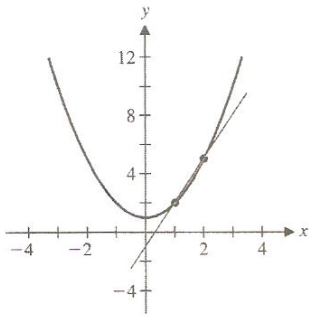



**Figura 2.5b**

Recta secante que une (1, 2) y (2, 5).

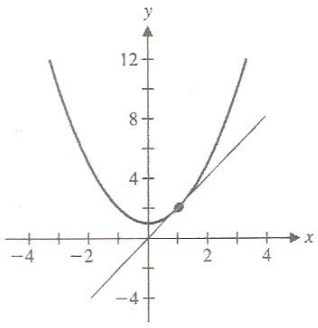



**Figura 2.5c**

Recta secante que une (1, 2) y (1,05, 2,1025).

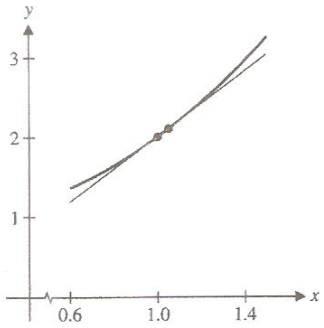



**Figura 2.5d**

Ampliación de la recta secante.

En vez de continuar con este proceso, tomando puntos más y más cercanos al (1, 2), vamos a calcular la pendiente de la recta secante que une (1, 2) con un punto genérico $(1 + h, f(1 + h))$, para valores de $h$ muy próximos a 0:

$$m_{sec} = \frac{f(1+h) - 2}{(1+h) - 1} = \frac{[(1+h)^2 + 1] - 2}{h}$$

$$= \frac{(1 + 2h + h^2) - 1}{h} = \frac{2h + h^2}{h} \qquad \text{Multiplicar y cancelar}$$

$$= \frac{h(2+h)}{h} = 2 + h. \qquad \text{Cancelar el factor común } h$$

Cuando $h$ tiende a 0, la pendiente de las rectas secantes tiende a 2, valor que tomaremos, por definición, como pendiente de la recta tangente.

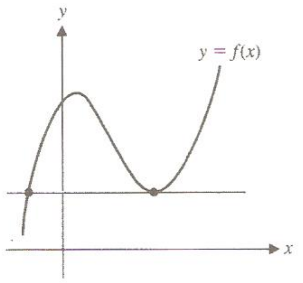



**Figura 2.6**

Recta tangente que corta a la curva en más de un punto.

**Nota 1.1**

Una observación más antes de acometer el caso general. Contrariamente a lo que ocurre para la circunferencia, una recta tangente puede cortar a la curva en cuestión en más de un punto (figura 2.6).

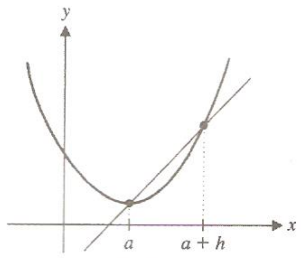



**Figura 2.7a**

Recta secante ($h > 0$).

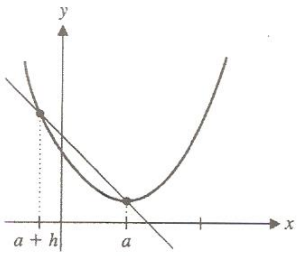



**Figura 2.7b**

Recta secante ($h < 0$).

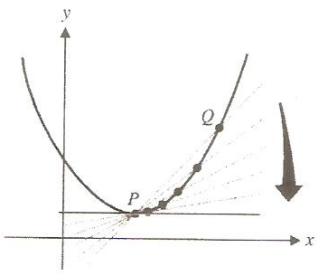



**Figura 2.8**

Las rectas secantes se aproximan a la recta tangente en el punto $P$.

## El caso general

Hemos aprendido cómo obtener aproximaciones cada vez mejores a la pendiente de la recta tangente por un método gráfico. El problema general es hallar una ecuación para la recta tangente a $y = f(x)$ en $x = a$. Como primer paso, tomamos el punto de tangencia $(a, f(a))$ y otro punto de la curva, $(a + h, f(a + h))$, con coordenada $x = a + h$, siendo $h$ un número pequeño. Tendemos a pensar en el caso $h > 0$ (como en la figura 2.7a), pero $h$ puede ser también negativo (como en la figura 2.7b).

La pendiente de la recta secante que une $(a, f(a))$ y $(a + h, f(a + h))$ viene dada por

$$m_{\text{sec}} = \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}. \tag{1.1}$$

La expresión en (1.1), llamada **cociente incremental**, da la pendiente de la recta secante que pasa por un punto arbitrario (o sea, para todo $h \neq 0$). Para lograr mejores aproximaciones aplicábamos el zoom repetidas veces. Eso se traduce aquí en tomar $h$ tendiendo hacia 0. El proceso se ilustra en la figura 2.8, donde hemos trazado varias rectas secantes con $h > 0$.

Nótese que conforme el punto $Q$ se aproxima al $P$ (o sea, al hacer $h \to 0$), la recta secante se aproxima a la recta tangente en $P$.

Vamos a definir la pendiente de la recta tangente como el límite de las pendientes de las rectas secantes cuando $h \to 0$ siempre que ese límite existe. De (1.1) se desprende la siguiente definición.

### Definición 1.1

La **pendiente** $m_{\text{tan}}$ de la recta tangente a $y = f(x)$ en $x = a$ se define como

$$m_{\text{tan}} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{1.2}$$

siempre que ese límite existe.

La recta tangente es, por tanto, la recta que pasa por el punto $(a, f(a))$ con pendiente

$$m_{\text{tan}} = \frac{y - f(a)}{x - a},$$

así que su ecuación viene dada por

$$y = m_{\text{tan}}(x - a) + f(a).$$

### Ejemplo 1.1 Ecuación de una recta tangente

Hallar una ecuación de la recta tangente a $y = x^2 + 1$ en $x = 1$.

**Solución** Calculamos la pendiente por la fórmula (1.2):

$$\begin{aligned}
m_{\text{tan}} &= \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{[(1+h)^2 + 1] - (1+1)}{h} && \text{Multiplicar y cancelar} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1 + 2h + h^2 + 1 - 2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{2h + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(2+h)}{h} && \text{Cancelar el factor común } h \\
&= \lim_{h \to 0} (2 + h) = 2.
\end{aligned}$$

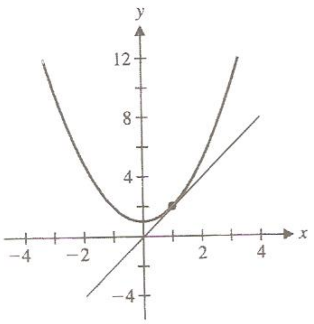



**Figura 2.9**

$y = x^2 + 1$ y la recta tangente en $x = 1$.

El punto correspondiente a $x = 1$ es $(1, 2)$ y la recta de pendiente 2 que pasa por el punto $(1, 2)$ tiene ecuación

$$y = 2(x - 1) + 2, \quad \text{o sea,} \quad y = 2x.$$

Nótese el parecido con las rectas secantes calculadas antes. La figura 2.9 muestra la gráfica de la función y de esa recta tangente.

**Ejemplo 1.2** **Recta tangente a la gráfica de una función racional**

Hallar una ecuación de la recta tangente a $y = \dfrac{2}{x}$ en $x = 2$.

**Solución** Aplicando (1.2), se tiene

$$m_{\tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{2}{2+h} - 1}{h} \qquad \text{Porque } f(2+h) = \frac{2}{2+h}.$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left[\dfrac{2-(2+h)}{(2+h)}\right]}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\left[\dfrac{2-2-h}{(2+h)}\right]}{h} \qquad \text{Sumar las fracciones.}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{(2+h)h} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{2+h} \qquad \text{Cancelar el factor común } h.$$

$$= \frac{-1}{2+0} = -\frac{1}{2}.$$

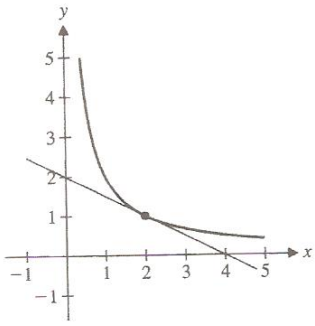



**Figura 2.10**

$y = \dfrac{2}{x}$ y recta tangente.

El punto correspondiente a $x = 2$ es $(2, 1)$, ya que $f(2) = 1$. Por tanto, la ecuación de la recta tangente es

$$y = -\frac{1}{2}(x - 2) + 1.$$

La figura 2.10 muestra la gráfica de la función y la recta tangente.

## Velocidad

Calcular la pendiente de una recta tangente ha sido interesante, pero, a fin de cuentas, ¿por qué tal empeño? Porque las pendientes de rectas tangentes tienen múltiples e importantes aplicaciones. Como dejaba entrever nuestra breve discusión de la honda, una de ellas es la velocidad. La palabra **velocidad** le es ciertamente familiar, pero ¿puede precisar qué significa? Suele decirse que es una magnitud que describe la rapidez **y la dirección** de un móvil. De acuerdo, pero ¿qué es exactamente la rapidez? Si un automóvil no tuviera velocímetro, ¿cómo calcularíamos su velocidad? Es bien conocida la fórmula

$$\text{distancia} = \text{velocidad} \times \text{tiempo} \tag{1.3}$$

Por tanto, basta dividir la distancia entre el tiempo y se obtiene la velocidad. Por desgracia, el asunto no es tan simple. La velocidad en (1.3) es la velocidad **media** en un lapso de tiempo. Nosotros estamos interesados en un instante concreto. Lo que sigue pretende dejar clara la diferencia entre ambas.

Imagine que le detiene la policía en la carretera y le plantea la temida pregunta: ¿Sabe a qué velocidad iba usted? Un estudiante repelente contestaría: «Por supuesto. He conducido 3 años, 2 meses, 7 días, 5 horas y 45 minutos. En ese tiempo he recorrido 45.259,7 kilómetros. Por tanto,

$$\text{velocidad} = \frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}} = \frac{45.259{,}7 \text{ km}}{27.917{,}75 \text{ horas}} \approx 1{,}62118 \text{ km/h}.$$

El policía haría poco caso de ese análisis (ridículo, para ser justos). Pero ¿qué tiene de falso? No hay nada de falso en (1.3) ni en la aritmética. Pero el policía argumentaría que la

mayor parte de esos tres años ni siquiera ha estado dentro del automóvil, por lo que el cálculo no es significativo.

Suponga que la respuesta fuese: «He salido de casa a las 6:17 P.M. y cuando usted me hizo parar a las 6:43 P.M. había recorrido 17 millas exactas, así que

$$\text{velocidad} = \frac{17 \text{ millas}}{26 \text{ minutos}} \cdot \frac{60 \text{ minutos}}{1 \text{ hora}} = 39{,}23077 \text{ mph},$$

muy por debajo de las 45 mph permitidas».

Sin duda, esta estimación es mucho mejor, pero sigue siendo una velocidad media sobre un lapso de tiempo largo. Como los automóviles pueden acelerar y frenar muy bruscamente, debemos calcular la velocidad sobre un intervalo de tiempo más pequeño. Pero ¿cómo de pequeño?

Igual que hicimos para la pendiente de la recta tangente, conviene rehacer todo analíticamente. Sea $f(t)$ la función que da la posición de un móvil sobre una recta en el instante $t$. Esto es, $f(t)$ da el desplazamiento (**distancia con signo**) desde un punto prefijado de referencia, de manera que $f(t) < 0$ significa que el móvil está situado a una distancia $|f(t)|$ del punto de referencia, pero en la dirección negativa. Para dos instantes $a$ y $b$, con $a < b$, $f(b) - f(a)$ da la distancia con signo entre las posiciones $f(a)$ y $f(b)$. La velocidad media $v_m$ en ese trayecto viene dada por

$$v_m = \frac{\text{distancia orientada}}{\text{tiempo}} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{1.4}$$

**Ejemplo 1.3** **Estimación de la velocidad**

La posición de un vehículo que viaja por una carretera recta viene dada por la función ($t$ se mide en minutos)

$$s(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{12}t^3, \quad 0 \le t \le 4.$$

Estimar su velocidad en el instante $t = 2$.

**Solución** Para empezar, podemos calcular la velocidad media en los primeros dos minutos (entre $t = 0$ y $t = 2$). Por (1.4),

$$v_m = \frac{s(2) - s(0)}{2 - 0} = \frac{1{,}333333333 - 0}{2}$$
$$= 0{,}666666667 \text{ km/min}$$
$$= 40 \text{ km/h}.$$

Claro está que la velocidad promedio a lo largo de 2 minutos no es una estimación demasiado buena de la velocidad instantánea. Un coche puede cambiar mucho su velocidad en ese tiempo. Mejor estimación se obtiene promediando entre $t = 1$ y $t = 2$ (sólo un minuto). Por (1.4) se tiene ahora

$$v_m = \frac{s(2) - s(1)}{2 - 1} = \frac{1{,}333333333 - 0{,}416666667}{1}$$
$$= 0{,}9166666663 \text{ km/min}$$
$$= 54{,}99999998 \text{ km/h}.$$

Desde luego, esta estimación es mejor porque el intervalo de tiempo es menor, pero ¿ya es bastante precisa? Al ir acortando el intervalo de tiempo, $v_m$ se irá aproximando a la velocidad en el instante $t = 2$. Eso ocurrirá si calculamos $v_m$ en el intervalo $[2 - h, 2]$, con $h > 0$, y hacemos $h \to 0$. Es decir,

$$v_m = \frac{s(2) - s(2 - h)}{2 - (2 - h)} = \frac{s(2) - s(2 - h)}{h}.$$

La tabla da varios resultados para valores de $h > 0$ cada vez más pequeños.

| $h$ | $\frac{s(2) - s(2 - h)}{h}$ |
|---|---|
| 1,0 | 0,9166666667 |
| 0,1 | 0,9991666667 |
| 0,01 | 0,9999916666 |
| 0,001 | 0,999999916 |
| 0,0001 | 1,0 |
| 0,00001 | 1,0 |

| $h$ | $\frac{s(2+h)-s(2)}{h}$ |
|---|---|
| 1,0 | 0,9166666667 |
| 0,1 | 0,9991666667 |
| 0,01 | 0,9999916667 |
| 0,001 | 0,999999917 |
| 0,0001 | 1,0 |
| 0,00001 | 1,0 |

Por supuesto, también tiene sentido calcular la velocidad media en intervalos que empiezan en $t = 2$, del tipo $[2, 2 + h]$, con valores pequeños de $h > 0$. Se obtiene

$$v_m = \frac{s(2+h)-s(2)}{(2+h)-2} = \frac{s(2+h)-s(2)}{h}.$$

La segunda tabla presenta varios de estos valores.

Nótese que con $h < 0$ la primera fórmula es equivalente a la segunda. De esos dos conjuntos de resultados parece deducirse que $v_m$ tiende a 1 km/min (60 km/h) cuando $h \to 0$. Este valor límite es lo que llamaremos velocidad instantánea.

### Definición 1.2

Si $f(t)$ representa la posición en el instante $t$ de un objeto que se mueve en línea recta, respecto de un punto de referencia fijo, la **velocidad instantánea** en el instante $t = a$ se define como

$$v(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}, \tag{1.5}$$

siempre que ese límite existe.

Si, pongamos por caso, la distancia se mide en metros y el tiempo en segundos, la velocidad (media o instantánea) se mide en m/s. Desde ahora, **velocidad** sin más significará velocidad instantánea.

### Ejemplo 1.4 Velocidad media y velocidad instantánea

La altura de un objeto $t$ segundos después de dejarlo caer desde una altura de 64 pies viene dada por $f(t) = 64 - 16t^2$. Calcular su velocidad media entre (a) $t = 1$ y $t = 2$, (b) $t = 1{,}5$ y $t = 2$, (c) $t = 1{,}9$ y $t = 2$, (d) hallar su velocidad instantánea en el instante $t = 2$.

**Solución** (a) Entre $t = 1$ y $t = 2$, la velocidad media es

$$v_m = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = \frac{64-16(2)^2-[64-16(1)^2]}{1} = -48 \text{ pies/s}.$$

(b) Entre $t = 1{,}5$ y $t = 2$,

$$v_m = \frac{f(2)-f(1{,}5)}{2-1{,}5} = \frac{64-16(2)^2-[64-16(1{,}5)^2]}{0{,}5} = -56 \text{ pies/s}.$$

(c) Entre $t = 1{,}9$ y $t = 2$,

$$v_m = \frac{f(2)-f(1{,}9)}{2-1{,}9} = \frac{64-16(2)^2-[64-16(1{,}9)^2]}{0{,}1} = -62{,}4 \text{ pies/s}.$$

(d) Su velocidad instantánea es el límite de las velocidades medias. De (1.5) se sigue

$$\begin{aligned} v(2) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{(2+h)-2} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{[64-16(2+h)^2]-[64-16(2)^2]}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{[64-16(4+4h+h^2)]-[64-16(2)^2]}{h} \quad \text{Desarrollar y cancelar.} \end{aligned}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-64h - 16h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-16h(h+4)}{h} \qquad \text{Cancelar el factor común } h.$$

$$= \lim_{h \to 0} [-16(h+4)] = -64 \text{ pies/s.}$$

Queda claro cómo las velocidades medias tienden al valor de la velocidad instantánea. Pero ¿a qué viene el signo negativo? Ya hemos dicho que la velocidad indica tanto la **rapidez** (valor absoluto de la velocidad) como la dirección. En este problema, $f(t)$ mide la altura sobre el suelo y una velocidad negativa significa que el objeto se mueve en la dirección negativa (hacia abajo). La rapidez en el instante $t = 2$ es 64 pies/s (la rapidez sí es positiva, siempre).

Es curioso que las fórmulas (1.5), para la velocidad instantánea, y (1.2), para la pendiente de una recta tangente, sean idénticas. Con el propósito de realzar esa conexión, vamos a ilustrar el ejemplo 1.4 representando la función posición $f(t) = 64 - 16t^2$ para $0 \le t \le 2$. La velocidad media entre $t = 1$ y $t = 2$ es entonces la pendiente de la recta secante que une los puntos con $t = 1$ y $t = 2$ (figura 2.11a).

La velocidad media entre $t = 1{,}5$ y $t = 2$ es la pendiente de la recta secante que une los puntos con $t = 1{,}5$ y $t = 2$ (figura 2.11b). Finalmente, la velocidad instantánea en el instante $t = 2$ es la pendiente de la recta tangente en $t = 2$ (figura 2.11c).

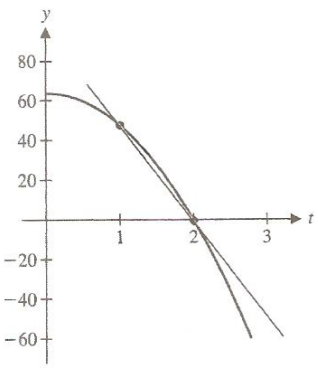



**Figura 2.11a**
Recta secante entre $t = 1$ y $t = 2$.

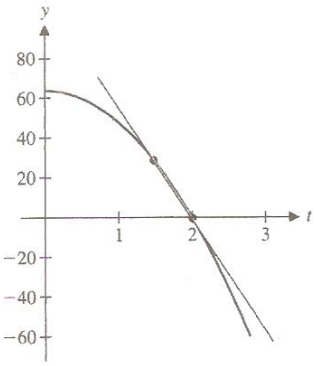



**Figura 2.11b**
Recta secante entre $t = 1{,}5$ y $t = 2$.

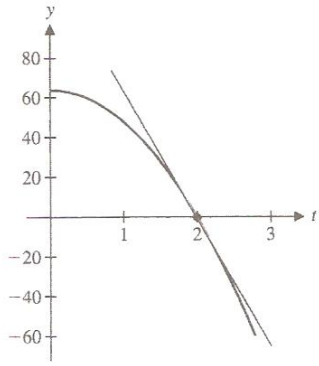



**Figura 2.11c**
Recta tangente en $t = 2$.

Se suele interpretar la velocidad como el *ritmo* instantáneo de cambio de la posición respecto del tiempo. Esa idea de ritmo de cambio se puede extender. En general, el **ritmo medio de cambio** de una función $f(x)$, entre $x = a$ y $x = b$, con $a \neq b$, viene dado por

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

El **ritmo instantáneo de cambio** de $f(x)$ en $x = a$ viene dado por

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

siempre que exista ese límite. Se mide en las unidades de $f$ divididas entre las de $x$.

### Ejemplo 1.5 Ritmos de cambio medio e instantáneo

La población de una ciudad dentro de $t$ años se estima que será de $f(t) = \sqrt{100 + 8t}$ millones de habitantes. Hallar (a) el ritmo medio de la población en los próximos dos años, (b) el ritmo instantáneo de cambio de la población dentro de dos años.

**Solución** (a) El ritmo medio en el próximo bienio es

$$\frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{\sqrt{100+16}-\sqrt{100}}{2} \approx 0{,}3852 \text{ millones al año.}$$

(b) El ritmo instantáneo en $t = 2$ es

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{100+8(2+h)}-\sqrt{116}}{h}$$

Multiplicar numerador y denominador por el conjugado: $\sqrt{116+8h}+\sqrt{116}$.

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{116+8h}-\sqrt{116})}{h} \frac{(\sqrt{116+8h}+\sqrt{116})}{(\sqrt{116+8h}+\sqrt{116})}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(116+8h)-116}{h(\sqrt{116+8h}+\sqrt{116})}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{8h}{h(\sqrt{116+8h}+\sqrt{116})}$$

Cancelar el factor común $h$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{8}{\sqrt{116+8h}+\sqrt{116}}$$

$$= \frac{8}{\sqrt{116}+\sqrt{116}}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{116}} \approx 0{,}3714 \text{ millones al año.}$$

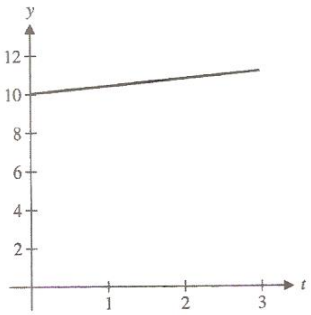



**Figura 2.12**
$y = \sqrt{100+8t}$.

Como el ritmo instantáneo de cambio en $t = 2$ es menor que el ritmo medio entre $t = 0$ y $t = 2$, deducimos que el ritmo de crecimiento de la población está decreciendo, un hecho nada evidente en la gráfica de $f(t)$ (figura 2.12). Es habitual dar el ritmo de crecimiento de una población como porcentaje de la población presente. Como la población en el instante $t = 2$ es $\sqrt{116}$ millones, el cambio porcentual en $t=2$ es $\dfrac{4/\sqrt{116}}{\sqrt{116}} \approx 0{,}034$, un 3,4% aproximadamente.

---

Entre la inmensa lista de aplicaciones de la pendiente de las rectas tangentes citemos el ritmo de una reacción química, el ritmo de la inflación en Economía y el ritmo de aprendizaje en Psicología. En resumen, todos los ritmos de cambio que se le ocurran en cualquier disciplina son interpretables como pendientes de rectas tangentes. Conforme avancemos en el libro, encontraremos muchas de esas aplicaciones.

Hemos añadido la coletilla «supuesto que el límite existe» al final de las definiciones de la pendiente de una recta tangente, de la velocidad instantánea y del ritmo de cambio instantáneo porque no siempre existe, como corrobora el ejemplo siguiente.

### Ejemplo 1.6 Una gráfica sin recta tangente en un punto

Investigar si existe recta tangente a $y = |x|$ en $x = 0$.

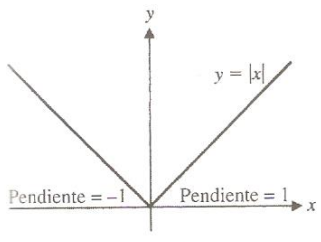



**Figura 2.13**
$y = |x|$.

**Solución** Estudiamos el problema desde perspectivas gráfica, numérica y analítica.
(a) En una gráfica como la de la figura 2.13 solemos hacer zoom en el punto de tangencia hasta que la gráfica aparece como una recta. Pero aquí, por mucho que apliquemos el zoom en (0, 0), la gráfica sigue teniendo el aspecto de la figura 2.13. Compruébelo. (Por eso no hemos indicado la escala en la figura). Así, pues, da la impresión de que no hay recta tangente.
(b) Numéricamente, observamos que la recta secante que une (0, 0) y (1, 1) tiene pendiente 1, igual que la que une (0, 0) y (0,1, 0,1). Es más, para todo $h > 0$, la pendiente de la recta secante que une (0, 0) y $(h, |h|)$ es 1. Sin embargo, la recta secante que une (0, 0) y (–1, –1) tiene pendiente –1, igual que las secantes que unen (0, 0) con $(h, |h|)$ para cualquier $h < 0$. Conjeturamos, pues, que los límites laterales son distintos y que, en consecuencia, el límite (y la propia recta tangente) no existe.
(c) Para demostrar analíticamente esa conjetura, investigamos los límites laterales.

Si $h > 0$, entonces $|h| = h$, así que

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{|h| - 0}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = 1.$$

Si $h < 0$, entonces $|h| = -h$ (porque $h < 0$ implica $-h > 0$), luego

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{|h| - 0}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = -1.$$

Como los límites laterales son distintos, concluimos que

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \text{ no existe.}$$

Por tanto, la recta tangente tampoco existe.

# EJERCICIOS 2.1

1. ¿Qué significa «salirse por la tangente»? Relacionar el sentido coloquial de esa frase con la imagen de una tangente a la circunferencia (el ejemplo de la honda sirve de ayuda).

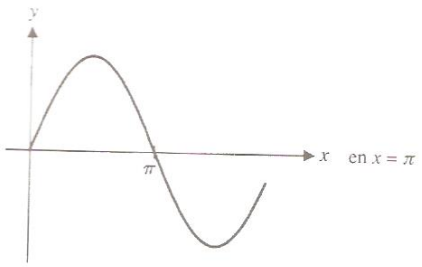
2. La velocidad *instantánea* no puede medirse directamente, sino sólo por un proceso de paso al límite. Si eso es así, ¿cómo mide el velocímetro de un automóvil la velocidad? (Ayuda: Consulte en un libro o en Internet. Un aspecto importante de cómo lleva a cabo esa tarea, aparentemente tan difícil, es que realiza cálculos **analógicos**. Por ejemplo, el zumbido de las alas de una mosca es un instrumento analógico para calcular su velocidad, ya que ambos son proporcionales).

3. Busque en televisión, periódicos o Internet cinco referencias a *ritmos de cambio* diferentes. Identifique en cada uno de ellos la función que cambia. El ritmo de cambio, ¿viene dado cuantitativa o cualitativamente? Si el dato es cuantitativo, ¿se da como porcentaje o como número? En el Cálculo se acostumbra a evaluar los ritmos de cambio cuantitativamente como números. ¿Es lo usual en las aplicaciones?

4. Esbozar la gráfica de una función discontinua en $x = 1$ y explicar por qué no existe recta tangente en $x = 1$.

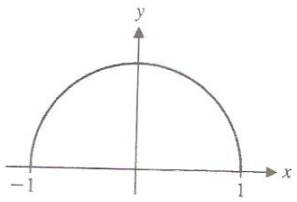
**En los ejercicios 5-8, trazar aproximadamente la recta tangente en el punto indicado. (Ayuda: Hacer zoom mentalmente en ese punto).**

5.



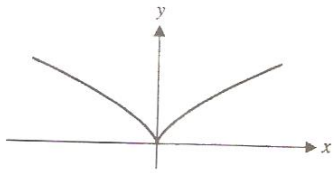

en $x = \pi$

6.



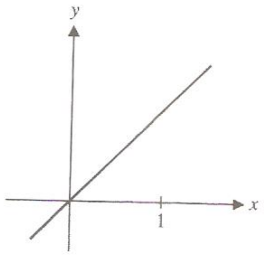

en $x = 1$

7.




en $x = 0$

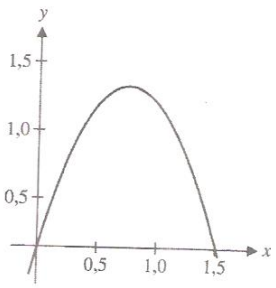
8.



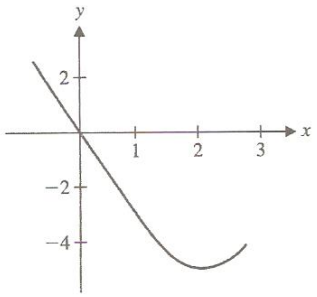

en $x = 1$

**En los ejercicios 9 y 10, estimar la pendiente de la recta tangente a la curva en $x = 1$.**

9.

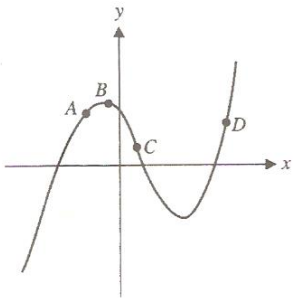


10.

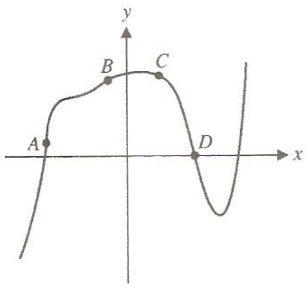



**En los ejercicios 11 y 12, ordenar los puntos $A$, $B$, $C$ y $D$ por valores crecientes de la pendiente de sus rectas tangentes.**

11.




12.




**En los ejercicios 13-16, calcular la pendiente de la recta secante que une los puntos (a) $x = 1$ y $x = 2$, (b) $x = 2$ y $x = 3$, (c) $x = 1{,}5$ y $x = 2$, (d) $x = 2$ y $x = 2{,}5$, (e) $x = 1{,}9$ y $x = 2$, (f) $x = 2$ y $x = 2{,}1$ y (g) estimar la pendiente de la recta tangente en $x = 2$.**

13. $f(x) = x^3 - x$

14. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

15. $f(x) = \cos x^2$

16. $f(x) = \tan 2x$

**En los ejercicios 17-20, usar un PCS o una calculadora gráfica.**

17. Esbozar en una gráfica las rectas secantes del ejercicio 13, apartados (a)-(d) y la recta tangente del apartado (g).

18. Esbozar en una gráfica las rectas secantes del ejercicio 14, apartados (a)-(d) y la recta tangente del apartado (g).

19. Hacer una gráfica animada de las secantes (a), (c) y (e) del ejercicio 13 para ver cómo convergen a la tangente del apartado (g).

20. Hacer una gráfica animada de las secantes (b), (d) y (f) del ejercicio 14 para ver cómo convergen a la tangente del apartado (g).

**En los ejecicios 21-28, hallar la ecuación de la recta tangente a $y = f(x)$ en $x = a$. Representar la función y la recta tangente para verificar que la ecuación era correcta.**

21. $f(x) = x^2 - 2, a = 1$

22. $f(x) = x^2 - 2, a = 0$

23. $f(x) = x^2 - 3x, a = -2$

24. $f(x) = x^3 + x, a = 1$

25. $f(x) = \dfrac{2}{x+1}, a = 1$

26. $f(x) = \dfrac{x}{x-1}, a = 0$

27. $f(x) = \sqrt{x+3}, a = -2$

28. $f(x) = \sqrt{x^2+1}, a = 1$

**En los ejercicios 29-34, usar evidencia gráfica y numérica para determinar si existe la recta tangente a $y = f(x)$ en $x = a$. Si existe, estimar su pendiente. En caso contrario, explicar por qué no existe.**

29. $f(x) = |x - 1|$ en $a = 1$

30. $f(x) = \dfrac{4x}{x-1}$ en $a = 1$

31. $f(x) = \begin{cases} -2x^2 & \text{si } x < 0 \\ x^3 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ en $a = 0$

32. $f(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 1 \\ x - 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ en $a = 1$

33. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 0 \\ x^3 + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ en $a = 0$

34. $f(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 2x & \text{si } x > 0 \end{cases}$ en $a = 0$

**En los ejercicios 35-38, la función describe la posición de un objeto. Calcular la velocidad media entre (a) $t = 0$ y $t = 2$, (b) $t = 1$ y $t = 2$, (c) $t = 1{,}9$ y $t = 2$, (d) $t = 1{,}99$ y $t = 2$ y (e) estimar la velocidad instantánea en $t = 2$.**

35. $f(t) = 16t^2 + 10$

36. $f(t) = 3t^3 + t$

37. $f(t) = \sqrt{t^2 + 8t}$

38. $f(t) = 100 \operatorname{sen}(t/4)$

**En los ejercicios 39-42, usar la función posición $f(t)$ para hallar la velocidad en el instante $t = a$.**

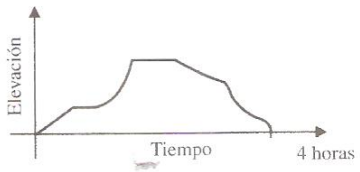
39. $f(t) = -16t^2 + 5, a = 1$

40. $f(t) = -16t^2 + 5, a = 2$

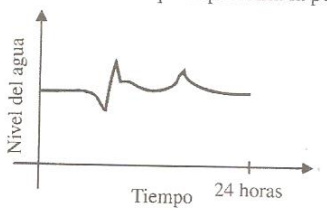
41. $f(t) = \sqrt{t+16}, a = 0$

40. $f(t) = 2\sqrt{t+14}, a = 2$

43. La figura muestra la altura de un montañero durante una ascensión. ¿Cuándo alcanzó la cima? ¿Cuál fue el momento de ascenso más rápido? ¿Y el de descenso más rápido? ¿Qué pudo ocurrir en los lugares donde la gráfica es horizontal?



44. La figura muestra el nivel del agua en un pantano. ¿Cuándo ha estado más lleno? ¿Y más vacío? ¿En qué momento se estaba llenando a mayor ritmo? ¿Cuándo se estaba vaciando a mayor ritmo? ¿Qué parte del día cree que representa la porción plana?




45. Esbozar una gráfica razonable de la temperatura de una taza de café caliente que se deja en una mesa durante dos horas. A continuación, esbozar la gráfica del ritmo de cambio de la temperatura.

46. Esbozar una gráfica que represente la altura de una persona que salta sobre una cama elástica (tomar como positiva la dirección hacia arriba).

47. Al manejar una honda, es muy importante la **velocidad angular**, definida como $\lim_{h \to 0} \dfrac{\theta(a+h) - \theta(a)}{h}$, donde $\theta(t)$ es el ángulo de giro en el instante $t$. Si el ángulo de una honda viene dado por $\theta(t) = 0{,}4t^2$, ¿cuál es su velocidad angular tras tres giros completos? (Ayuda: ¿Qué valor de $t$ corresponde a tres vueltas?).

48. Hallar la velocidad angular de la honda del ejercicio 47 tras dos vueltas. Explicar por qué es útil el tercer giro.

49. En el ejercicio 35 hay una vía errónea que lleva al resultado correcto. Para funciones cuadráticas (pero para casi ninguna otra), la velocidad media entre $t = r$ y $t = s$ es igual a la media de las velocidades en $t = r$ y en $t = s$. Para verificarlo, tome $f(t) = at^2 + bt + c$ como función distancia y compruebe que
(a) la velocidad media entre $t = r$ y $t = s$ es $a(s + r) + b$,
(b) la velocidad en $t = r$ es $2ar + b$ y en $t = s$ es $2as + b$,
(c) $a(s + r) + b = \dfrac{(2ar + b) + (2as + b)}{2}$.

50. Encontrar una función cúbica $f(t) = t^3 + \ldots$ y números reales $r$, $s$ tales que la velocidad media entre $t = r$ y $t = s$ sea el promedio de las velocidades en $t = r$ y en $t = s$.

51. Represente la función de población $f(t) = \sqrt{100 + 8t}$ del ejemplo 1.5. Argumente que el ritmo de cambio de la población (la pendiente de la recta tangente) disminuye al crecer $t$. Como ilustración, calcule el ritmo de cambio en $t = 3$ y compárelo con el obtenido en el ejemplo 1.5 para $t = 2$.

52. Calcule el ritmo de cambio porcentual en el ejercicio 51 para $t = 3$ y compárelo con el del ejemplo 1.5.

53. Probar que $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.
(Ayuda: Tomar $h = x - a$).

54. Usando el segundo límite del ejercicio 53, recalcular la pendiente en los ejercicios 21 y 23. ¿Qué límite prefiere?

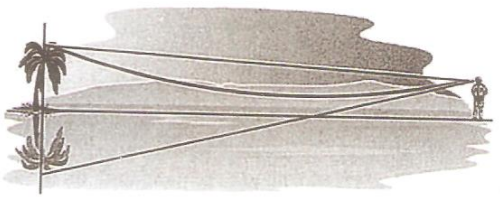
55. Un automóvil desliza al tomar una curva de la forma $y = x^2$, se sale de la carretera en el punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ y continúa en línea recta. ¿Chocará contra un árbol situado en el punto $\left(1, \frac{3}{4}\right)$?

56. Para la situación del ejercicio 55, probar que hay un único punto de la curva $y = x^2$ cuya recta tangente pase por el punto $\left(1, \frac{3}{4}\right)$.

57. Muchas ilusiones ópticas se producen al interpretar nuestro cerebro (inconscientemente) la recta tangente como indicativa de la posición de un objeto. Suponga que está en un desierto a 100 pies de una palmera de 28 pies de altura. En condiciones normales, de un punto de la palmera veríamos la luz llegar recta a nuestros ojos (véase figura).

Dos trayectorias de la luz desde la palmera hasta la persona que mira.

Pero cuando hay fuertes diferencias de temperatura en diversas capas de aire, la luz se desvía. En el desierto, el aire próximo al suelo está mucho más caliente que el de más arriba y, en consecuencia, la luz sigue el camino curvado de la figura. Nuestro cerebro interpreta, por hábito, que la luz viaja en línea recta, de modo que puede interpretar que un punto está a altura $y = 10$ según la trayectoria superior y en otra $y$ según la trayectoria inferior. Si la curva inferior viene dada por la ecuación $y = 0{,}002x^2 - 0{,}24x + 28$, hallar una ecuación para la recta tangente en $x = 100$ y probar que cruza el eje $y$ en $y = -10$. Es decir, «veremos» el punto en $y = 10$ y también en $y = -10$, una reflexión perfecta.



Dos posiciones aparentes del árbol

¿Cómo se producen las reflexiones en la Naturaleza normalmente? ¡En el agua! Puede ver un árbol y su reflejado en un estanque. ¡Éste es el milagro del desierto!

58. Para estimar la velocidad se puede utilizar un VCR. La mayoría de los VCR funcionan a 30 imágenes por segundo, así que pasando imagen a imagen, el tiempo es el número de imágenes dividido entre 30. Si conocemos la distancia, podemos estimar la velocidad dividiendo entre el tiempo. Intente estimar así la velocidad a la que corre 50 metros, golpea una bola de tenis o cualquier otra cosa que le intrigue. Algunas posibles imprecisiones se analizan en el ejercicio 59.

59. ¿Cuál es el tope de velocidad del ser humano? Se ha estimado que Carl Lewis alcanzó un pico de 45 km/h en la final de los Juegos Olímpicos de 1992. Imagine que desea calcular el pico de velocidad de un *sprinter*, del que se han medido

los datos de la tabla. Podemos evaluar $\frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}} = \frac{100 \text{ m}}{10 \text{ s}} =$ = 10 m/s, pero eso es la velocidad media, no la máxima. Calcule las velocidades medias en los 11 intervalos de tiempo entre medidas consecutivas (entre 30 y 40, entre 40 y 50...) y vea cuál de ellas es la mayor. Ahora exploraremos cómo es de precisa esa estimación.

| Metros | Segundos |
|---|---|
| 30 | 3,2 |
| 40 | 4,2 |
| 50 | 5,16666 |
| 56 | 5,76666 |
| 58 | 5,93333 |
| 60 | 6,1 |

| Metros | Segundos |
|---|---|
| 62 | 6,26666 |
| 64 | 6,46666 |
| 70 | 7,06666 |
| 80 | 8,0 |
| 90 | 9,0 |
| 100 | 10,0 |

Observe que todos los tiempos son esencialmente múltiplos de 1/30, porque fueron medidos con un VCR (como se explica en el ejercicio 58). Sabido esto, ¿por qué resulta sospechoso que todas las distancias medidas sean números enteros?

Para ver cómo afecta eso a la estimación, cambie alguna de las distancias. Por ejemplo, si se cambia de 60 a 59,8 metros, ¿cuánto se modifican sus cálculos de velocidades medias?

Una forma de adivinar dónde hay errores es mirar el conjunto de las velocidades medias. ¿Parece razonable? En ese esquema, ¿el velocista aceleraría primero y desaceleraría después? Donde parezca dudoso el esquema, intente ajustar las distancias para hacerlo más realista.

Teniendo todo eso en cuenta, intente cuantificar su análisis: ¿cuál parece ser el valor máximo (y el mínimo) probable del pico de velocidad?

## 2.2 LA DERIVADA

En la sección 2.1 hemos hablado de dos conceptos sin relación aparente: pendientes de rectas tangentes y velocidad. Y hemos descubierto que los dos se expresan en términos de un **mismo** límite. Ésta es una muestra de la potencia de las Matemáticas: conceptos sin relación aparente se describen mediante la **misma** expresión matemática. Ese límite común resulta ser tan útil que se le asigna un nombre especial y nos detenemos a estudiarlo con calma.

**Nota 2.1**

Una forma alternativa de (2.1) es

$$f'(a) = \lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad (2.2)$$

Se pidió demostrar la equivalencia de (2.1) y (2.2) en el ejercicio 53 de la sección 2.1.

**Definición 2.1**

La **derivada** de una función $f(x)$ en $x = a$ se define como

$$f'(a) = \lim_{x \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}, \qquad (2.1)$$

siempre que este límite existe. Y en tal caso se dice que $f$ es **derivable** en $x = a$.

**Ejemplo 2.1** **Cálculo de la derivada en un punto**

Calcular la derivada de $f(x) = 3x^3 + 2x - 1$ en $x = 1$.

**Solución** Aplicando (2.1) se tiene

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[3(1 + h)^3 + 2(1 + h) - 1] - (3 + 2 - 1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3(1 + 3h + 3h^2 + h^3) + (2 + 2h) - 1 - 4}{h} \quad \text{Desarrollar y cancelar}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3 + 9h + 9h^2 + 3h^3 + 2 + 2h - 5}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{11h + 9h^2 + 3h^3}{h} \qquad \text{Sacar el factor común } h \text{ y cancelarlo}$$

$$= \lim_{h \to 0} (11 + 9h + 3h^2) = 11.$$

Hemos hecho un largo camino para hallar $f'(1)$. Si tuviéramos que calcular también $f'(2)$ y $f'(3)$, ¿hemos de repetir algo análogo? No. La estrategia astuta consiste en calcular la derivada sin especificar en qué punto $x$. Esto hace algo más difícil el cálculo del límite, pero da como resultado una función de $x$ de la que se obtiene el valor de $f'(a)$, para cualquier $a$, simplemente sustituyendo $x = a$ en ella.

### Ejemplo 2.2 Cálculo de la derivada en un punto sin especificar

Hallar la derivada de $f(x) = 3x^3 + 2x - 1$ en un valor genérico de $x$. A continuación, evaluar la derivada en $x = 1$, $x = 2$ y $x = 3$.

**Solución** Cambiando $a$ por $x$ en la definición (2.1) de la derivada, se tiene

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[3(x+h)^3 + 2(x+h) - 1] - (3x^3 + 2x - 1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) + (2x + 2h) - 1 - 3x^3 - 2x + 1}{h} \qquad \text{Multiplicar y cancelar}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3x^3 + 9x^2h + 9xh^2 + 3h^3 + 2x + 2h - 3x^3 - 2x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{9x^2h + 9xh^2 + 3h^3 + 2h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (9x^2 + 9xh + 3h^2 + 2) \qquad \text{Sacar factor común } h \text{ y cancelar}$$

$$= 9x^2 + 0 + 0 + 2 = 9x^2 + 2.$$

Nótese que hemos obtenido una nueva **función**, $f'(x) = 9x^2 + 2$. Por sustitución directa en ella, vemos que $f'(1) = 9 + 2 = 11$ (¡igual a la calculada en el ejemplo 2.1!), $f'(2) = 9(4) + 2 = 38$ y $f'(3) = 9(9) + 2 = 83$.

Eso sugiere la siguiente definición.

### Definición 2.2

Se llama función **derivada** de $f(x)$ a la función $f'(x)$ dada por

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \qquad (2.3)$$

siempre que ese límite existe. El proceso de calcular la derivada se llama **derivación**.

En los ejemplos que siguen calculamos algunas derivadas.

### Ejemplo 2.3 Derivada de un polinomio lineal

Si $f(x) = 3x - 5$, hallar $f'(x)$.

**Solución** Por (2.3),

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[3(x+h) - 5] - (3x - 5)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3x + 3h - 5 - 3x + 5}{h} \qquad \text{Multiplicar y cancelar}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3h}{h} = \lim_{h \to 0} 3 = 3 \qquad \text{Cancelar } h$$

Nótese que coincide con la pendiente de la recta, que es 3.

### Ejemplo 2.4 Derivada de un polinomio cuadrático

Si $f(x) = 2x^2 - 5x + 7$, hallar $f'(x)$.

**Solución** Por (2.3),

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[2(x+h)^2 - 5(x+h) + 7] - (2x^2 - 5x + 7)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2(x^2 + 2xh + h^2) - 5x - 5h + 7 - 2x^2 + 5x - 7}{h} \qquad \text{Multiplicar y cancelar}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4xh + 2h^2 - 5h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(4x + 2h - 5)}{h} \qquad \text{Sacar factor común } h \text{ y cancelar}$$

$$= \lim_{h \to 0} (4x + 2h - 5) = 4x - 5.$$

Con sólo dos ejemplos se adivina ya que el juego consiste en escribir el límite de la definición de derivada y encontrar la manera de evaluar ese límite (que inicialmente es siempre de la forma indeterminada $\frac{0}{0}$).

### Ejemplo 2.5 Derivada de una función racional simple

Si $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$, hallar $f'(x)$.

**Solución**

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}\right)}{h} \qquad \text{Porque } f(x+h) = \frac{1}{x+h}.$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left[\frac{x - (x+h)}{x(x+h)}\right]}{h} \qquad \text{Sumar fracciones y cancelar.}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{hx(x+h)} \qquad \text{Cancelar } h.$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2},$$

luego $f'(x) = -x^{-2}$.

**Ejemplo 2.6** **Derivada de la función raíz cuadrada**

Si $f(x) = \sqrt{x}$ (con $x \geq 0$), hallar $f'(x)$.

**Solución**

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \qquad \text{Multiplicar numerador y denominador por el conjugado: } \sqrt{x+h} + \sqrt{x}.$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h) - x}{h[\sqrt{x+h} + \sqrt{x}]} \qquad \text{Multiplicar y cancelar.}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h[\sqrt{x+h} + \sqrt{x}]}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \qquad \text{Cancelar } h.$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} x^{-1/2}.$$

Nótese que $f'(x)$ está definida sólo para $x > 0$.

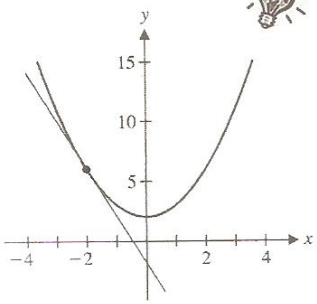



**Figura 2.14a**

$m_{\tan} < 0$.

Las ventajas de la **función** derivada no se limitan a facilitar el cálculo del valor de la derivada en muchos puntos. Veremos que contiene información muy valiosa acerca de la función original.

No debemos olvidar que $f'(a)$ es la pendiente de la recta tangente a $y = f(x)$ en $x = a$. En las figuras 2.14a-2.14c vemos la gráfica de una función y sus rectas tangentes en tres puntos. ¿Cómo es la pendiente de esas tres rectas tangentes?

En la figura 2.14a es negativa, como corresponde al hecho de que la función es **decreciente** (siempre de izquierda a derecha).

En la figura 2.14c es positiva, reflejo de que la función es **creciente** allí.

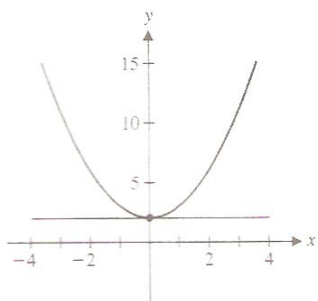



**Figura 2.14b**

$m_{\tan} = 0$.

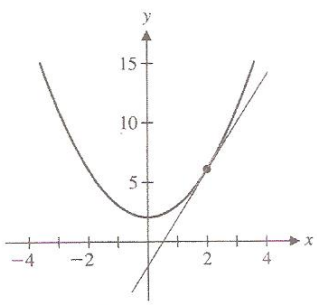



**Figura 2.14c**

$m_{\tan} > 0$.

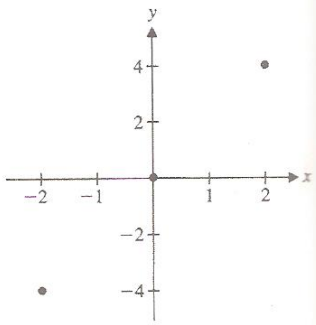



**Figura 2.14d**

$y = f'(x)$ (tres puntos).

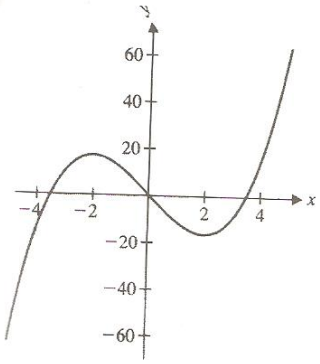



**Figura 2.15**

$y = f(x)$.

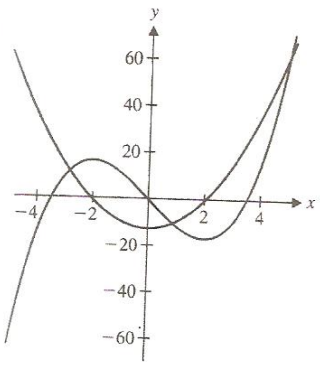



**Figura 2.16**

$y = f(x)$ e $y = f'(x)$.

En la figura 2.14b es cero, lo que refleja el que la función alcanza allí un mínimo y está pasando de decreciente a creciente. No es ni lo uno ni lo otro.

Con esa información podemos marcar tres puntos de la gráfica de la función derivada (figura 2.14d), estimando el valor de $f'(x)$ en esos tres puntos. Así, pues, al cambiar $x$ la pendiente de la recta tangente cambia. La función derivada $f'(x)$ registra ese cambio. Pensando un poco, se puede deducir el comportamiento de una función del de su derivada (y viceversa).

### Ejemplo 2.7 Gráfica de $f'(x)$ a partir de la gráfica de $f(x)$

La figura 2.15 muestra la gráfica de una función $f(x)$. Dibujar un esbozo de la gráfica de $f'(x)$.

**Solución** Sólo nos interesa el aspecto cualitativo de $f'(x)$, no sus valores exactos. Como en las figuras 2.14a-2.14d, elegimos varios puntos significativos. Pero ¿cuáles lo son? Hay que fijarse en puntos donde hay discontinuidades o donde la gráfica «rebota». Por ahora no necesitamos conocer las intersecciones con los ejes.

Aproximadamente, la gráfica asciende en $x < -2$, rebota en $x = -2$, desciende para $-2 < x < 2$, rebota en $x = 2$ y asciende en $x > 2$. Eso significa que $f'(x) > 0$ en $x < -2$, $f'(x) < 0$ para $-2 < x < 2$ y finalmente $f'(x) > 0$ en $x > 2$.

Aún podemos afinar más. Cuando $x$ tiende a $-2$ por la izquierda, las rectas tangentes tienen cada vez menor pendiente (trace algunas), y por tanto, $f'(x)$ va siendo menos positiva. Y al alejarnos de $x = -2$ por su derecha, la gráfica va aumentando su pendiente hasta llegar a $x = 0$, donde comienza a disminuir hasta $x = 2$. Así, pues, $f'(x)$ se va haciendo cada vez más negativa hasta $x = 0$ y entones menos negativa hasta $x = 2$. Finalmente, la gráfica aumenta su pendiente al alejarnos de $x = 2$ por la derecha.

Combinando toda esta información, concluimos que la posible forma de la gráfica de $f(x)$ es la que indica la figura 2.16 (superpuesta a la gráfica de $f(x)$).

La pregunta opuesta a la planteada en el ejemplo 2.7 es todavía más interesante: dada la gráfica de $f'(x)$, ¿cómo es la de $f(x)$? Exploramos esta cuestión en el ejemplo siguiente.

### Ejemplo 2.8 Gráfica de $f(x)$ a partir de la gráfica de $f'(x)$

Dada la gráfica de $f'(x)$ de la figura 2.17, esbozar la gráfica de $f(x)$.

**Solución** Sólo nos interesa el aspecto cualitativo de $f(x)$, no sus valores exactos (imposibles de determinar, por cierto, como veremos más adelante). De la gráfica se sigue que $f'(x) < 0$ en $x < -2$ y en el intervalo $(1, 3)$. Eso significa que las pendientes de las rectas tangentes a $y = f(x)$ son negativas, luego $f(x)$ es decreciente. En el intervalo $(-2, 1)$ y en $x > 2$ es $f'(x) > 0$, lo cual indica que las pendientes de las rectas tangentes a $y = f(x)$ son positivas y la

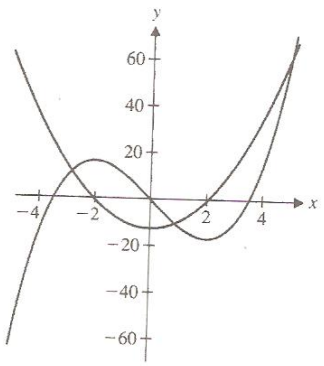



**Figura 2.17**

$y = f'(x)$.

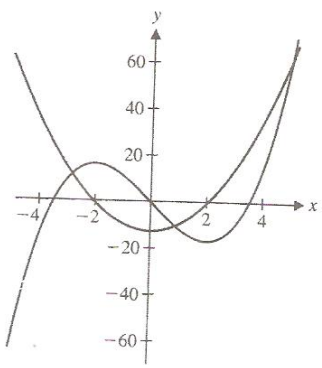



**Figura 2.18**

$y = f'(x)$ y una posible gráfica de $y = f(x)$.

función $f$ creciente. Además, la gráfica rebota en $x = -2$ (pasa de ser decreciente a ser creciente) y en $x = 2$ (pasa de creciente a decreciente). En la figura 2.18 se ha dibujado, superpuesta a la de $f'(x)$, una gráfica posible de $f(x)$ que cumple todas esas condiciones. Seguro que se está preguntando por qué el «valle» de la derecha se ha dibujado menos profundo que el de la izquierda. Hay una razón. Si mira con atención la gráfica de $f'(x)$ verá que $|f'(x)|$ alcanza un valor mayor en el intervalo $(-2, 1)$ que en el $(1, 3)$. Lo cual implica que las rectas tangentes, y en consecuencia la gráfica, serán más profundas en $(-2, 1)$ que en $(1, 3)$.

## Notaciones alternativas para la derivada

Hemos denotado la función derivada por $f'(x)$, pero hay otras notaciones, cada una con sus ventajas e inconvenientes. Gottfried Leibniz, coinventor del Cálculo, la denotaba $\frac{df}{dx}$ (notación de Leibniz). Si escribimos $y = f(x)$, todas éstas son notaciones alternativas para la derivada:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f(x).$$

La expresión $\frac{d}{dx}$ se dice que es un **operador diferencial** y calcula la derivada de la expresión que se coloque delante de él.

En la sección 2.1 advertimos que aunque $f(x) = |x|$ es continua en todas partes, no tiene recta tangente en $x = 0$ (es decir, no es derivable en $x = 0$). Así, pues, existen funciones continuas no derivables. Es natural preguntarse, en sentido inverso, ¿hay funciones derivables que no sean continuas? La respuesta, negativa, la da el teorema siguiente.

### Teorema 2.1

Si $f(x)$ es derivable en $x = a$, entonces $f(x)$ es continua en $x = a$.

### Demostración

Para demostrar que $f$ es continua en $x = a$ debemos probar que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Para ello basta considerar

$$\lim_{x \to a} [f(x) - f(a)] = \lim_{x \to a} \left[ \frac{f(x) - f(a)}{x - a} (x - a) \right] \quad \text{Multiplicar y dividir por } (x - a)$$

$$= \lim_{x \to a} \left[ \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right] \lim_{x \to a} (x - a)] \quad \text{Teorema 2.3 (iii) de la sección 1.2}$$

$$= f'(a)\,(0) = 0,$$

donde hemos usado la definición alternativa (2.2) de la derivada.

Según el teorema 2.1, si una función **no** es continua en un punto no puede tener derivada en él. Pues bien, tampoco puede existir la derivada en puntos angulosos, como ocurría para la función $f(x) = |x|$ del ejemplo 1.6 en $x = 0$.

### Ejemplo 2.9 Una función no derivable en un punto

Probar que $f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } x < 2 \\ 2x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ no es derivable en $x = 2$.

**Solución** La gráfica (figura 2.19) muestra un punto anguloso en $x = 2$, por lo que esperamos que la derivada no exista en ese punto. Para verificarlo, estudiamos los límites laterales. Para $h > 0$ es $(2 + h) > 2$, así que $f(2 + h) = 2(2 + h)$. Por tanto,

### Notas históricas

**Gottfried Leibniz (1646-1716).** Matemático y filósofo alemán que introdujo gran parte de la notación y de la terminología del Cálculo, que él creó al mismo tiempo que Sir Isaac Newton. Leibniz fue un prodigio. A los 20 años ya era abogado y había publicado artículos de lógica y jurisprudencia. Verdadero hombre del Renacimiento, poseedor de una biblioteca extraordinaria, contribuyó en Política, Filosofía, Teología, Ingeniería, Lingüística, Geología, Arquitectura y Física. En Matemáticas dedujo muchas reglas fundamentales de derivación y promovió el desarrollo del Cálculo gracias a sus extensas comunicaciones por carta. Las notaciones que inventó, lógicas y simples, hacen accesible el Cálculo y apenas han sido mejoradas en los 300 años posteriores. Escribió: «En los símbolos se observa una ventaja en los descubrimientos tanto mayor cuando expresan con brevedad la naturaleza exacta de algo..., con lo cual el esfuerzo del pensamiento disminuye maravillosamente».

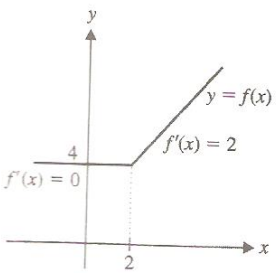



**Figura 2.19**
Un punto anguloso.

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{2(2+h)-4}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{4+2h-4}{h}\qquad\text{Multiplicar y cancelar.}$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{2h}{h}=2.\qquad\text{Cancelar } h.$$

Análogamente, si $h<0$, $(2+h)<2$, luego $f(2+h)=4$, de modo que

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{x\to 0^-}\frac{4-4}{h}=0.$$

Como los límites laterales no son iguales $(0\neq 2)$, $f'(2)$ no existe. Es decir, $f$ no es derivable en $x=2$.

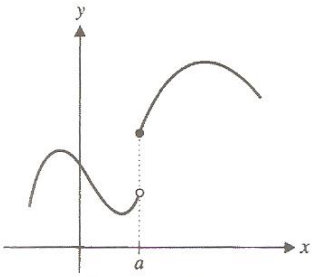



**Figura 2.20a**

Una discontinuidad de salto.

Las figuras 2.20 muestran gráficas de funciones para las que $f'(a)$ no existe por diversas razones. En la figura 2.20a hay una discontinuidad de salto, en la 2.20b una asíntota vertical, en la 2.20c una cúspide y en la 2.20d una tangente vertical.

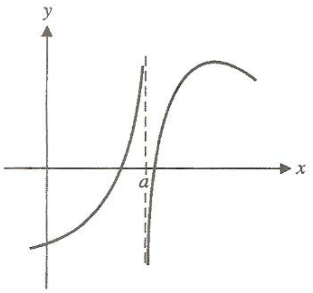



**Figura 2.20b**

Una asíntota vertical.

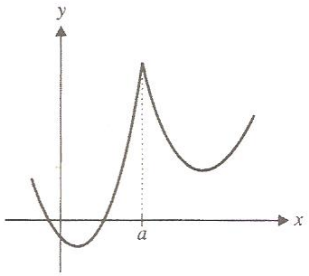



**Figura 2.20c**

Una cúspide.

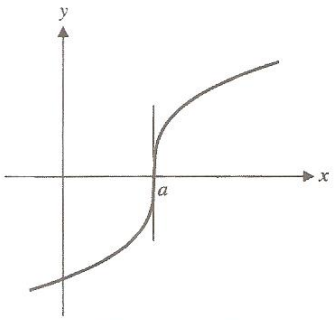



**Figura 2.20d**

Una recta tangente vertical.

## Derivación numérica

En las próximas secciones desarrollaremos reglas que permiten derivar analíticamente casi cualquier función que escribamos. Sin embargo, en las aplicaciones sucede muchas veces que no es posible o no es práctico hallar las derivadas analíticamente. Tal ocurre si no se conoce una expresión para la función, algo frecuente cuando sólo conocemos algunos datos experimentales (una tabla de valores) de una función **desconocida**. Es necesario comprender bien la definición de límite para conseguir estimaciones razonables de la derivada.

### Ejemplo 2.10 Aproximación numérica de la derivada

Estimar numéricamente el valor de la derivada de $f(x)=x^2\sqrt{x^3+2}$ en $x=1$.

**Solución** Veremos más adelante cómo se deriva analíticamente esta función, pero ninguno de los autores tiene el menor deseo de enfrentarse a ella a través de la propia definición como límite.

No obstante, la definición nos dice que la derivada en $x=1$ es el límite de las pendientes de rectas secantes. Calculamos algunas de éstas:

| $h$ | $\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ |
|---|---|
| 0,1 | 4,7632 |
| 0,01 | 4,3714 |
| 0,001 | 4,3342 |

| $h$ | $\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ |
|---|---|
| –0,1 | 3,9395 |
| –0,01 | 4,2892 |
| –0,001 | 4,3260 |

Parece que las pendientes convergen aproximadamente a 4,33 cuando $h$ tiende a 0. Así, pues, proponemos la aproximación $f'(1) \approx 4{,}33$.

### Ejemplo 2.11 Estimación numérica de la velocidad

La tabla muestra las distancias recorridas por un velocista en varios momentos de su carrera. Estimar su velocidad a los 6 segundos.

| $t(s)$ | 5,0 | 5,5 | 5,8 | 5,9 | 6,0 | 6,1 | 6,2 | 6,5 | 7,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(t)$ pies | 123,7 | 141,01 | 151,41 | 154,90 | 158,40 | 161,92 | 165,42 | 175,85 | 193,1 |

**Solución** La velocidad instantánea es el límite de las velocidades medias sobre intervalos de tiempo cuya duración tiende a cero. Podemos calcular las velocidades medias en los intervalos más cortos de que disponemos, entre 5,9 y 6,0 y entre 6,0 y 6,1.

| Intervalo de tiempo | Velocidad media |
|---|---|
| (5,9, 6,0) | 35,0 pies/s |
| (6,0, 6,1) | 35,2 pies/s |

| Intervalo de tiempo | Velocidad media |
|---|---|
| (5,5, 6,0) | 34,78 pies/s |
| (5,8, 6,0) | 34,95 pies/s |
| (5,9, 6,0) | 35,00 pies/s |
| (6,0, 6,1) | 35,20 pies/s |
| (6,0, 6,2) | 35,10 pies/s |
| (6,0, 6,5) | 34,90 pies/s |

Así, pues, proponemos como estimación el promedio, es decir, 35,1 pies/s. Sin embargo, hay más información en los datos restantes. Completemos el cálculo de velocidades medias. De esta segunda tabla cabe aventurar que el velocista alcanzó un pico de velocidad más o menos a los 6 segundos. Por tanto, podemos aceptar la estimación más alta de 35,2 pies/s.

Queremos insistir en que no hay una única respuesta admisible a esta cuestión, ya que los datos son incompletos (sólo conocemos la distancia recorrida en ciertos instantes, no en todo instante).

## EJERCICIOS 2.2

1. La derivada es importante por sus múltiples aplicaciones e interpretaciones. Describir cuatro aspectos de la derivada: gráfico (rectas tangentes), analítico (la función derivada), numérico (aproximaciones) y aplicaciones (velocidad y otras).

2. Los matemáticos utilizan la palabra «suave» para referirse a funciones con ciertas propiedades deseables. En términos gráficos, ¿en qué sentido son más suaves las funciones derivables que las continuas no derivables o que las no continuas?

3. Explicar qué información proporciona la derivada acerca de la función original. En particular, si la derivada es positiva en un punto, ¿qué se deduce sobre la tendencia de la función en ese punto? ¿Y si la derivada es negativa en el punto?

4. En el ejemplo 2.3 vimos que la derivada de $f(x) = 3x - 5$ es $f'(x) = 3$. Explicar, en términos de pendientes, por qué es cierto.

**En los ejercicios 5-8, calcular $f'(a)$ usando los límites (2.1) y (2.2).**

5. $f(x) = 3x + 1, a = 1$
6. $f(x) = 3x^2 + 1, a = 1$
7. $f(x) = \sqrt{3x + 1}, a = 1$
8. $f(x) = \dfrac{3}{x + 1}, a = 2$

**En los ejercicios 9-12, calcular $f'(a)$ usando (2.1) o (2.2).**

9. $f(x) = x^2 + 2x, a = 0$
10. $f(x) = x^2 + 2x, a = 3$
11. $f(x) = x^3 + 4, a = -1$
12. $f(x) = x^4 - 3x, a = -2$

**En los ejercicios 13-20, hallar la función derivada $f'(x)$ usando (2.1) o (2.2).**

13. $f(x) = 3x^2 + 1$
14. $f(x) = x^2 - 2x + 1$

15. $f(x) = \dfrac{3}{x+1}$

16. $f(x) = \dfrac{2}{2x-1}$

17. $f(x) = \sqrt{3x+1}$

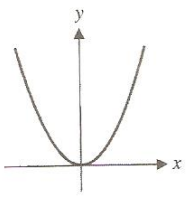
18. $f(x) = 2x + 3$

19. $f(x) = x^3 + 2x - 1$

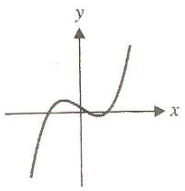
20. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

**En los ejercicios 21-26, emparejar las gráficas de las funciones de la izquierda con las gráficas de sus derivadas, que aparecen (desordenadas) a la derecha.**

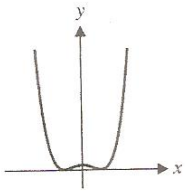
21.



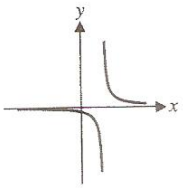

22.



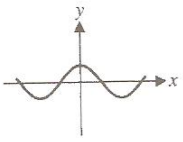

23.



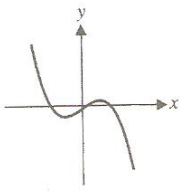

24.



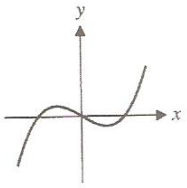

25.



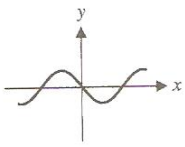

26.



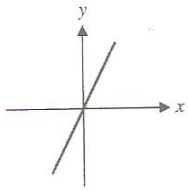

(a)



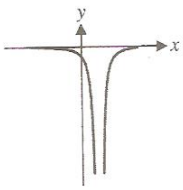

(b)



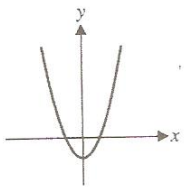

(c)



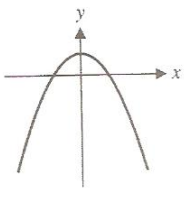

(d)




(e)

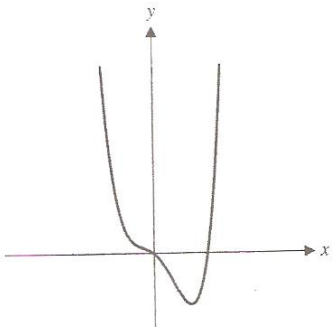



(f)

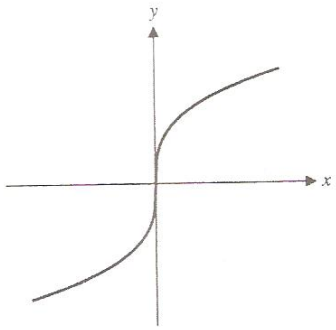



**En los ejercicios 27-30, usar la gráfica de $f(x)$ dada para esbozar la gráfica de $f'(x)$.**

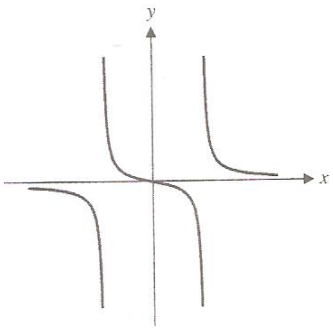
27.



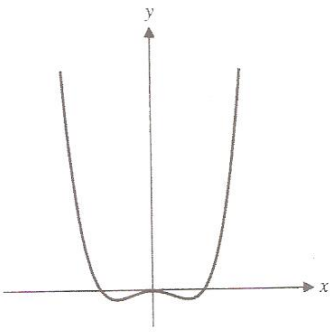

28.




29.

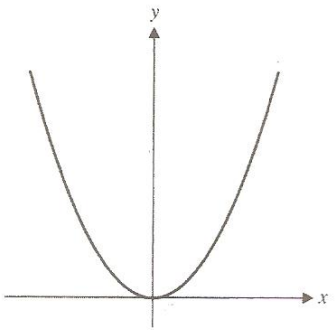



30.

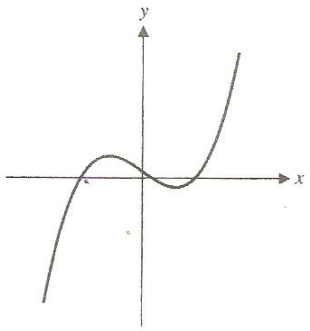


**En los ejercicios 31 y 32, usar la gráfica de $f'(x)$ dada para esbozar una posible gráfica de $f(x)$.**

31.

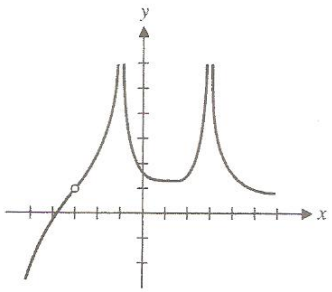



32.

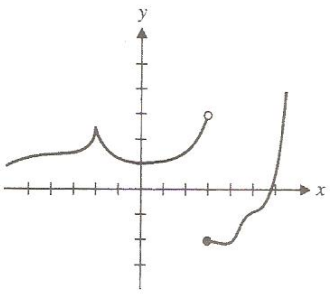



**En los ejercicios 33 y 34, identificar los puntos en los que la función no es derivable.**

33.




34.




**En los ejercicios 35 y 36, estimar la pendiente de la recta tangente en $x = 1$.**

35.

| $x$ | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 1,0 | 1,2 | 1,4 | 1,6 | 1,8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 2,4 | 3,1 | 3,9 | 4,8 | 5,8 | 6,8 | 7,7 | 8,5 | 9,2 |

36.

| $x$ | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 1,0 | 1,2 | 1,4 | 1,6 | 1,8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 4,0 | 4,6 | 5,3 | 6,1 | 7,0 | 7,8 | 8,6 | 9,3 | 9,9 |

**En los ejercicios 37 y 38, usar las distancias $f(t)$ para estimar la velocidad en $t = 2$.**

37.

| $x$ | 1,6 | 1,7 | 1,8 | 1,9 | 2,0 | 2,1 | 2,2 | 2,3 | 2,4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(t)$ | 2,4 | 3,1 | 3,9 | 4,8 | 5,8 | 6,8 | 7,7 | 8,5 | 9,2 |

38.

| $x$ | 1,6 | 1,7 | 1,8 | 1,9 | 2,0 | 2,1 | 2,2 | 2,3 | 2,4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(t)$ | 4,0 | 4,6 | 5,3 | 6,1 | 7,0 | 7,8 | 8,6 | 9,3 | 9,9 |

39. Argumentar gráficamente que $f(x) = x^{2/3}$ es continua en $x = 0$, pero que $f'(0)$ no existe.

40. Probar gráfica y numéricamente que $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ es continua en $x = 0$, pero que $f'(0)$ no existe.

**En los ejercicios 41 y 42, usar un PCS.**

41. Estimar numéricamente $f'(1)$ para $f(x) = x^x$ y verificar el valor obtenido.

42. Estimar numéricamente $f'(\pi)$ para $f(x) = x^{\text{sen } x}$ y verificar el valor obtenido.

**En los ejercicios 43 y 44, calcular la derivada lateral por la derecha $D_+f(0) = \lim_{h \to 0^+} \dfrac{f(h) - f(0)}{h}$ y por la izquierda $D_-f(0) = \lim_{h \to 0^-} \dfrac{f(h) - f(0)}{h}$.**

43. $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x < 0 \\ 3x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

44. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ x^3 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

45. Sea $f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x < 0 \\ k(x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$. Si $f(x)$ es continua en $x = 0$ y $g(x)$ y $k(x)$ son derivables en $x = 0$, demostrar que $D_+f(0) = k'(0)$ y $D_-f(0) = g'(0)$. ¿Qué propiedad es falsa si $f(x)$ tiene en $x = 0$ una discontinuidad de salto?

46. Explicar por qué la derivada $f'(0)$ existe si, y sólo si, las derivadas laterales existen y son iguales.

47. Si $f'(x) > 0$ para todo $x$, usar la interpretación de rectas tangentes para argumentar que $f(x)$ es una **función creciente**, es decir, que $f(a) < f(b)$ siempre que $a < b$.

48. Si $f'(x) < 0$ para todo $x$, usar la interpretación de rectas tangentes para argumentar que $f(x)$ es una **función decreciente**, es decir, que $f(a) > f(b)$ siempre que $a < b$.

49. Un modelo para la difusión de una enfermedad supone que al principio se difunde lentamente, el ritmo de crecimiento de la infección aumenta hasta llegar a un máximo y después ese ritmo disminuye hasta el valor cero, momento que marca el fin de la epidemia. Si $I(t)$ representa el número de personas infectadas en el tiempo $t$, esbozar las gráficas de $I(t)$ y de $I'(t)$, supuesto de que los infectados no se curan.

50. Un modelo de crecimiento de la población urbana supone que al principio la población crece muy deprisa, y entonces el ritmo de crecimiento disminuye hasta que la población comienza a decrecer. Si $P(t)$ representa la población en el tiempo $t$, esbozar las gráficas de $P(t)$ y de $P'(t)$.

51. Dar un contraejemplo que demuestre que esta afirmación no es válida para toda función derivable: si $f(x) \le x$, entonces $f'(x) \le 1$.

52. Discutir si es cierta para toda función derivable esta afirmación: si $f(0) = 0$, $f'(x)$ existe para todo $x$ y además $f(x) \le x$, entonces $f'(x) \le 1$.

**En los ejercicios 53-56, especificar las unidades en que se expresa la función derivada.**

53. $f(t)$ representa una posición medida en metros y $t$ el tiempo en segundos.

54. $c(t)$ representa los gramos de un producto químico y $t$ el tiempo en minutos.

55. $f(x)$ representa la demanda de un producto, en número de unidades, y $x$ el precio en dólares.

56. $p(x)$ representa la masa, en kg, de $x$ metros de una tubería.

57. Los psicólogos estudian cómo piensa el ser humano mediante experimentos del tipo siguiente. ¿Se puede girar ⌜ hasta hacerlo coincidir con ⌞ o con ⌟ ? ¿A qué forma puede girar ¬ ? El tiempo de respuesta parece ser proporcional al ángulo que hay que girar la figura. La conclusión es que realmente giramos en nuestra mente la figura (¿conscientemente?). Si la velocidad de rotación es de 11° por milisegundo (0,001 segundos), ¿cuánto se tarda en identificar correctamente ⌜? ¿ Y ¬? ¿Le ha sido más fácil identificar ¬ ?

58. Hallar las funciones derivadas de $x^2$, $x^3$ y $x^4$. A la vista de la pauta que siguen los resultados, conjeturar una fórmula general para la derivada de $x^n$. Contraste su fórmula en las funciones $\sqrt{x} = x^{1/2}$ y $1/x = x^{-1}$.

59. El recíproco del teorema 2.1 es falso: continua no implica derivable (véase ejemplo 2.9). Este hecho llega a su máxima expresión en la **función de Weierstrass**, que vamos a presentar. Para empezar, represente la función $f_4(x) = \cos x + \frac{1}{2}\cos 3x + \frac{1}{4}\cos 9x + \frac{1}{8}\cos 27x + \frac{1}{16}\cos 81x$ en la ventana $0 \le x \le 2\pi$, $-2 \le y \le 2$. La gráfica tiene varios puntos angulosos en los que la derivada no puede existir. Haga lo mismo con $f_6(x) = f_4(x) + \frac{1}{32}\cos 243x + \frac{1}{64}\cos 729x$ y observe que hay aún más puntos angulosos. Explore las gráficas de $f_{10}(x)$, $f_{14}(x)$, etc., añadiendo más términos. Intente dar soporte gráfico a la idea de que la función de Weierstrass $f_\infty(x)$ es continua para todo $x$ y derivable para ningún $x$. Más evidencia gráfica aporta el carácter fractal de $f_\infty(x)$: compare las gráficas de $f_4(x)$ con $0 \le x \le 2\pi$ y $-2 \le y \le 2$ y $f_6(x) - \cos x - \frac{1}{2}\cos 3x$ con $0 \le x \le \frac{2\pi}{9}$ y $-\frac{1}{2} \le y \le \frac{1}{2}$. Explique por qué las gráficas son idénticas y por qué eso significa que por mucho que se aplique el zoom a la gráfica de la función de Weierstrass continuaremos viendo puntos angulosos y oscilaciones bruscas. En otras palabras, el zoom no muestra jamás una recta tangente.

## 2.3 CÁLCULO DE DERIVADAS: LA REGLA DE LAS POTENCIAS

Ya hemos calculado muchas derivadas usando la definición como límite. Tantas, que probablemente ya haya empezado a buscar atajos por su cuenta. En esta sección continuamos el proceso sugerido en el ejercicio 58 de la sección 2.2.

### La regla de las potencias

En primer lugar, calculamos un par de derivadas muy simples a partir de la definición como límite.

**Teorema 3.1**
Para cualquier constante $c$, $\dfrac{d}{dx}c = 0$.

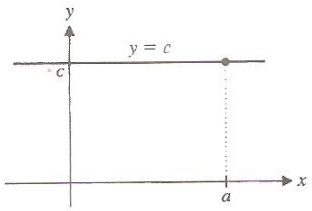



**Figura 2.21**

Una recta horizontal.

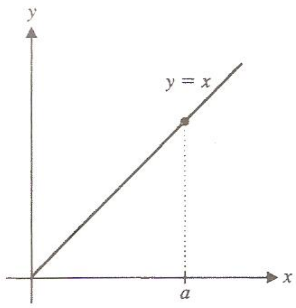



**Figura 2.22**

Recta tangente a $y = x$.

| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| 1 | 0 |
| $x$ | 1 |
| $x^2$ | $2x$ |
| $x^3$ | $3x^2$ |
| $x^4$ | $4x^3$ |

Traducido, el teorema afirma que la recta tangente de cualquier recta horizontal $y = c$ tiene pendiente cero. O sea, que la recta tangente es la propia recta horizontal (figura 2.21).

**Demostración**

Sea $f(x) = c$, para todo $x$. Por la definición (2.3),

$$\frac{d}{dx}\,c = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0.$$

**Teorema 3.2**

$$\frac{d}{dx}\,x = 1.$$

Afirma que la recta tangente a la recta $y = x$ es una recta de pendiente 1 (o sea, $y = x$; véase figura 2.22). Nada sorprendente de nuevo, ya que es evidente que la recta tangente de cualquier recta es ella misma.

**Demostración**

Sea $f(x) = x$. Por la definición (2.3),

$$\frac{d}{dx}\,x = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h) - x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1.$$

La tabla del margen contiene algunas derivadas calculadas con anterioridad, en ejemplos o ejercicios, usando la definición. ¿Observa alguna pauta? La potencia de $x$ en $f'$ es una unidad menor que en $f$. Y además el coeficiente en $f'$ es la potencia de $x$ en $f$.

Parece lógico, por tanto, el resultado que demuestra el próximo teorema.

**Teorema 3.3 (Regla de las potencias)**

Para cualquier entero $n > 0$,

$$\frac{d}{dx}\,x^n = nx^{n-1}.$$

**Demostración**

Por la definición (2.3), si $f(x) = x^n$, entonces

$$\frac{d}{dx}\,x^n = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}. \tag{3.1}$$

Para evaluar el límite simplificamos el numerador. Si $n > 0$, desarrollamos $(x + h)^n$. Recordemos que $(x + h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$ y $(x + h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$. En general, recordemos que el desarrollo del binomio viene dado por

$$(x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}\,x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n. \tag{3.2}$$

Sustituyendo (3.2) en (3.1) se obtiene

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n - x^n}{h}$$ Cancelar los términos $x^n$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h\left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^1 + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1}\right]}{h}$$ Sacar factor común $h$ y cancelar

$$= \lim_{h \to 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^1 + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1}\right] = nx^{n-1},$$

ya que todos los términos, excepto el primero, contienen algún factor $h$.

La regla de las potencias es muy fácil de aplicar, como muestra el ejemplo que sigue.

**Ejemplo 3.1** **Aplicación de la regla de las potencias**

Hallar las derivadas de $f(x) = x^8$ y $g(t) = t^{107}$.

**Solución**

$$f'(x) = \frac{d}{dx}x^8 = 8x^{8-1} = 8x^7.$$

Análogamente,

$$g'(t) = \frac{d}{dt}t^{107} = 107t^{107-1} = 107t^{106}.$$

En la sección 2.2 hemos demostrado que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = \left(-\frac{1}{x^2}\right). \tag{3.3}$$

Y (3.3) se puede reescribir como

$$\frac{d}{dx}x^{-1} = (-1)x^{-2}.$$

Por tanto, la derivada de $x^{-1}$ sigue la misma pauta que marca la regla de las potencias y que hemos demostrado sólo para exponentes enteros **positivos**.

Análogamente, en la sección 2.2 hemos usado la definición para probar que

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \tag{3.4}$$

También (3.4) se puede reescribir de la forma

$$\frac{d}{dx}x^{1/2} = \frac{1}{2}x^{-1/2}.$$

Vemos que la derivada de una potencia racional de $x$ obedece también la pauta de la regla de las potencias que, insistimos, sólo hemos demostrado para exponentes **enteros** positivos.

**Nota 3.1**

Como veremos, la regla de las potencias es válida para cualquier potencia de $x$. La enunciamos en el siguiente teorema. No podremos demostrar la regla general de las potencias hasta más tarde, porque el desarrollo del binomio utilizado en la demostración del teorema 3.3 sirve sólo para exponentes enteros positivos. A pesar de todo, usaremos la regla con libertad para toda potencia de $x$.

**Teorema 3.4 (Regla general de las potencias)**

Para cualquier número real $r$,

$$\frac{d}{dx}x^r = rx^{r-1}. \tag{3.5}$$

**¡Atención!**

No cometa este error, frecuente por desgracia:

$$\frac{d}{dx}x^{-19} \neq -19x^{-18}.$$

La regla de las potencias dice que hay que *restar* 1 al exponente (incluso si el exponente es negativo).

**Nota**

Queda por resolver una cuestión conceptual (que responderemos en el Capítulo 6): ¿qué significa $x^{\pi}$? ¿Qué significa elevar un número real a una potencia no racional?

**Ejemplo 3.2** **Aplicación de la regla general de las potencias**

Hallar la derivada de $\frac{1}{x^{19}}$, $\sqrt[3]{x^2}$ y $x^{\pi}$.

**Solución** De (3.5) se sigue que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^{19}}\right) = \frac{d}{dx}x^{-19} = -19x^{-19-1} = -19x^{-20}.$$

Si reescribimos $\sqrt[3]{x^2}$ como potencia racional de $x$, podemos usar (3.5) para calcular la derivada. Se tiene

$$\frac{d}{dx}\sqrt[3]{x^2} = \frac{d}{dx}x^{2/3} = \frac{2}{3}x^{2/3-1} = \frac{2}{3}x^{-1/3}.$$

Finalmente,

$$\frac{d}{dx}x^{\pi} = \pi x^{\pi-1}.$$

## Reglas básicas de derivación

La regla general de las potencias permite derivar muchas funciones sin necesidad de recurrir a la definición. Las reglas que enunciamos a continuación amplían la clase de funciones derivables directamente sin usar la definición.

**Teorema 3.5**

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones derivables en $x$ y $c$ es una constante, entonces

(i) $\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$,

(ii) $\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = f'(x) - g'(x)$,

(iii) $\frac{d}{dx}[cf(x)] = cf'(x)$.

**Demostración**

Probaremos sólo (i), dejando el resto como ejercicios. Sea $k(x) = f(x) + g(x)$. De acuerdo con la definición (2.3) de la derivada,

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = k'(x) = \lim_{h \to 0}\frac{k(x+h) - k(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0}\frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h}$$ Usar la definición de $k(x)$.

$$= \lim_{h \to 0}\frac{[f(x+h) - f(x)] + [g(x+h) - g(x)]}{h}$$ Agrupar los términos en $f$ y en $g$.

$$= \lim_{h \to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \to 0}\frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$ Identificar las derivadas de $f$ y de $g$.

$$= f'(x) + g'(x).$$

Como ilustración del teorema 3.5, vamos a calcular una derivada paso a paso, con todo detalle.

**Ejemplo 3.3** **Derivada de una suma**

Hallar la derivada de $f(x) = 2x^6 + 3\sqrt{x}$.

**Solución**

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(2x^6) + \frac{d}{dx}(3\sqrt{x}) \qquad \text{Por el teorema 3.5 (i).}$$

$$= 2\frac{d}{dx}(x^6) + 3\frac{d}{dx}(x^{1/2}) \qquad \text{Por el teorema 3.5 (iii).}$$

$$= 2(6x^5) + 3\left(\frac{1}{2}x^{-1/2}\right) \qquad \text{Por la regla de las potencias.}$$

$$= 12x^5 + \left(\frac{3}{2\sqrt{x}}\right). \qquad \text{Multiplicar las constantes.}$$

**Ejemplo 3.4** **Reescritura de una función antes de derivarla**

Hallar la derivada de $f(x) = \dfrac{4x^2 - 3x + 2\sqrt{x}}{x}$.

**Solución** Como no disponemos, de momento, de una regla que permita derivar un cociente, reescribimos $f(x)$ efectuando la división entre $x$:

$$f(x) = \frac{4x^2}{x} - \frac{3x}{x} + \frac{2\sqrt{x}}{x} = 4x - 3 + 2x^{-1/2}.$$

Del teorema 3.5 y de la regla de las potencias se sigue

$$f'(x) = 4\frac{d}{dx}(x) - 3\frac{d}{dx}(1) + 2\frac{d}{dx}(x^{-1/2}) = 4 - 0 + 2\left(-\frac{1}{2}x^{-3/2}\right) = 4 - x^{-3/2}.$$

**Ejemplo 3.5** **Ecuación de una recta tangente**

Hallar una ecuación de la recta tangente a $f(x) = 3 - 4x + \dfrac{2}{x}$ en $x = 1$.

**Solución** Escrita como $f(x) = 3 - 4x + 2x^{-1}$, del teorema 3.5 y la regla de las potencias deducimos

$$f'(x) = 0 - 4 - 2x^{-2} = -4 - 2x^{-2}.$$

En $x = 1$ la pendiente de la recta tangente es, por tanto, $f'(1) = -4 - 2 = -6$. La recta tangente, con pendiente $-6$, pasa por el punto $(1, 1)$, así que tiene ecuación

$$y - 1 = -6(x - 1).$$

La figura 2.23 muestra las gráficas de $y = f(x)$ y de la recta tangente.

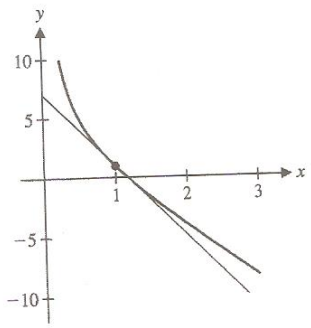



**Figura 2.23**

$y = f(x)$ y la recta tangente en $x = 1$.

## Derivadas de orden superior

Una vez obtenida la función derivada, podemos estar interesados en derivarla a su vez. En efecto, tales derivadas de **orden superior** juegan un papel esencial en las aplicaciones.

Sea $f'(x)$ la función derivada de una función inicial $f(x)$. Supuesto que $f'$ sea derivable, podemos hallar la derivada de $f'(x)$, que se denota por $f''(x)$ y se llama **segunda derivada**

de $f$. Asimismo, si $f''(x)$ es derivable, su derivada es la **tercera derivada** de $f$, denotada por $f'''(x)$, y así sucesivamente. A continuación se indican las notaciones alternativas más comunes empleadas para las cinco primeras derivadas de $f(x)$ [con $y = f(x)$].

| Orden | Notación con primas | Notación de Leibniz |
|---|---|---|
| 1 | $y' = f'(x)$ | $\frac{df}{dx}(x)$ |
| 2 | $y'' = f''(x)$ | $\frac{d^2f}{dx^2}(x)$ |
| 3 | $y''' = f'''(x)$ | $\frac{d^3f}{dx^3}(x)$ |
| 4 | $y^{(4)} = f^{(4)}(x)$ | $\frac{d^4f}{dx^4}(x)$ |
| 5 | $y^{(5)} = f^{(5)}(x)$ | $\frac{d^5f}{dx^5}(x)$ |

El cálculo de estas derivadas de orden superior no difiere del de la primera derivada, como muestra el ejemplo que sigue.

**Ejemplo 3.6** **Derivadas de orden superior**

Calcular cuantas derivadas sea posible de $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 1$.

**Solución**

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(3x^4 - 2x^2 + 1) = 12x^3 - 4x,$$

$$f''(x) = \frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d}{dx}(12x^3 - 4x) = 36x^2 - 4,$$

$$f'''(x) = \frac{d^3f}{dx^3} = \frac{d}{dx}(36x^2 - 4) = 72x,$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{d^4f}{dx^4} = \frac{d}{dx}(72x) = 72,$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{d^5f}{dx^5} = \frac{d}{dx}(72) = 0,$$

y ya a partir de ésta es

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^nf}{dx^n} = 0, \quad \text{para} \quad n \geq 5.$$

## Aceleración

¿Qué información proporciona la segunda derivada? Gráficamente caracteriza la propiedad denominada **concavidad**, que estudiaremos en el Capítulo 3. Y una importante aplicación suya es la aceleración.

La palabra aceleración le resulta familiar, claro está. Como estudiante de Cálculo puede definirla de manera bien simple: **la aceleración es el ritmo de cambio instantáneo de la velocidad**. En consecuencia, si la velocidad de un móvil en el instante $t$ viene dada por $v(t)$, su aceleración es

$$a(t) = v'(t) = \frac{dv}{dt}.$$

En otras palabras, la aceleración es la derivada de la velocidad.

**Ejemplo 3.7** **Aceleración de un paracaidista en caída libre**

Hallar la aceleración de un paracaidista en caída libre cuya altura, $t$ segundos después de saltar del avión, viene dada por $f(t) = 640 - 20t - 16t^2$.

**Solución** Su velocidad es

$$v(t) = f'(t) = 0 - 20 - 32t = -20 - 32t \text{ pies/s}$$

y su aceleración, derivada de la velocidad,

$$a(t) = v'(t) = -32.$$

¿En qué unidades se mide la aceleración? Puesto que la velocidad se mide en pies por segundo y el tiempo en segundos, en pies por segundo en cada segundo, abreviado como pies/s$^2$. Así, pues, la velocidad (negativa, hacia abajo) del paracaidista cambia en –32 pies/s cada segundo. Su módulo (la rapidez) aumenta 32 pies/s en cada segundo a causa de la gravedad..

# EJERCICIOS 2.3

1. Explique a alguien que desconoce la terminología del Cálculo cómo usar automáticamente la regla de las potencias. Decida si es conveniente dar explicaciones separadas para exponentes positivos y negativos, enteros y no enteros y otros casos especiales.

2. Explique los dos primeros términos del desarrollo $(x + h)^n = x^n + nhx^{n-1} + \cdots$, con $n$ entero positivo. Piense, al efectuar el producto $(x + h)(x + h)(x + h) \cdots (x + h)$, ¿cuántos términos contienen $x^n$? ¿Y $x^{n-1}$?

**En los ejercicios 3-22, derivar cada función.**

3. $f(x) = x^3 - 2x + 1$
4. $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + x$
5. $f(x) = 3x^2 - 4$
6. $f(x) = x^9 - 3x^5 + 4x^2 + x$
7. $g(x) = 4$
8. $g(x) = -4$
9. $f(t) = 3t^3 - 2\sqrt{t}$
10. $f(s) = 5\sqrt{s} - 4s^2 + 3$
11. $f(x) = \dfrac{3}{x} - 8x + 1$
12. $f(x) = \dfrac{2}{x^4} - x^3 + 2$
13. $h(x) = \dfrac{10}{\sqrt{x}} - 2x$
14. $h(x) = 12x - x^2 - \dfrac{3}{\sqrt{x}}$
15. $f(s) = 2s^{3/2} - 3s^{-1/3}$
16. $f(t) = 3t^{\pi} - 2t^{1,3}$
17. $f(x) = 2\sqrt[3]{x} + 3$
18. $f(x) = 4x - 3\sqrt[3]{x^2}$
19. $f(x) = x(3x^2 - \sqrt{x})$
20. $f(x) = (x + 1)(3x^2 - 4)$
21. $f(x) = \dfrac{3x^2 - 3x + 1}{2x}$
22. $f(x) = \dfrac{4x^2 - x + 3}{\sqrt{x}}$

**En los ejercicios 23-32, hallar la derivada que se especifica.**

23. $f''(x)$ para $f(x) = x^4 + 3x^2 - 2$
24. $f''(x)$ para $f(x) = x^3 - 6x + \dfrac{2}{x}$
25. $\dfrac{d^2f}{dx^2}$ para $f(x) = x^6 - \sqrt{x}$
26. $\dfrac{d^2f}{dx^2}$ para $f(x) = 2x^4 - \dfrac{3}{\sqrt{x}}$
27. $f'''(t)$ para $f(t) = 4t^2 - 12 + \dfrac{4}{t^2}$
28. $f'''(t)$ para $f(t) = t^6 - 3t^3 + 2$
29. $f^{(4)}(x)$ para $f(x) = x^4 + 3x^2 - 2$
30. $f^{(5)}(x)$ para $f(x) = x^{10} - 3x^4 + 2x - 1$
31. $f'''(x)$ para $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{\sqrt{x}}$
32. $f^{(4)}(t)$ para $f(t) = (t^2 - 1)(\sqrt{t} + t)$

**En los ejercicios 33-36, usar la función posición dada para calcular la función velocidad y la función aceleración.**

33. $s(t) = -16t^2 + 40t + 10$
34. $s(t) = 12t^3 - 6t - 1$
35. $s(t) = \sqrt{t} + 2t$
36. $s(t) = 10 - \dfrac{10}{t}$

**En los ejercicios 37-40, la función representa la altura de un objeto. Calcular su velocidad y su aceleración en el instante $t = a$. El objeto, ¿baja o sube? Su velocidad, ¿crece o decrece?**

37. $h(t) = -16t^2 + 40t + 5, a = 1$
38. $h(t) = -16t^2 + 40t + 5, a = 2$
39. $h(t) = 10t^2 - 24t + 5, a = 2$
40. $h(t) = 10t^2 - 24t + 5, a = 1$

**En los ejercicios 41-44, hallar una ecuación para la recta tangente a $y = f(x)$ en $x = a$.**

41. $f(x) = 4\sqrt{x} - 2x,\ a = 4$

42. $f(x) = x^2 - 2x + 1,\ a = 2$

43. $f(x) = x^2 - 2,\ a = 2$

44. $f(x) = 3x + 4,\ a = 2$

**En los ejercicios 45 y 46, determinar los valores de $x$ para los que la recta tangente a $y = f(x)$ es horizontal. Representar la función y discutir la interpretación gráfica de esos puntos.**

45. $f(x) = x^3 - 3x + 1$

46. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 2$

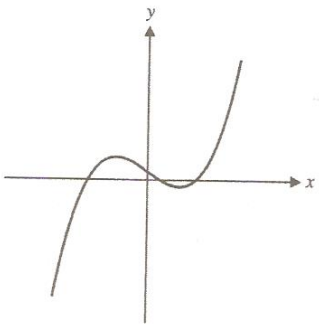
**En los ejercicios 47 y 48, hallar los valores de $x$ en los que la pendiente de la recta tangente a $y = f(x)$ no existe. Representar la función e interpretar gráficamente tales puntos.**

47. $f(x) = x^{2/3}$

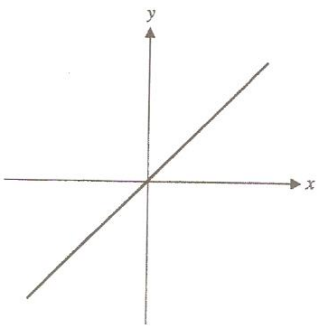
48. $f(x) = x^{1/3}$

**En los ejercicios 49 y 50, una curva representa una función $f(x)$ y las otras dos $f'(x)$ y $f''(x)$. Identificar cuál es cuál.**

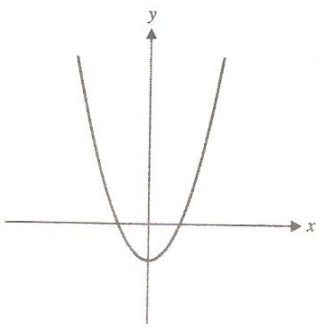
49. (a)



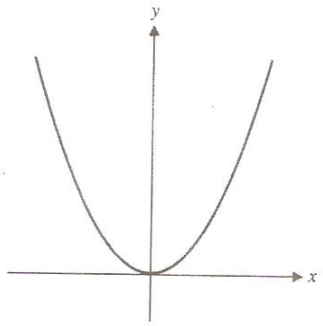

(b)



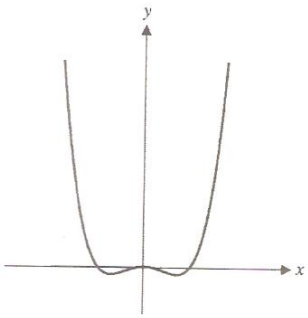

(c)



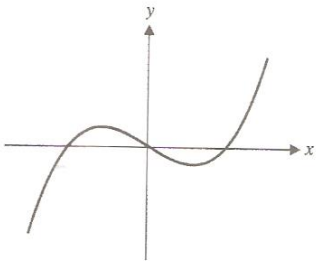

50. (a)




(b)




(c)




**En los ejercicios 51 y 52, hallar una fórmula general para la $n$-ésima derivada $f^{(n)}(x)$.**

51. $f(x) = \sqrt{x}$

52. $f(x) = \dfrac{2}{x}$

53. Hallar un polinomio de segundo grado $ax^2 + bx + c$ tal que $f(0) = -2, f'(0) = 2$ y $f''(0) = 3$.

54. Hallar un polinomio de segundo grado $ax^2 + bx + c$ tal que $f(0) = 0, f'(0) = 5$ y $f''(0) = 1$.

55. Probar que la fórmula $\dfrac{d}{dx}(1) = 0$ es un caso particular de la regla de las potencias. Explicar gráficamente la fórmula más general $\dfrac{d}{dx}(c) = 0$.

56. Probar que la fórmula $\dfrac{d}{dx}(x) = 1$ es un caso particular de la regla de las potencias. Explicar gráficamente la fórmula más general $\dfrac{d}{dx}(cx) = c$.

57. Un político proclama solemnemente: «Hemos logrado reducir el ritmo de crecimiento de la deuda nacional». Si $d(t)$ es la deu-

da nacional, ¿qué derivada de $d(t)$ se ha reducido? ¿Qué se deduce acerca de la magnitud de $d(t)$?

58. Una barra, fabricada con material inhomogéneo, se extiende de $x = 0$ a $x = 4$. La masa de la porción comprendida entre $x = 0$ y $x = t$ viene dada por $m(t) = 3t^2$ kg. Calcular $m'(t)$ y explicar por qué representa la densidad de la barra.

59. Para muchos animales terrestres, la relación entre el grosor $w$ de sus patas y la longitud $b$ de su cuerpo obedece a una ecuación de la forma $\omega = cb^{3/2}$ para alguna constante $c$. Probar que, si $b$ es suficientemente grande, $\omega'(b) > 1$. Concluir que en los animales grandes el grosor de las patas (necesario para soportar el peso) crece más deprisa que el tamaño del cuerpo. ¿Por qué eso impone un límite al tamaño de los animales terrestres?

60. Sea $v(d)$ la velocidad media, en m/s, de la carrera de récord mundial en una distancia de $d$ metros. Por ejemplo, si la carrera de 200 m más rápida se ha hecho en 19,32 s, entonces $v(200) = 200/19{,}32 \approx 10{,}35$. Comparar la función $f(d) = 26{,}7d^{-0.177}$ con los valores de $v(d)$ (que debe buscar por su cuenta) para distancias entre $d = 400$ y $d = 2.000$. Explicar qué representa $v'(d)$.

**En los ejercicios 61-68, hallar una función con la derivada dada.**

61. $f'(x) = 4x^3$

62. $f'(x) = 5x^4$

63. $f'(x) = x^4$

64. $f'(x) = x^5$

65. $f'(x) = 3x - 1$

66. $f'(x) = 4 - x^2$

67. $f'(x) = \sqrt{x}$

66. $f'(x) = \dfrac{1}{x^2}$

69. Un avión vuela a una altura de 2 millas y a 10 millas de distancia de un aeropuerto. Asignando al aeropuerto el punto (0, 0), el avión inicia su descenso en el punto (10, 2) y aterriza.

(a) Esboce la gráfica de una trayectoria razonable $y = f(x)$, donde $y$ denota la altura y $x$ la distancia horizontal al aeropuerto. (¡Reflexione al hacer la figura!).

(b) ¿Qué representa $f'(x)$? (Ayuda: No es la velocidad).

(c) ¿Por qué es conveniente y/o necesario que $f(0) = 0$, $f(10) = 2$, $f'(0) = 0$ y $f'(10) = 0$? El polinomio más sencillo que cumple los requisitos es un polinomio cúbico $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. (*Observación:* cuatro requisitos, cuatro constantes).

(d) Hallar valores de $a$, $b$, $c$ y $d$ que ajusten la trayectoria del avión. (Ayuda: Comience imponiendo $f(0) = 0$ y después $f'(0) = 0$. Resuelva la ecuación con un PCS).

(e) Represente la función resultante. ¿Parece correcta? Imagine que las normas de tráfico aéreo prohíben una derivada de valor $\frac{1}{5}$ o mayor. ¿Por qué podría existir una norma así?

(f) Demostrar que la trayectoria hallada antes es ilegal.

(g) Argumentar que, de hecho, toda trayectoria que satisfaga los cuatro requisitos es ilegal. Por tanto, el descenso debe iniciarse a más de 10 millas de distancia.

(h) Encontrar una trayectoria del aterrizaje que parta de una distancia de 20 millas y sea legal.

70. Daremos una interpretación gráfica de la segunda derivada en el Capítulo 3. Sus aspectos esenciales los puede descubrir en este ejercicio. Resolver, para $f(x) = x^4 - 2x^2 - 1$, las ecuaciones $f'(x) = 0$ y $f''(x) = 0$. ¿Qué representan las soluciones de $f'(x) = 0$? Las soluciones de $f''(x) = 0$ son algo más difíciles de interpretar. Mirando la gráfica de $f(x)$ cerca de $x = 0$, ¿diría que la gráfica se curva hacia arriba o hacia abajo? Calcule $f''(0)$. Ídem para $x = 2$ y $x = -2$. ¿Dónde cambia la gráfica de ser curvada hacia arriba a ser curvada hacia abajo o viceversa? Conjeturar una relación entre $f''(x)$ y la curvatura de la gráfica de $y = f(x)$. Verificar la conjetura ensayando con varias funciones (por ejemplo, con $y = x^4 - 4x^3$).

71. En su magnífico *Surely You're Joking Mr. Feynman*, el físico Richard Feynman cuenta un reto que le enfrentó a la tecnología de aquella época (un ábaco). El reto consistía en calcular la raíz cúbica de 1.729,03. Feynman dio como respuesta 12,002 antes que el experto que manejaba el ábaco. Feynman admite cierta fortuna en la elección de 1.729,03, ya que él sabía que un pie cúbico contiene 1.728 pulgadas cúbicas. Por tanto, la solución era algo mayor que 12. ¿Cómo consiguió tres cifras decimales? «Aprendí en el Cálculo que, para cantidades pequeñas, el exceso en la raíz cúbica es un tercio del exceso en el número. Como el exceso, 1,03 es muy pequeño frente a 2.000, todo cuanto tuve que hacer fue calcular la fracción 1/1.728, dividirla entre 3 y multiplicar por 12». Para ver lo que hizo Feynman, halle una ecuación de la recta tangente a $y = x^{1/3}$ en $x = 1.728$ y calcule la coordenada $y$ de la recta tangente en $x = 1.729{,}03$.

## 2.4 REGLAS DEL PRODUCTO Y DEL COCIENTE

A la vista de las fórmulas para calcular derivadas de sumas y diferencias de funciones, uno espera otras fórmulas que permitan derivar de forma rápida productos y cocientes. Lo primero que uno se pregunta es si la derivada de un producto es igual al producto de las derivadas. Contrastamos esta conjetura en un caso sencillo.

## Regla del producto

Consideremos $\frac{d}{dx}[(x^2)(x^5)]$. Ya sabemos calcular esta derivada si combinamos las dos potencias:

$$\frac{d}{dx}[(x^2)(x^5)] = \frac{d}{dx}x^7 = 7x^6.$$

¿Es igual esto al producto de las derivadas de los dos factores? Como

$$\left(\frac{d}{dx}x^2\right)\left(\frac{d}{dx}x^5\right) = (2x)(5x^4)$$

$$= 10x^5 \neq 7x^6 = \frac{d}{dx}[(x^2)(x^5)] \tag{4.1}$$

salta a la vista que la derivada del producto **no** es el producto de la derivada.

No obstante, sí hay una regla para derivar productos, innecesaria desde luego para derivar productos como el anterior, pero muy útil para hallar derivadas de productos más complicados, como

$$\frac{d}{dx}(x^2 \operatorname{sen} x).$$

Será la única manera de evitar el uso de la definición en términos de límites, método nada recomendable. (En la sección 2.5 nos costó un esfuerzo considerable calcular la derivada de sen $x$, no ya de un producto).

El teorema siguiente establece una regla general para derivar el producto de dos funciones (derivables).

---

**Teorema 4.1 (Regla del producto)**

Si $f$ y $g$ son derivables en $x$,

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x). \tag{4.2}$$

---

**Demostración**

Puesto que deseamos demostrar una regla general nueva, sólo tenemos a nuestra disposición la definición de derivada. Para $p(x) = f(x)g(x)$, se tiene

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = p'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{p(x+h)-p(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}. \tag{4.3}$$

Los ingredientes de las derivadas de $f$ y de $g$ (el límite, $f(x+h)$, $f(x)$, etc.) están presentes, pero no del modo adecuado. Para arreglar las cosas, el truco consiste en sumar y restar $f(x)g(x+h)$ en el numerador.

De (4.3) se deduce

$$p'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

Sumar y restar $f(x)g(x+h)$.

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

Descomponer en dos piezas.

$$= \lim_{h \to 0} \left[ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \, g(x+h) \right] + \lim_{h \to 0} \left[ f(x) \, \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right]$$

$$= \left[ \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] \left[ \lim_{h \to 0} g(x+h) \right] + f(x) \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

Identificar las derivadas de $f$ y $g$.

$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

En el último paso hemos hecho uso de que $f$ y $g$ son derivables para identificar los límites como derivadas. Hay otra sutileza técnica en el último paso. Como $g$ es derivable en $x$, es continua en $x$, por lo que $g(x + h) \to g(x)$ cuando $h \to 0$.

Regresamos a nuestro ejemplo inicial para ilustrar con él la regla del producto.

### Ejemplo 4.1 Una aplicación simple de la regla del producto

Hallar, por medio de la regla del producto, $\dfrac{d}{dx}[(x^2)(x^5)]$.

**Solución** La regla del producto (4.2) da

$$\frac{d}{dx}[(x^2)(x^5)] = \left(\frac{d}{dx}x^2\right)x^5 + x^2\left(\frac{d}{dx}x^5\right)$$
$$= 2x(x^5) + x^2(5x^4)$$
$$= 2x^6 + 5x^6 = 7x^6,$$

que es exactamente lo que ya habíamos obtenido efectuando antes el producto:

$$\frac{d}{dx}[(x^2)(x^5)] = \frac{d}{dx}(x^7) = 7x^6.$$

### Ejemplo 4.2 Aplicación de la regla del producto

Hallar $f'(x)$ para $f(x) = (2x^4 - 3x + 5)\left(x^2 - \sqrt{x} + \dfrac{2}{x}\right)$.

**Solución** Hay dos opciones: efectuar el producto o aplicar la regla del producto. Es más fácil la segunda:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(2x^4 - 3x + 5)\left(x^2 - \sqrt{x} + \frac{2}{x}\right) + (2x^4 - 3x + 5)\frac{d}{dx}\left(x^2 - \sqrt{x} + \frac{2}{x}\right)$$
$$= (8x^3 - 3)\left(x^2 - \sqrt{x} + \frac{2}{x}\right) + (2x^4 - 3x + 5)\left(2x - \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{x^2}\right).$$

La forma de las derivadas obtenidas por la regla del producto es un poco desagradable, ya que las deja «sin simplificar». Pero ¿cómo simplificarlas? Más aún, ¿qué queremos simplificar? Eso depende de lo que vayamos a hacer con la derivada. Por ahora, salvo que haya simplificaciones obvias que salten a la vista, dejaremos el resultado intacto.

### Ejemplo 4.3 Ecuación de una recta tangente

Hallar una ecuación de la recta tangente a

$$y = (x^4 - 3x^2 + 2x)(x^3 - 2x + 3)$$

en $x = 0$.

**Solución** Por la regla del producto,

$$y' = (4x^3 - 6x + 2)(x^3 - 2x + 3) + (x^4 - 3x^2 + 2x)(3x^2 - 2).$$

Evaluando en $x = 0$, se obtiene $y' = (0) = (2)(3) + (0)(-2) = 6$. La recta de pendiente 6 que pasa por el punto (0, 0) [¿por qué (0, 0)?] tiene ecuación $y = 6x$.

## La regla del cociente

Visto lo que sucede con el producto, no cabe esperar que la derivada de un cociente sea igual al cociente de las derivadas. Pero, por si acaso, ensayamos en un ejemplo sencillo. Nótese que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^5}{x^2}\right) = \frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2,$$

mientras que

$$\frac{\frac{d}{dx}(x^5)}{\frac{d}{dx}(x^2)} = \frac{5x^4}{2x^1} = \frac{5}{2}x^3 \neq 3x^2 = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^5}{x^2}\right).$$

Puesto que son distintas, ya es claro que, en efecto, la derivada de un cociente no es igual al cociente de las derivadas.

El próximo teorema establece la regla de derivación de un cociente de funciones (derivables).

**Teorema 4.2**

Sean $f$ y $g$ funciones derivables en $x$, con $g(x) \neq 0$. Entonces

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} \tag{4.4}$$

**Demostración**

Llamando $Q(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, de la definición de derivada se sigue que

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = Q'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{Q(x+h) - Q(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left[\dfrac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)}\right]}{h} \qquad \text{Sumar las fracciones.}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)}\right] \qquad \text{Simplificar.}$$

Igual que en la demostración de la regla del producto, sumamos y restamos en el numerador algo que nos permita aislar las derivadas de $f$ y $g$. Aquí, sumamos y restamos $f(x)g(x)$, con lo que

$$Q'(x) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)} \quad \text{Sumamos y restamos } f(x)\,g(x).$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\,g(x) - f(x)\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}}{g(x+h)g(x)} \quad \text{Agrupamos los dos primeros términos y los dos últimos y sacamos factores comunes}$$

$$= \frac{\lim_{h\to 0}\left[\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]g(x) - f(x)\lim_{h\to 0}\left[\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]}{\lim_{h\to 0} g(x+h)g(x)}$$

$$= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2},$$

donde hemos reconocido las derivadas de $f$ y $g$, y además hemos usado el hecho de que, por ser $g$ derivable, es continua, de modo que

$$\lim_{h\to 0} g(x+h) = g(x).$$

Conviene advertir que el numerador en la regla del cociente recuerda mucho a la regla del producto, pero tiene un signo menos entre los dos términos. Por esa razón, hay que tener cuidado con el orden.

### Ejemplo 4.4 Una aplicación simple de la regla del cociente

Volvamos a nuestro ejemplo de introducción con el fin de ilustrar la regla del cociente. De (4.4) deducimos

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^5}{x^2}\right) = \frac{\dfrac{d}{dx}(x^5)x^2 - x^5\dfrac{d}{dx}(x^2)}{(x^2)^2}$$

$$= \frac{5x^4(x^2) - x^5(2x^1)}{x^4} = \frac{5x^6 - 2x^6}{x^4}$$

$$= \frac{3x^6}{x^4} = 3x^2,$$

como ya sabíamos.

Ni qué decir tiene que no recurriremos a la regla del cociente para hallar una derivada tan fácil como ésa, pero en situaciones más complicadas es ineludible su uso, como ocurre en el ejemplo siguiente.

### Ejemplo 4.5 Aplicación de la regla del cociente

Hallar la derivada de $f(x) = \dfrac{x^2-2}{x^2+1}$.

**Solución** Por la regla del cociente,

$$f'(x) = \frac{\frac{d}{dx}(x^2-2)(x^2+1) - (x^2-2)\frac{d}{dx}(x^2+1)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{2x(x^2+1) - (x^2-2)(2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{6x}{(x^2+1)^2}.$$

En esta ocasión hemos reescrito el numerador porque se consigue una gran simplificación con muy poco esfuerzo.

Ahora que disponemos de la regla del cociente, podemos justificar con ella la regla de las potencias para exponentes enteros negativos. (Recordemos que la hemos venido usando sin demostración desde la sección 2.3).

**Teorema 4.3 (Regla de las potencias)**

Para cualquier exponente entero $n$,

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}.$$

**Demostración**

Ya lo hemos probado para $n$ entero **positivo**, así que suponemos $n < 0$. Llamando $M = -n > 0$, por la regla del cociente obtenemos

$$\frac{d}{dx}x^n = \frac{d}{dx}x^{-M} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^M}\right) \qquad \text{Porque } x^{-M} = \frac{1}{x^M}.$$

$$= \frac{\frac{d}{dx}(1)x^M - (1)\frac{d}{dx}(x^M)}{(x^M)^2} \qquad \text{Regla del cociente.}$$

$$= \frac{(0)x^M - (1)Mx^{M-1}}{x^{2M}} \qquad \text{Regla de las potencias para } M > 0.$$

$$= \frac{-Mx^{M-1}}{x^{2M}} = -Mx^{M-1-2M} \qquad \text{Reglas de los exponentes.}$$

$$= (-M)x^{-M-1} = nx^{n-1}, \qquad \text{Porque } n = -M.$$

donde hemos tenido en cuenta que $\frac{d}{dx}x^M = Mx^{M-1}$, ya que $M > 0$.

**Ejemplo 4.6 Un caso en el que las reglas del producto y del cociente no son necesarias**

Hallar la derivada de $f(x) = x\sqrt{x} + \frac{2}{x^2}$.

**Solución** El primer impulso es aplicar la regla del producto al primer término y la del cociente al segundo. Pero un momento de reflexión indica que podemos simplificar la tarea

reescribiendo la función. (A veces es rentable pensar un poco antes de zambullirse en las reglas de derivación). En notación adecuada de potencias, $f(x)$ adopta la forma

$$f(x) = x\sqrt{x} + \frac{2}{x^2} = x^{3/2} + 2x^{-2}.$$

Y basta usar la regla de las potencias para llegar al resultado

$$f'(x) = \frac{3}{2}\, x^{1/2} - 4x^{-3}.$$

## Aplicaciones

Si hemos introducido las reglas del producto y del cociente es porque se utilizan mucho en las aplicaciones, como tendrá ocasión de comprobar en adelante. Empezamos por un par de aplicaciones sencillas.

### Ejemplo 4.7 Ritmo de cambio de los ingresos

Un producto se vende inicialmente a 25 euros y su precio aumenta 2 euros cada año. Comienza vendiendo 150 (miles de unidades), pero las ventas bajan un 8% anual. ¿A qué ritmo cambian los ingresos totales? ¿Crecen o decrecen?

**Solución** Necesitamos la relación básica

$$\text{ingresos } (I) = \text{cantidad } (C) \times \text{precio } (P)$$

(si se venden 10 unidades a 25 euros, se ingresan 250 euros). Como esas cantidades dependen del tiempo $t$, escribimos la relación como $I(t) = C(t)P(t)$. No disponemos de fórmulas para las tres magnitudes, pero sí de la suficiente información para usar la regla del producto, que da

$$I'(t) = C'(t)P(t) + C(t)P'(t)$$

Conocemos el precio inicial, $P(0) = 25$ (euros), el ritmo de cambio del precio, $P'(0) = +2$ (euros al año), la cantidad inicial, $C(0) = 150$ (miles de unidades) y el ritmo de cambio de la cantidad, $C'(0) = -8$ (miles de unidades al año). El signo negativo de $C'(0)$ indica que $C$ decrece. (Recordemos qué ritmos de cambio negativos corresponden a decrecimiento). Así, pues,

$$I'(0) = (-8)(25) + (150)(2) = +100 \text{ euros por año.}$$

Como el ritmo de cambio es positivo, los ingresos están creciendo. Lo cual es un poco sorprendente, porque el número de unidades vendidas decrece a un ritmo superior al ritmo de crecimiento del precio.

### Ejemplo 4.8 Aplicación de la derivada a los deportes

Una bola de golf de 0,05 kg golpeada por un palo de $m$ kg a 50 m/s adquiere una velocidad inicial $u(m) = \dfrac{83m}{m + 0{,}05}$ m/s. Probar que $u'(m) > 0$ e interpretar este hecho en el contexto del golf. Comparar $u'(0{,}15)$ y $u'(0{,}20)$.

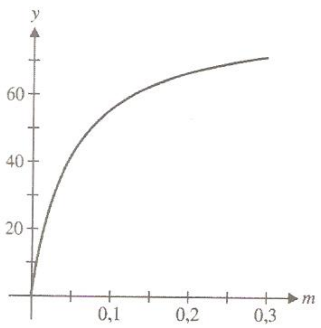



**Figura 2.24**

$$u(m) = \frac{83m}{m + 0{,}05}.$$

**Solución** Por la regla del cociente,

$$u'(m) = \frac{83(m + 0{,}05) - 83\, m}{(m + 0{,}05)^2} = \frac{4{,}15}{(m + 0{,}05)^2}.$$

Numerador y denominador son positivos, así que $u'(m) > 0$. Pendiente positiva de las rectas tangentes implica que $u(m)$ crece al crecer $m$ (figura 2.24). En términos de golf, eso significa que (con todo lo demás constante) cuanto mayor sea la masa del palo, mayor la velocidad de la bola.

Finalmente, evaluamos $u'(0{,}15) = 103{,}75$ y $u'(0{,}20) = 66{,}4$. Eso quiere decir que el ritmo de crecimiento de la velocidad de la bola es mucho menor con el palo más pesado. Puesto que los palos pesados son más difíciles de controlar, el incremento relativamente pequeño que se consigue con él puede no merecer la pena dado lo que se pierde en precisión.

## EJERCICIOS 2.4

1. Gottfried Leibniz inventó el Cálculo al mismo tiempo que Sir Isaac Newton. Muchos métodos básicos y, lo que es tal vez más importante, gran parte de la notación del Cálculo se deben a él. Leibniz descubrió la regla del producto en 1675 en la forma $d(xy) = (dx)y + x(dy)$. Su «demostración», expuesta en una carta de 1699, es como sigue: «Para derivar $xy$ escribimos

$$(x + dx)(y + dy) - xy = x\,dy + y\,dx + dx\,dy.$$

Pero $dx\,dy$ es despreciable, por ser incomparablemente menor que $x\,dy + y\,dx$. Así, pues, en cualquier caso, el error es menor que cualquier cantidad finita». Conteste la carta de Leibniz exponiendo su propio «descubrimiento» de la regla del producto para $d(xyz)$ usando la notación de Leibniz.

2. En el ejemplo 4.2 pusimos en guardia sobre el hecho de multiplicar los términos de la derivada. Para comprender una buena razón, suponga que desea resolver la ecuación $f'(x) = 0$ (cosa que haremos con frecuencia en el Capítulo 3). Explique por qué la forma factorizada de $f'(x)$ resulta útil. Discutir en qué medida la regla del producto produce una forma factorizada.

**En los ejercicios 3-22, derivar cada función.**

3. $f(x) = (x^2 + 3)(x^3 - 3x + 1)$
4. $f(x) = (x^3 - 2x^2 + 5)(x^4 - 3x^2 + 2)$
5. $f(x) = (3x + 4)(x^3 - 2x^2 + x)$
6. $f(x) = (x^2 - 4)(x^4 + 2x + 1)$
7. $f(x) = (\sqrt{x} + 3x)\left(5x^2 - \dfrac{3}{x}\right)$
8. $f(x) = (x^{3/2} - 4x)\left(x^4 - \dfrac{3}{x^2} + 2\right)$
9. $f(x) = \dfrac{3x - 2}{5x + 1}$
10. $f(x) = \dfrac{2x + 5}{5x - 1}$
11. $f(x) = \dfrac{x - 2}{x^2 + x + 1}$
12. $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 5}{x^2 - 5x + 1}$
13. $f(x) = \dfrac{3x - 6\sqrt{x}}{5x^2 - 2}$
14. $f(x) = \dfrac{6x - 2/x}{x^2 + \sqrt{x}}$
15. $f(x) = \dfrac{(x + 1)(x - 2)}{x^2 - 5x + 1}$
16. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 + 5x}$
17. $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 2}{\sqrt{x}}$
18. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$
19. $f(x) = x(\sqrt[3]{x} + 3)$
20. $f(x) = \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{5}{x^2}$
21. $f(x) = (x^2 - 1)\dfrac{x^3 + 3x^2}{x^2 + 2}$
22. $f(x) = (x + 2)\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + x}$
23. Escribir la regla del producto para la función $f(x)g(x)h(x)$. (Ayuda: Agrupar los dos primeros factores). Describir la regla general del producto: con $n$ funciones, ¿cuál es la derivada de $f_1(x)\,f_2(x)\,f_3(x)\,\ldots\,f_n(x)$? ¿Cuántos términos resultan? ¿Cómo es cada término?
24. Probar, con la regla del cociente, que la derivada de $(g(x))^{-1}$ es $-g'(x)(g(x))^{-2}$. A continuación, usar la regla del producto para hallar la derivada de $f(x)(g(x))^{-1}$.

**En los ejercicios 25-30, usar un PCS.**

25. Repetir el ejemplo 4.5 con un PCS. ¿La respuesta es parecida a la del texto o más bien a la del ejercicio 24? Escribir la «regla del cociente» que utiliza el PCS tan completa como sea posible.
26. Repetir el ejemplo 4.6 con un PCS. Si la respuesta no es de la misma forma que la del texto, explicar cómo ha calculado el PCS su respuesta.
27. Repetir el ejercicio 15 con un PCS. Si la respuesta no es de la misma forma que la que aparece al final del texto, explicar cómo ha calculado el PCS su respuesta.
28. Repetir el ejercicio 17 con un PCS. Si la respuesta no es de la misma forma que la que aparece al final del texto, explicar cómo ha calculado el PCS su respuesta.
29. Hallar la derivada de $f(x) = \dfrac{\sqrt{3x^3 + x^2}}{x}$ con un PCS. Comparar la respuesta con $\dfrac{3}{2\sqrt{3x + 1}}$ en $x > 0$ y $\dfrac{-3}{2\sqrt{3x + 1}}$ en $x < 0$. Explique cómo obtener esta respuesta y la de su PCS si ambas difieren entre sí.

30. Hallar la derivada de $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x-2}\left(2x-\dfrac{2x^2}{x+1}\right)$ con un PCS. Comparar la respuesta con 1. Explique cómo obtener esta respuesta y la de su PCS si ambas difieren entre sí.

**En los ejercicios 31-34, derivar la función mediante la regla general del producto desarrollada en el ejercicio 23.**

31. $f(x) = x^{2/3}(x^2 - 2)(x^3 - x + 1)$

32. $f(x) = (x + 4)(x^3 - 2x^2 + 1)(3 - 2/x)$

33. $f(x) = (x + 1)(x^3 + 4x)(x^5 - 3x^2 + 1)$

34. $f(x) = \sqrt{x}(x - 2)(x + 1)(x + 5)$

35. Las unidades $C(t)$ vendidas de cierto juguete decrecen a un ritmo del 4%. Explicar por qué eso se traduce en que $C'(t) = -0{,}04\,C(t)$. Si el precio $P(t)$ sube a un ritmo del 3%, escribir una ecuación análoga para $P'(t)$ en términos de $P(t)$. Los ingresos por su venta son $I(t) = C(t)P(t)$. Sustituyendo las expresiones de $C'(t)$ y $P'(t)$ en la regla del producto $I'(t) = C'(t)P(t) + C(t)P'(t)$, probar que los ingresos decrecen a un ritmo del 1%. Explicar por qué esto era «obvio».

36. En el ejercicio 35, ¿a qué ritmo debe subir el precio para mantener constantes los ingresos?

37. Se venden 20.000 unidades de un objeto, a 20 euros la unidad. Si el precio aumenta a un ritmo de 1,25 euros al año y las ventas disminuyen en 2.000 unidades al año, ¿a qué ritmo crecen los ingresos?

38. Se venden 12.000 unidades de un objeto a 14 euros la unidad. La fábrica quiere aumentar las ventas en 1.200 unidades al año y, al mismo tiempo, aumentar los ingresos en 20.000 euros anuales. ¿A qué ritmo debe subir el precio?

39. En el ejemplo 4.8 es razonable pensar que la velocidad del impacto disminuye al crecer el peso del palo. Así, si la velocidad del palo de masa $m$ es $v = 8{,}5/m$ m/s en el momento del impacto, la velocidad inicial de la bola será $u(m) = \dfrac{14{,}11}{m + 0{,}05}$ metros por segundo. Probar que $u'(m) < 0$ e interpretarlo en el contexto del problema.

40. En el ejemplo 4.8, si el palo tiene masa 0,17 kg y golpea la bola con velocidad $v$ m/s, la velocidad inicial que adquiere la bola es $u(v) = \dfrac{0{,}2822v}{0{,}217}$ m/s. Calcular e interpretar la derivada $u'(v)$.

41. Sea $F(x) = f(x)g(x)$, con $f$ y $g$ infinitamente derivables (o sea, $f$ y $g$ tienen derivadas superiores de todos los órdenes). Demostrar que $F''(x) = f''(x)g(x) + 2f'(x)g'(x) + f(x)g''(x)$. Hallar $F'''(x)$. Comparar $F''(x)$ con la fórmula del binomio para $(a + b)^2$ y $F'''(x)$ con la fórmula para $(a + b)^3$.

42. Sabiendo que $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$, escribir una fórmula para $F^{(4)}(x)$. (Véase ejercicio 41).

43. Usando la regla del producto, probar que si $g(x) = [f(x)]^2$ y $f(x)$ es derivable, entonces $g'(x) = 2f(x)f'(x)$. Esto es un ejemplo de la **regla de la cadena**, que discutiremos en la sección 2.7.

44. Usando la regla del producto y el ejercicio 43, demostrar que si $g(x) = [f(x)]^3$ y $f(x)$ es derivable, entonces $g'(x) = 3[f(x)]^2 f'(x)$. Conjeturar la regla de la cadena para la derivada de $[f(x)]^n$.

45. La relación entre la presión $P$, el volumen $V$ y la temperatura $T$ de un gas o líquido viene dada por la **ecuación de Van der Waals** $\left(P + \dfrac{n^2a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$, donde $a$, $b$, $n$ y $R$ son constantes positivas. Despejar $P$ en esa ecuación. Tomando $T$ como constante y $V$ como variable, hallar el punto crítico $(T_c, P_c, V_c)$ en el que $P'(V) = P''(V) = 0$. (Ayuda: No resuelva las dos ecuaciones por separado; sustituya la solución de una en la otra).
A temperaturas por encima de $T$, la sustancia sólo puede existir en estado gaseoso; por debajo de $T$ es gas o líquido, dependiendo de la presión y del volumen. Para el agua, $R$ = 0,08206 l-atm/mo-K, $a$ = 5,464 l$^2$-atm/mo$^2$ y $b$ = 0,03049 l/mo. Calcular la temperatura máxima a la que $n = 1$ mol de agua puede existir en estado líquido. (Nota: Su respuesta estará en grados Kelvin. Reste 273,15 para expresarla en grados Celsius).

46. En muchos deportes el golpeo de una bola es esencial. Supongamos que antes de la colisión la bola, de peso $w$, tiene velocidad $v$ y la raqueta (o palo, bate...), de peso $W$, tiene velocidad $-V$ (signo negativo porque se mueve en sentido contrario al de la bola). Tras el golpe, la velocidad de la bola es
$$u = \frac{WV(1 + c) + v(cW - w)}{W + w}.$$
El parámetro $c$, llamado **coeficiente de restitución**, representa la «capacidad de rebote» de la bola. Tratando $W$ como variable independiente y los demás parámetros como constantes, calcular la derivada y verificar que
$$\frac{du}{dW} = \frac{V(1 + c)w + cvw + vw}{(W + w)^2} \geq 0,$$
ya que todos los parámetros son = 0. Explicar por qué eso significa que si el deportista utiliza un objeto más pesado la velocidad de la bola aumenta. ¿Se ajusta esto a su intuición? ¿Qué hay de dudoso en la hipótesis de que los demás parámetros se mantienen constantes?
Análogamente, calcular e interpretar $\dfrac{du}{dw}$, $\dfrac{du}{dv}$, $\dfrac{du}{dV}$ y $\dfrac{du}{dc}$.
(Ayuda: $c$ está entre 0 [bola muerta] y 1 [la bola más viva posible]).

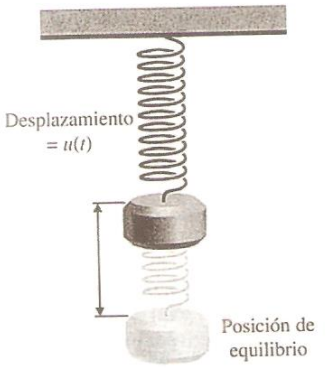



**Figura 2.25**

Sistema muelle-masa.

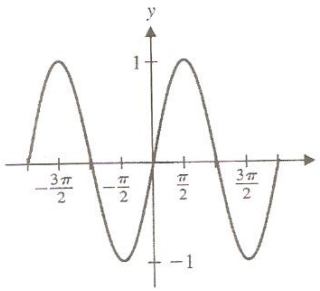



**Figura 2.26a**

$y = \operatorname{sen} x$.

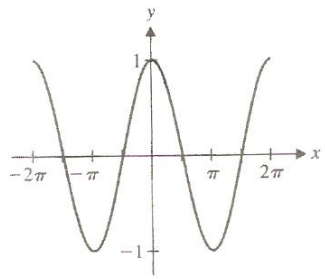



**Figura 2.26b**

La derivada de $f(x) = \operatorname{sen} x$.

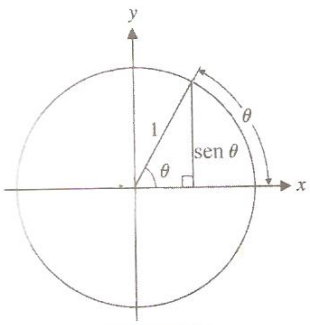



**Figura 1.7a**

Definición de sen $\theta$.

## 2.5 DERIVADAS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Los muelles son fundamentales en muchos sistemas mecánicos sensibles, como la suspensión de un automóvil. Si tiramos hacia abajo de un peso suspendido de un muelle (figura 2.25) y lo soltamos, el peso empieza a subir y bajar cada vez con menos amplitud, hasta quedar en reposo (en equilibrio). La descripción de su movimiento no es posible con las funciones algebraicas en las que hemos centrado nuestra atención hasta ahora.

Vamos a registrar el desplazamiento vertical del peso respecto de su posición de equilibrio. Lo consideramos positivo hacia arriba y negativo hacia abajo (figura 2.25). Al estirar el muelle hacia abajo, el desplazamiento es negativo. A continuación el peso sube hasta un desplazamiento positivo, baja hasta uno negativo, etc. En períodos cortos de tiempo, el movimiento es casi periódico. ¿Qué funciones son capaces de describir este movimiento oscilatorio?

Las únicas, entre las que conocemos, son el seno y el coseno (cualquiera de ellas, ya que la gráfica de una de ellas es traslación horizontal de la otra). De hecho, las funciones seno y coseno se utilizan mucho en la descripción de fenómenos oscilatorios. En esta sección hallaremos las derivadas de estas y de otras funciones trigonométricas.

Las gráficas permiten adivinar cómo serán las derivadas de sen $x$ y cos $x$. La gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ (figura 2.26a) tiene tangente horizontal en $x = -3\pi/2$, $-\pi/2$, $\pi/2$ y $3\pi/2$ y, en consecuencia, derivada 0. Las rectas tangentes tienen pendiente positiva en $-2\pi < x < -3\pi/2$, negativa en $-3\pi/2 < x < -\pi/2$, y así sucesivamente. En cada uno de esos intervalos la gráfica parece tener máxima pendiente hacia la mitad: por ejemplo, desde $x = -\pi/2$ la gráfica se hace cada vez más pendiente hasta $x = 0$, donde empieza a disminuir su pendiente hasta volver a ser horizontal en $x = \pi/2$. Por tanto, un esbozo de la derivada debe ser algo parecido a la figura 2.26b.

Recuerda mucho a la gráfica de $y = \cos x$. Y, en efecto, pronto demostraremos que es la gráfica de $y = \cos x$. En los ejercicios se pide efectuar un análisis similar para conjeturar que la derivada de $f(x) = \cos x$ es $-\operatorname{sen} x$.

Antes de embarcarnos en la derivación de las funciones trigonométricas, calculamos algunos límites importantes relacionados con ellas. (Los llamamos *lemas* por ser resultados auxiliares en la demostración de otros más relevantes). En seguida comprenderá por qué tenemos que detenernos en su estudio.

**Lema 5.1**

$$\lim_{\theta \to 0} \operatorname{sen} \theta = 0$$

Mirando la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$, es más que razonable. Y, de hecho, lo hemos usado ya antes, aunque sin demostración.

**Demostración**

En la figura 2.27, considerada para $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$, vemos que

$$0 \leq \operatorname{sen} \theta \leq \theta \tag{5.1}$$

Es fácil probar que

$$\lim_{\theta \to 0^+} 0 = 0 = \lim_{\theta \to 0^+} \theta. \tag{5.2}$$

Por el teorema del encaje (sección 2.1), de (5.1) y (5.2) se sigue que también

$$\lim_{\theta \to 0^+} \operatorname{sen} \theta = 0.$$

Del mismo modo, se demuestra (queda como ejercicio) que

$$\lim_{\theta \to 0^-} \operatorname{sen} \theta = 0.$$

Como los límites laterales son iguales, concluimos que

$$\lim_{\theta \to 0} \operatorname{sen} \theta = 0.$$

**Lema 5.2**

$$\lim_{\theta \to 0} \cos \theta = 1.$$

La demostración se deduce directamente del lema 5.1 y del teorema de Pitágoras. La dejamos como ejercicio.

En la sección 1.1 se conjeturó que el próximo resultado era cierto (sobre la base de una gráfica y algunos cálculos). Ahora estamos en condiciones de probarlo.

**Lema 5.3**

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} = 1.$$

**Demostración**

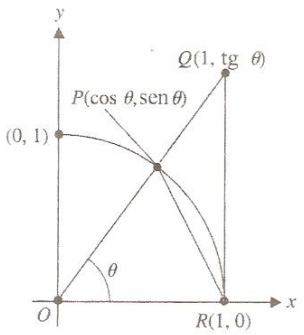



**Figura 2.28a**

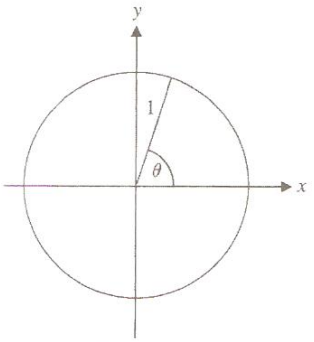



**Figura 2.28b**
Un sector circular.

Suponemos $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$.

Comparando en la figura 2.28a las áreas del sector circular $OPR$ y las de los triángulos $OPR$ y $OQR$, se ve que

$$0 < \text{Área } \triangle OPR < \text{Área sector } OPR < \text{Área } \triangle OQR \tag{5.3}$$

Asimismo, vemos en la figura 2.28b que

$$\text{Área sector } OPR = \pi(\text{radio})^2 \text{ (fracción de círculo incluida)}$$

$$= \pi(1^2)\frac{\theta}{2\pi} = \frac{\theta}{2}. \tag{5.4}$$

Además,

$$\text{Área } \triangle OPR = \frac{1}{2}(\text{base})\,(\text{altura}) = \frac{1}{2}(1)\operatorname{sen}\theta \tag{5.5}$$

y

$$\text{Área } \triangle OQR = \frac{1}{2}(1)\tan\theta. \tag{5.6}$$

Así, pues, de (5.3), (5.4), (5.5) y (5.6) se sigue que

$$0 < \frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta < \frac{\theta}{2} < \frac{1}{2}\tan\theta. \tag{5.7}$$

Dividiendo (5.7) entre $\dfrac{1}{2}\operatorname{sen}\theta$ (esta cantidad es positiva, por lo que las desigualdades se mantienen), queda

$$1 < \frac{\theta}{\operatorname{sen}\theta} < \frac{\operatorname{tg}\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{1}{\cos\theta}.$$

Tomando inversos (recordemos de nuevo que aquí todo es positivo), se obtiene

$$1 > \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} > \cos\theta. \tag{5.8}$$

Probar como ejercicio que la desigualdad (5.8) es válida también si $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$.
Finalmente, nótese que

$$\lim_{\theta\to 0} \cos\theta = 1 = \lim_{\theta\to 0} 1.$$

En consecuencia, de (5.8) y del teorema del encaje se sigue que también

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1.$$

Todavía necesitamos otro límite antes de calcular las derivadas de las funciones trigonométricas.

**Lema 5.4**

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{1-\cos\theta}{\theta} = 0.$$

La gráfica de la figura 2.29 y una tabla de valores de la función $y = \dfrac{1-\cos x}{x}$ le convencerán de que ese valor del límite es razonable.

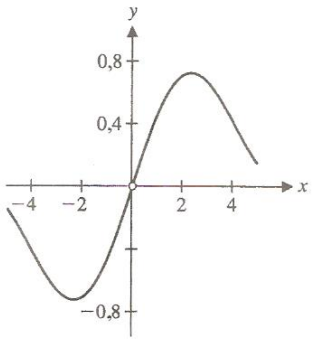



**Figura 2.29**

$y = \dfrac{1-\cos x}{x}$.

| $x$ | $\dfrac{1-\cos x}{x}$ |
|---|---|
| 0,1 | 0,04996 |
| 0,01 | 0,00499996 |
| 0,001 | 0,0005 |
| 0,0001 | 0,00005 |

| $x$ | $\dfrac{1-\cos x}{x}$ |
|---|---|
| − 0,1 | − 0,04996 |
| − 0,01 | − 0,00499996 |
| − 0,001 | − 0,0005 |
| − 0,0001 | − 0,00005 |

Con ese soporte intuitivo afrontamos la demostración.

**Demostración**

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{1-\cos\theta}{\theta} = \lim_{\theta\to 0} \left(\frac{1-\cos\theta}{\theta}\right)\left(\frac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta}\right)$$

Multiplicamos numerador y denominador por $1+\cos\theta$.

$$= \lim_{\theta\to 0} \frac{1-\cos^2\theta}{\theta(1+\cos\theta)}$$

Efectuamos la multiplicación en el numerador y en el denominador.

$$= \lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\theta(1+\cos\theta)}$$

Porque $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$.

$$= \lim_{\theta\to 0} \left[\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}\right)\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta}\right)\right]$$

$$= \left(\lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}\right)\left(\lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta}\right)$$

Separamos en dos, ya que ambos límites existen.

$$= (1)\left(\frac{0}{1+1}\right) = 0,$$

tal como se había anunciado.

Por fin estamos en disposición de hallar las derivadas de las seis funciones trigonométricas.

---

**Teorema 5.1**

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x.$$

---

**Demostración**

Aplicamos a $f(x) = \operatorname{sen} x$ la definición de la derivada.

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen}(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cos h + \operatorname{sen} h \cos x - \operatorname{sen} x}{h}$$

Usamos la identidad trigonométrica $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\beta \cos\alpha$.

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cos h - \operatorname{sen} x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} h \cos x}{h}$$

Separamos los términos con sen $x$ o sen $h$.

$$= \operatorname{sen} x = \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x = \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h}$$

Sacamos factor común sen $x$ del primer término y cos $x$ del segundo.

$$= \operatorname{sen} x\,(0) + \cos x\,(1) = \cos x,$$

donde hemos usado los lemas 5.3 y 5.4.

---

**Teorema 5.2**

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x.$$

---

Dejamos su demostración como ejercicio.

Para las restantes funciones trigonométricas, partimos de las derivadas de sen $x$, cos $x$ y usamos la regla del cociente.

---

**Teorema 5.3**

$$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x.$$

---

**Demostración**

Aplicamos la regla del cociente a $f(x) = \tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$:

$$\frac{d}{dx}\tan x = f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)$$

$$= \frac{\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x)(\cos x) - (\operatorname{sen} x)\frac{d}{dx}(\cos x)}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos x(\cos x) - \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x)}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{(\cos x)} = \frac{1}{(\cos x)^2} = \sec^2 x,$$

donde hemos hecho uso de las derivadas, ya conocidas, de sen $x$ y cos $x$ (teoremas 5.1 y 5.2).

Las derivadas de las demás funciones trigonométricas, recogidas a continuación, se dejan como ejercicios.

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x \qquad \frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x \cot$$

El próximo ejemplo muestra dónde es necesaria la regla del producto.

### Ejemplo 5.1 Una derivada que requiere la regla del producto

Hallar la derivada de $f(x) = x^5 \cos x$.

**Solución** Aplicando la regla del producto, se obtiene

$$\frac{d}{dx}(x^5 \cos x) = \frac{d}{dx}(x^5)\cos x + x^5 \frac{d}{dx}(\cos x)$$

$$= 5x^4 \cos x - x^5 \operatorname{sen} x.$$

### Ejemplo 5.2 Cálculo de algunas derivadas rutinarias

Derivar las funciones (a) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$ y (b) $g(x) = 4 \tan x - 5 \operatorname{cosec} x$.

**Solución** (a) Reescribimos la función como $f(x) = (\operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} x)$ y aplicamos la regla del producto.

$$f'(x) = \cos x \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x \cos x = 2 \operatorname{sen} x \cos x.$$

(Será más fácil de calcular mediante la regla de la cadena, que presentaremos en la sección 2.7).

(b) En este caso,

$$g'(x) = 4 \sec^2 x + 5 \operatorname{cosec} x \cot x.$$

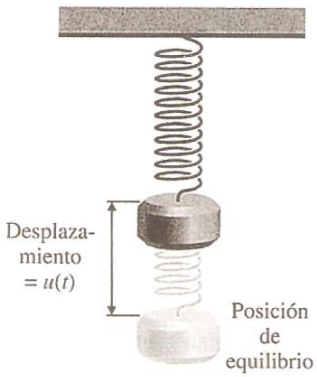



**Figura 2.30**
Sistema muelle-masa.

## Aplicaciones

Las funciones trigonométricas son indispensables, ya que aparecen de manera natural en muchos problemas físicos de interés.

La Física enseña que el desplazamiento vertical de un peso suspendido de un muelle, en ausencia de rozamiento (o sea, despreciando la resistencia del aire u otras causas de resistencia al movimiento), viene dado por

$$u(t) = a\cos(wt) + b\,\text{sen}(wt),$$

donde $w$ es la frecuencia, $t$ el tiempo, $a$ y $b$ constantes (figura 2.30).

### Ejemplo 5.3 Análisis de un sistema muelle-masa

Supongamos que el desplazamiento (en cm) de un peso suspendido de un muelle, $t$ segundos después de soltarlo, viene dado por

$$u(t) = 10\cos t.$$

Hallar su velocidad en todo instante $t$ y la máxima velocidad que alcanza.

**Solución** Como $u(t)$ representa la posición (desplazamiento vertical, en este caso), la velocidad viene dada por su derivada

$$u'(t) = 10\,(-\text{sen}\ t) = -10\,\text{sen}\ t,$$

que se mide en cm/s. Pero sen $t$ oscila entre $-1$ y 1, así que el máximo valor que puede tomar $u'(t)$ es $-10(-1) = 10$ cm/s. Eso ocurre cuando sen $t = -1$, es decir, cuando $t = 3\pi/2$, $t = 7\pi/2$, etc. En todos esos instantes es $u(t) = 0$, de manera que el peso se mueve más rápido cuando pasa por la posición de equilibrio.

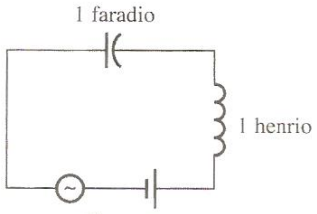



**Figura 2.31**
Un circuito simple.

### Ejemplo 5.4 Análisis de un circuito eléctrico simple

En el circuito de la figura 2.31, la capacitancia es 1 (faradio), la inductancia es 1 (henrio) y el voltaje $2t^2$ (voltios) en el instante $t$. Un modelo para la carga total $Q(t)$ del circuito, en el instante $t$, viene dado por

$$Q(t) = 2\,\text{sen}\ t + 2t^2\ \text{(culombios)}$$

La intensidad de corriente se define como el ritmo de cambio de la carga, esto es,

$$I(t) = \frac{dQ}{dt}\ \text{(amperios)}$$

Comparar las intensidades en $t = 0$ y $t = 1$.

**Solución** En todo instante $t$,

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = 2\cos t + 4t\ \text{(amperios)}.$$

En $t = 0$, $I(0) = 2$ amperios. Y en $t = 1$,

$$I(1) = 2\cos 1 + 4 \approx 5{,}08\ \text{(amperios)}.$$

Esto representa un incremento del

$$\frac{I(1) - I(0)}{I(0)}\,(100)\% \approx \frac{3{,}08}{2}\,(100)\% = 154\%.$$

**Ejemplo 5.5** **Ecuación de una recta tangente**

Hallar una ecuación de la recta tangente a

$$y = 3\tan x - 2\operatorname{cosec} x$$

en $x = \dfrac{\pi}{3}$.

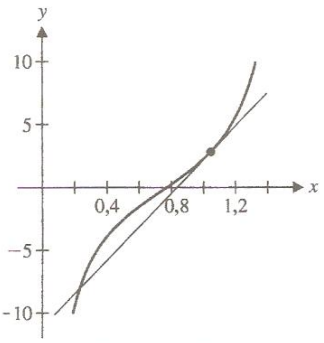



**Figura 2.32**
$y = 3\tan x - 2\operatorname{cosec} x$ y la recta tangente en $x = \dfrac{\pi}{3}$.

**Solución** La derivada es

$$y' = 3\sec^2 x - 2(-\operatorname{cosec} x \cot x) = 3\sec^2 x + 2\operatorname{cosec} x \cot x.$$

En $x = \dfrac{\pi}{3}$, es

$$y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3(2)^2 + 2\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 12 + \frac{4}{3} = \frac{40}{3} \approx 13{,}33333.$$

La recta tangente, con pendiente $\dfrac{40}{3}$ y punto de tangencia $\left(\dfrac{\pi}{3}, 3\sqrt{3} - \dfrac{4}{\sqrt{3}}\right)$, tiene ecuación

$$y = \frac{40}{3}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 3\sqrt{3} - \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

La figura 2.32 muestra la gráfica de la función y la recta tangente.

# EJERCICIOS 2.5

1. Las curvas de la función seno se suelen dibujar muy pendientes y redondeadas. A la vista de los resultados de esta sección, discutir la forma verdadera de la curva seno. Partiendo de (0, 0), ¿con qué pendiente hay que iniciar la gráfica? ¿Dónde es más pendiente? ¿En qué zonas es casi recta y en cuáles es muy curvada?

2. En cuanto aparece en Física e Ingeniería, el término sen $x$ suele dificultar los cálculos. Una simplificación de uso común consiste en sustituir sen $x$ por $x$, acompañando el comentario «sen $x$ es aproximadamente igual a $x$ para ángulos pequeños».
   (a) Discutir esta aproximación en términos de la recta tangente a $y = \operatorname{sen} x$ en $x = 0$.
   (b) ¿Cómo de «pequeño» ha de ser el ángulo para que la aproximación sea buena?
   (c) La recta tangente a $y = \cos x$ en $x = 0$ es simplemente $y = 1$, pero la simplificación «cos $x$ es aproximadamente igual a 1 para ángulos pequeños» casi nunca se usa. ¿Por qué esa aproximación sería menos útil que sen $x \approx x$?

3. Efectuar un análisis gráfico análogo al del texto para argumentar que la derivada de cos $x$ es – sen $x$.

4. En la demostración de $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x$, ¿dónde hemos utilizado la hipótesis de que $x$ se mide en radianes? Si tiene acceso a un PCS, calcule la derivada de sen $x°$. Explicar de dónde sale el factor $\pi/180$.

**En los ejercicios 5-24, hallar la derivada de la función.**

5. $f(x) = 4\operatorname{sen} x - x$
6. $f(x) = x^2 + 2\cos x$
7. $f(x) = \tan x - \operatorname{cosec} x$
8. $f(x) = 4\sec x - 3\cot x$
9. $f(x) = x\cos x$
10. $f(x) = 4x^2 - 3\tan x$
11. $f(x) = 4\sqrt{x} - 2\operatorname{sen} x$
12. $f(x) = 3\sec x \tan x$
13. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$
14. $f(x) = \dfrac{x^2}{\operatorname{cosec} x}$
15. $f(t) = \operatorname{sen} t \sec t$
16. $f(t) = \sqrt{\cos t \sec t}$
17. $f(x) = \dfrac{\cos x - 1}{x^2}$
18. $f(x) = \dfrac{\tan x}{x^2}$
19. $f(x) = 2\operatorname{sen} x \cos x$
20. $f(x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$
21. $f(x) = 4x^2 \tan x$
22. $f(x) = \dfrac{\tan x}{\operatorname{sen} x}$
23. $f(x) = 4\operatorname{sen}^2 x + 4\cos^2 x$
24. $f(x) = 2\tan^2 x$

**En los ejercicios 25-28, usar un PCS o una calculadora gráfica.**

25. Repita el ejercicio 19 con su PCS. Si la respuesta no coincide con la del final del texto, explique cómo ha calculado su PCS la respuesta.

26. Repita el ejercicio 23 con su PCS. Si la respuesta no coincide con la del final del texto, explique cómo ha calculado su PCS la respuesta.

27. Calcule la derivada de $f(x) = 2\ \text{sen}^2 x + \cos 2x$ con un PCS y compare la respuesta con 0. Si difieren, explique cómo obtener ambas.

28. Calcule la derivada de $f(x) = \dfrac{\tan x}{\text{sen } x}$ con un PCS y compare la respuesta con $\sec x \tan x$. Si difieren, explique cómo obtener ambas.

**En los ejercicios 29-32, hallar una ecuación para la recta tangente a $y = f(x)$ en $x = a$.**

29. $f(x) = \text{sen } x,\ a = \dfrac{\pi}{2}$ 30.. $f(x) = \tan x,\ a = 0$

31. $f(x) = \cos x,\ a = \dfrac{\pi}{2}$ 32. $f(x) = x \text{ sen } x,\ a = \dfrac{\pi}{2}$

**En los ejercicios 33-36, usar la función posición dada para hallar la velocidad en el instante $t = a$.**

33. $s(t) = t^2 - \text{sen } t,\ a = 0$ 34. $s(t) = t \cos t,\ a = 0$

35. $s(t) = \dfrac{\cos t}{t},\ a = \pi$ 36. $s(t) = 4 + 3 \text{ sen } t,\ a = \pi$

37. Un objeto se mueve por una circunferencia de radio 1 a velocidad constante y en sentido contrario al de las agujas de un reloj. Si tarda $2\pi$ segundos en dar una vuelta, explicar por qué su coordenada $x$ admite el modelo $x(t) = \cos t$. ¿Cómo se expresa su coordenada $y$?
Argumentar qué es lo que cambiaría:
(a) si el radio fuera 3,
(b) si invirtiera $\pi$ segundos en dar una vuelta,
(c) si invirtiera 2 segundos en dar una vuelta,
(d) si girara en el sentido de las agujas del reloj,
(e) si en el instante $t = 0$ el objeto estuviera en el punto más alto de la circunferencia.

38. Según su respuesta al ejercicio 37, explicar el significado de los parámetros $a$, $b$ y $c$ en el modelo general $x(t) = a \cos(bt + c)$, $y(t) = a \text{ sen}(bt + c)$.

39. Un muelle, colgado del techo, oscila arriba y abajo. Su posición vertical viene dada por $f(t) = 4 \text{ sen } t$. Calcular su velocidad en el instante $t$.

40. En el ejercicio 39, ¿en qué instantes es 0 la velocidad? ¿Cuál es la posición del muelle en esos momentos?

**Los ejercicios 41 y 42 hacen referencia al ejemplo 5.4.**

41. Si la carga total de un circuito eléctrico simple es $Q(t) = 3 \text{ sen } t + t + 4$ culombios, comparar la intensidad en $t = 0$ y $t = 1$.

42. Si la carga total de un circuito eléctrico simple es $Q(t) = 4 \cos t - 3t + 1$ culombios, comparar la intensidad en $t = 0$ y $t = 1$.

43. Usando las identidades $\text{sen } 2x = 2 \text{ sen } x \cos x$ y $\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$, probar que si $f(x) = \text{sen } 2x$, entonces $f'(x) = 2 \cos 2x$.

44. Usando las identidades $\text{sen } 2x = 2 \text{ sen } x \cos x$ y $\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$, probar que si $f(x) = \cos 2x$, entonces $f'(x) = -2 \text{ sen } 2x$.

45. Dada $f(x) = \text{sen } x$, hallar $f^{(75)}(x)$ y $f^{(150)}(x)$.

46. Dada $f(x) = \cos x$, hallar $f^{(77)}(x)$ y $f^{(120)}(x)$.

47. Probar que $\lim_{\theta \to 0^-} \text{sen } \theta = 0$ (véase el lema 5.1).

48. Usando el lema 5.1 y la identidad $\cos^2 \theta + \text{sen}^2 \theta = 1$, demostrar el lema 5.2.

49. Demostrar el teorema 5.2 usando la identidad $\cos(x + h) = \cos x \cos h - \text{sen } x \text{ sen } h$.

50. Usar la regla del cociente para deducir las fórmulas de derivación de $\cot x$, $\sec x$ y $\text{cosec } x$.

51. Usar los límites básicos $\lim_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } x}{x} = 1$ y $\lim_{t \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x} = 0$ para calcular los límites siguientes:

(a) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } 3x}{x}$ (b) $\lim_{t \to 0} \dfrac{\text{sen } t}{4t}$

(c) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{5x}$ (d) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } x^2}{x^2}$

52. Usar los límites básicos $\lim_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } x}{x} = 1$ y $\lim_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x} = 0$ para calcular los límites siguientes:

(a) $\lim_{t \to 0} \dfrac{2t}{\text{sen } t}$ (b) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } x}{5x + 1}$

(c) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } 6x}{\text{sen } 5x}$ (d) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\tan 2x}{x}$

53. El sexo de los cocodrilos recién nacidos en el Mississippi se determina por la temperatura de los huevos en el nido. Los huevos sólo se desarrollan si la temperatura está entre 26 °C y 36 °C. Los que están entre 26 °C y 30 °C dan lugar a hembras y los que están entre 34 °C y 36 °C a machos. El porcentaje de hembras cae del 100% a 30 °C al 0% a 34 °C. La probabilidad $f(T)$ de que nazca una hembra de huevos a temperatura $T$ viene dada por

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 26 \le t \le 30 \\ g(t) & \text{si } 30 \le t \le 34 \\ 0 & \text{si } 34 \le t \le 36 \end{cases}$$

para cierta función $g(t)$. Hallar una función $g(t) = a \cos(bt + c)$ para la que $f(t)$ sea derivable en $t = 30$ y en $t = 34$.
En este momento no tenemos la suficiente información para calcular la probabilidad de que nazca una hembra. ¿Qué información nos falta?

54. Hemos visto que la aproximación $\text{sen } x \approx x$ proviene de la recta tangente a $y = \text{sen } x$ en $x = 0$. Podemos mirarla también como subproducto del límite $\lim_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } x}{x} = 1$. Explicar por qué ese límite implica que $\text{sen } x \approx x$ para $x$ pequeños.
¿Cómo se puede lograr una aproximación mejor? En vez de la recta tangente, podemos usar una función cuadrática. Para ver por qué hay que multiplicar $x^2$, calcule numéricamente

$a = \lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x - x}{x^2}$. Entonces, $\operatorname{sen} x - x \approx ax^2$, o sea, $x \approx x + ax^2$ para $x$ pequeños.

¿Y una aproximación cúbica? Calcule $b = \lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x - (x + ax^2)}{x^3}$.

Entonces $\operatorname{sen} x - (x + ax^2) \approx bx^3$, o sea, $\operatorname{sen} x \approx x + ax^2 + bx^3$ para $x$ pequeños.

Partiendo de $\lim_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x} = 0$, hallar una aproximación cúbica de $\cos x$.

Si dispone de un PCS, lleve la aproximación de seno y coseno hasta polinomios de grado siete e identifique la pauta observada. (Ayuda: Escribir los coeficientes $a, b\ldots$ como $1/n!$ para algún entero $n$). Estudiaremos estas aproximaciones, llamadas **polinomios de Taylor**, en el Capítulo 8.

## 2.6 DERIVADAS DE FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Las funciones exponenciales y logarítmicas están entre las más utilizadas en las aplicaciones. Recordemos una aplicación simple en economía.

Si un capital inicial de 100 euros se dobla cada año, se convertirá sucesivamente en 100 euros(2) = 200 euros tras un año, en 100 euros(2)(2) = 400 euros tras dos años, en 100 euros $(2^3)$ = 800 euros tras tres años, etc. Al cabo de $t$ años, el valor de la inversión será 100 euros$(2^t)$.

¿Cómo describiría el *ritmo* de beneficios de esa inversión? Puesto que el valor se dobla cada año, podría contestar que un 100%. Ese ritmo, que es el porcentaje anual de rendimiento, al estudiante de Cálculo debe sugerirle la derivada.

En el Capítulo 0 definimos para cualquier exponente racional $r = \frac{p}{q}$ ($p$ y $q$ enteros),

$$a^r = a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}.$$

Para exponentes irracionales $x$ hemos definido $a^x$ de modo tal que los «huecos» en la gráfica de $y = a^x$ se llenaran. Ahora nos damos cuenta de que lo hicimos de manera tal que la función resultante es continua en toda la recta real. En el Capítulo 6 daremos la definición precisa de $a^x$ para $x$ irracional.

Consideremos $f(x) = a^x$ para alguna constante $a > 1$ ($a$ se llama la **base**). En el Capítulo 0 vimos que su gráfica será parecida a la de $2^x$ que muestra la figura 2.33a.

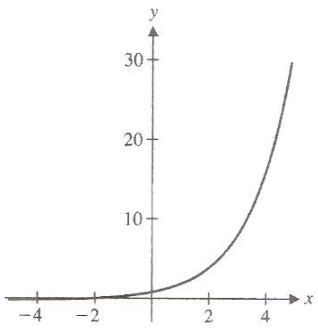



**Figura 2.33a**

$y = 2^x$.

De izquierda a derecha, la gráfica es siempre creciente. Así, pues, las pendientes de las rectas tangentes son positivas y, por tanto, $f'(x) > 0$ en todo $x$. Además, cuanto más a la derecha, mayor pendiente. Lejos a la izquierda del origen, las rectas tangentes son casi horizontales, luego $f'(x)$ es casi 0. La figura 2.33b muestra una gráfica de $f'(x)$ consistente con todo lo expuesto.

(Genere en la calculadora gráficas de $y = a^x$ para varios valores de $a > 0$ junto con las de sus derivadas. Tal vez observe alguna pauta).

La figura 2.33b para la derivada de $2^x$ parece idéntica a la de la función (figura 2.33a). Esto refuerza nuestra convicción anterior de que la descripción de la función («dobla cada año») describe también su ritmo de cambio.

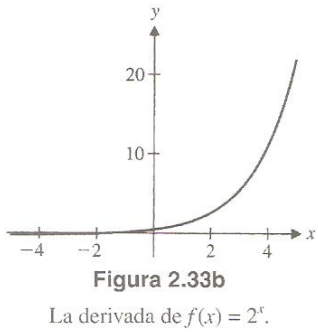



**Figura 2.33b**

La derivada de $f(x) = 2^x$.

### Derivadas de las funciones exponenciales

Intentemos hallar la derivada de $f(x) = a^x$, con $a > 1$, mediante la propia definición de derivada:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{a^x a^h - a^x}{h} \qquad \text{Usar las reglas de los exponentes.}$$

$$= a^x \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}. \qquad \text{Sacar factor común } a^x. \qquad (6.1)$$

Por desgracia, no sabemos calcular, por ahora, el límite (6.1). Sin embargo, **suponiendo** que el límite existe, (6.1) afirma que

$$\frac{d}{dx}\, a^x = (\text{constante})\, a^x. \tag{6.2}$$

Además, (6.2) es consistente con lo observado en las figuras 2.33a y 2.33b. La cuestión a la que debemos enfrentarnos es: ¿existe

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

para todos (o para algunos) valores de $a > 1$? En la tabla adjunta exploramos el caso $a = 2$.

| $h$ | $\frac{2^h - 1}{h}$ | $h$ | $\frac{2^h - 1}{h}$ |
|---|---|---|---|
| 0,1 | 0,7177346 | –0,1 | 0,6696701 |
| 0,01 | 0,6955550 | –0,01 | 0,6907505 |
| 0,001 | 0,6933875 | –0,001 | 0,6929070 |
| 0,0001 | 0,6931712 | –0,0001 | 0,6931232 |
| 0,00001 | 0,6931496 | –0,00001 | 0,6931448 |
| 0,000001 | 0,6931474 | –0,000001 | 0,6931469 |
| 0,0000001 | 0,6931470 | –0,0000001 | 0,6931472 |

La evidencia numérica sugiere que el límite en cuestión existe y es

$$\lim_{h \to 0} \frac{2^h - 1}{h} \approx 0{,}693147.$$

Análoga evidencia numérica sugiere que

$$\lim_{h \to 0} \frac{3^h - 1}{h} \approx 1{,}098612.$$

Los valores numéricos aproximados de esos dos límites nada tienen de notable hasta que nos damos cuenta de que

$$\ln 2 \approx 0{,}693147 \quad \text{y} \quad \ln 3 \approx 1{,}098612.$$

Si se considera el límite (6.1) para otros valores de $a > 1$ se llega a resultados similares (intente estimar unos cuantos). Eso sugiere que, para $a > 1$,

$$\frac{d}{dx}\, a^x = a^x \ln a.$$

Pasemos a considerar la función $f(x) = a^x$ con $0 < a < 1$, por ejemplo, $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Esta función se puede reescribir como $f(x) = b^{-x}$, donde $b = \frac{1}{a} > 1$. Así, para $b = \frac{1}{2}$ se tiene

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}.$$

Las gráficas de esta clase de funciones exponenciales son parecidas a la de $y = 2^{-x}$ que muestra la figura 2.34a.

En este caso, las pendientes de las rectas tangentes, por tanto también los valores de la derivada, son siempre negativas, pero cada vez menos y tienden hacia cero por la derecha. Eso produce para $f'(x)$ una gráfica como la de la figura 2.34b. Esta vez la gráfica de la deri-

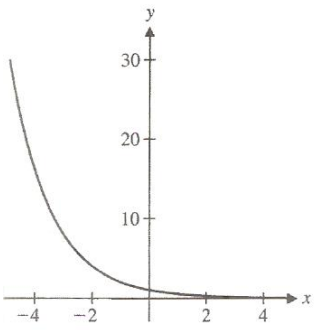



**Figura 2.34a**

$y = 2^{-x}$.

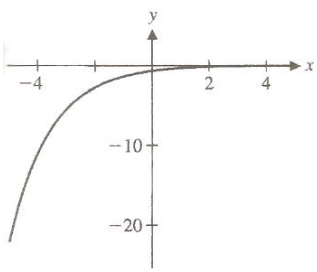



**Figura 2.34b**

La derivada de $f(x) = 2^{-x}$.

vada parece la reflejada de la original en el eje $x$. Repase cómo hemos deducido (6.1) y observe que el argumento no exige que $a > 1$. Por tanto, si $0 < a \leq 1$, se tiene

$$f'(x) = a^x \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}.$$

Explorando numéricamente este límite para $a = \frac{1}{2}$ se obtienen las tablas adjuntas.

| $h$ | $\frac{0{,}5^h - 1}{h}$ |
|---|---|
| 0,1 | –0,6696701 |
| 0,01 | –0,6907505 |
| 0,001 | –0,6929070 |
| 0,0001 | –0,6931232 |
| 0,00001 | –0,6931448 |
| 0,000001 | –0,6931469 |
| 0,0000001 | –0,6931472 |

| $h$ | $\frac{0{,}5^h - 1}{h}$ |
|---|---|
| –0,1 | –0,7177346 |
| –0,01 | –0,6955550 |
| –0,001 | –0,6933875 |
| –0,0001 | –0,6931712 |
| –0,00001 | –0,6931496 |
| –0,000001 | –0,6931474 |
| –0,0000001 | –0,6931470 |

De nuevo la evidencia numérica sugiere que el límite existe y es

$$\lim_{h \to 0} \frac{0{,}5h - 1}{h} \approx -0{,}693147.$$

Nótese que

$$\ln 0{,}5 \approx -0{,}693147.$$

Ante tanta evidencia no puede sorprender el resultado siguiente.

**Teorema 6.1**

Para cualquier constante $a > 0$,

$$\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a. \tag{6.3}$$

La demostración está completa salvo por la evaluación precisa del límite (6.1), pero no estaremos en condiciones de ello hasta el Capítulo 6. De momento, nos hemos de contentar con la fuerte evidencia numérica, gráfica y algebraica (esta última casi completa) que lo apoyan.

Nótese que (6.3) es consistente con lo observado en las figuras 2.33 y 2.34. En particular, el hecho de ser $\ln a < 0$ siempre que $0 < a < 1$ explica por qué la gráfica de $f'(x)$ para $0 < a < 1$ parece la reflexión en el eje $x$ de la gráfica de $f(x)$.

**Ejemplo 6.1** **Ritmo de cambio de una inversión**

Si el valor de una inversión se dobla cada año, su valor a los $t$ años es $v(t) = 100\ 2^t$. Calcular el ritmo de cambio instantáneo porcentual de la inversión.

**Solución** El ritmo de cambio instantáneo es la derivada

$$v'(t) = 100\ 2^t \ln 2.$$

El ritmo de cambio relativo es, por tanto,

$$\frac{v'(t)}{v(t)} = \frac{100\ 2^t \ln 2}{100\ 2^t} = \ln 2 \approx 0{,}693,$$

que corresponde a un ritmo de cambio porcentual del 69,3%. El ritmo de cambio porcentual es 69,3%, algo que sorprende a mucha gente. Un ritmo porcentual del 69,3% doblará su inversión cada año si se compone «continuamente». En los ejercicios ahondamos en lo que significa el interés compuesto continuamente.

La base más utilizada, con diferencia, es el número irracional $e$, que aparece de forma natural. En seguida va a entender la razón de su elección como base. Dado que $\ln e = 1$, la derivada de $f(x) = e^x$ es simplemente

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x \ln e = e^x.$$

**Teorema 6.2**

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x \quad \text{y} \quad \frac{d}{dx} e^{-x} = -e^{-x}.$$

**Demostración**

Como acabamos de decir, la primera fórmula se deduce inmediatamente del teorema 6.1. Y la segunda se sigue de la primera por la regla del cociente.

Estaremos de acuerdo en que son las dos derivadas más fáciles de recordar. En la sección 2.5 deseábamos un modelo para las oscilaciones de un peso suspendindo de un muelle. La función coseno reproducía las oscilaciones, pero no daba cuenta del proceso que lleva finalmente el muelle al reposo. Combinando una función trigonométrica con una exponencial se obtiene un modelo más realista.

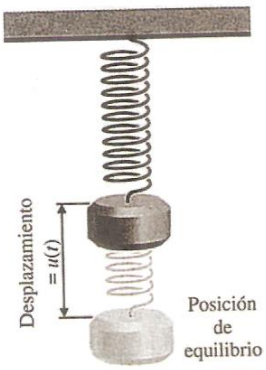



**Figura 2.35**
Sistema muelle-masa.

**Ejemplo 6.2** **Velocidad de un peso suspendido de un muelle**

Si consideramos el rozamiento (resistencia del aire u otros) en nuestro modelo del sistema muelle–masa, el desplazamiento vertical del peso viene descrito por

$$u(t) = Ae^{\alpha t} \cos(\omega t) + Be^{\alpha t} \operatorname{sen}(\omega t),$$

donde $A$, $B$, $\alpha$ y $\omega$ son constantes. Supongamos que

$$u(t) = e^{-t} \cos t.$$

Esbozar una gráfica del movimiento del peso y hallar su velocidad en cualquier tiempo $t$.

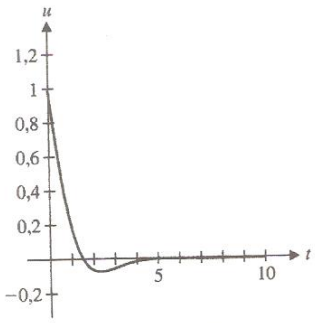



**Figura 2.36**
$u(t) = e^{-t} \cos t$.

**Solución** La figura 2.36 muestra la gráfica del movimiento. Vemos que el muelle oscila brevemente y llega pronto al reposo en $u = 0$. Es precisamente el tipo de comportamiento que se espera del sistema de suspensión de un automóvil (el sistema muelle-masa nos es más familiar) cuando pisa un bache en la carretera.

La velocidad del peso viene dada por la derivada. Por la regla del producto,

$$\begin{aligned} u'(t) &= \frac{d}{dt}(e^{-t}) \cos t + e^{-t} \frac{d}{dt} (\cos t) \\ &= -e^{-t} \cos t - e^{-t} \operatorname{sen} t \\ &= -e^{-t} (\cos t + \operatorname{sen} t). \end{aligned}$$

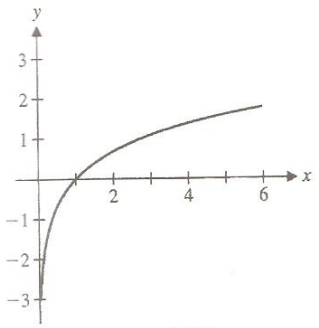



**Figura 2.37a**

$y = \ln x$.

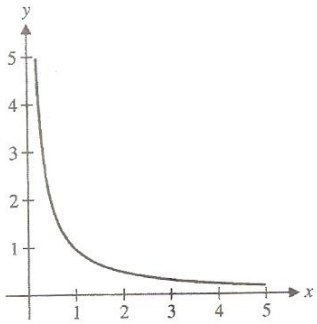



**Figura 2.37b**

La derivada de $f(x) = \ln x$.

## La derivada del logaritmo natural

La función logaritmo natural está estrechamente relacionada con las funciones exponenciales. Ya ha aparecido en la fórmula general de derivación exponencial (6.3). La gráfica de $y = \ln x$, que ya vimos en el Capítulo 0, se muestra en la figura 2.37a.

La función $\ln x$ sólo está definida en $x > 0$ y es siempre creciente. Eso quiere decir que las pendientes de su rectas tangentes y la derivada son positivas siempre.

Cuando $x \to \infty$ las pendientes disminuyen y tienden a 0.

Cuando $x$ tiende a 0 por la derecha, la gráfica se hace más y más pendiente, de modo que la derivada crece sin tope.

La gráfica de la derivada, consistente con todas estas informacioens, puede verse en la figura 2.37b. ¿La reconoce?

Aplicando la definición de derivada a $f(x) = \ln x$ resulta

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h}.$$

Por desgracia, aún no sabemos calcular este límite ni si existe siquiera (lo estudiaremos en el Capítulo 6). Nuestra única opción es investigarlo numéricamente. En las tablas hemos calculado valores para $x = 2$.

| $h$ | $\frac{\ln(2+h) - \ln 2}{h}$ |
|---|---|
| 0,1 | 0,4879016 |
| 0,01 | 0,4987542 |
| 0,001 | 0,4998750 |
| 0,0001 | 0,4999875 |
| 0,00001 | 0,4999986 |
| 0,000001 | 0,4999999 |
| 0,0000001 | 0,5000002 |

| $h$ | $\frac{\ln(2+h) - \ln 2}{h}$ |
|---|---|
| −0,1 | 0,5129329 |
| −0,01 | 0,5012542 |
| −0,001 | 0,5001250 |
| −0,0001 | 0,5000125 |
| −0,00001 | 0,5000013 |
| −0,000001 | 0,5000001 |
| −0,0000001 | 0,5000000 |

Eso nos conduce a dar como aproximación

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(2+h) - \ln 2}{h} \approx \frac{1}{2}.$$

Análogamente, hemos calculado varios valores para $x = 3$.

| $h$ | $\frac{\ln(3+h) - \ln 3}{h}$ |
|---|---|
| 0,1 | 0,3278982 |
| 0,01 | 0,3327790 |
| 0,001 | 0,3332778 |
| 0,0001 | 0,3333278 |
| 0,00001 | 0,3333328 |
| 0,000001 | 0,3333333 |

| $h$ | $\frac{\ln(3+h) - \ln 3}{h}$ |
|---|---|
| −0,1 | 0,3390155 |
| −0,01 | 0,3338901 |
| −0,001 | 0,3333889 |
| −0,0001 | 0,3333389 |
| −0,00001 | 0,3333339 |
| −0,000001 | 0,3333334 |

Lo cual indica como aproximación

$$f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(3+h) - \ln 3}{h} \approx \frac{1}{3}.$$

Puede comprobar la aproximación $f'(4) \approx \frac{1}{4}$, $f'(5) \approx \frac{1}{5}$ y algunas otras. Vuelva a mirar la figura 2.37b. ¿Reconoce ahora la gráfica? El próximo teorema da la respuesta.

**Teorema 6.3**
Para $x > 0$,

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}. \tag{6.4}$$

La demostración tendrá que esperar al Capítulo 6, pero el resultado era de esperar a la vista de las evidencias gráfica y numérica.

**Ejemplo 6.3** **Derivación de logaritmos**

Hallar la derivada de $f(x) = x \ln x$ y $g(x) = \ln x^2$.

**Solución** Por la regla del producto

$$f'(x) = (1) \ln x + x\left(\frac{1}{x}\right) = \ln x + 1.$$

Todavía no hemos introducido la **regla de la cadena** (véase sección 2.7) para derivar funciones compuestas como $g(x)$, pero por las reglas de los logaritmos podemos reescribir $g(x) = \ln x^2 = 2 \ln x$, y usando (6.4) obtenemos

$$g'(x) = 2\frac{d}{dx}(\ln x) = 2\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2}{x}.$$

## EJERCICIOS 2.6

1. La gráfica de $y = e^x$ se curva hacia arriba entre $x = -1$ y $x = 1$. Explicar por qué, interpretando $f'(x) = e^x$ como pendiente de la recta tangente y teniendo en cuenta que $e^x$ crece con $x$. Para valores grandes de $x$, la gráfica parece ser recta, sin curvatura. Usando rectas tangentes, decidir si eso es cierto o si es una ilusión óptica.

2. La gráfica de $f(x) = \ln x$ parece hacerse cada vez más plana para $x$ grandes. Interpretando la derivada $f'(x) = \frac{1}{x}$ como pendiente de las rectas tangentes, determinar si eso es cierto o si es una ilusión óptica.

3. Comparar las gráficas de las funciones $x^2$, $x^3$, $x^4$ y $e^x$ para $x > 0$. Esbozar sus gráficas para $x$ grandes (con valores *muy* grandes de $y$) y comparar los ritmos de crecimiento relativos. En general, ¿cómo se compara $e^x$ con los polinomios?

4. Comparar las gráficas de las funciones $x^{1/2}$, $x^{1/3}$, $x^{1/4}$ y $\ln x$ para $x > 1$. Esbozar sus gráficas para $x$ grandes (con valores *muy* grandes de $y$) y comparar los ritmos de crecimiento relativos. En general, ¿cómo se compara $\ln x$ con $\sqrt[n]{x}$?

**En los ejercicios 5-28, hallar la derivada de la función.**

5. $f(x) = 4e^x - x$
6. $f(x) = \operatorname{sen} x - 3e^x$
7. $f(x) = xe^x$
8. $f(x) = e^x \cos x$
9. $f(x) = x + 2^x$
10. $f(x) = x4^x$
11. $f(x) = 2e^{x+1}$
12. $f(x) = (1/e)^x$
13. $f(x) = (1/3)^x$
14. $f(x) = 4^{-x}$
15. $f(x) = 4^{-x+1}$
16. $f(x) = (1/2)^{1-x}$
17. $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$
18. $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$
19. $f(x) = \ln 2x$
20. $f(x) = \ln 8x$
21. $f(x) = \ln x^3$
22. $f(x) = x^3 \ln x$
23. $f(x) = e^{2x} = e^x e^x$
24. $f(x) = e^{3x}$
25. $f(x) = x^2 e^{-x}$
26. $f(x) = e^x \ln x$
27. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$
28. $f(x) = \dfrac{e^x}{2^x}$

**En los ejercicios 29-36, hallar una ecuación de la recta tangente a $y = f(x)$ en $x = 1$.**

29. $f(x) = 3e^x$
30. $f(x) = 2e^{x-1}$
31. $f(x) = 3^x$
32. $f(x) = 2^x$
33. $f(x) = xe^x$
34. $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$
35. $f(x) = x^2 \ln x$
36. $f(x) = 2 \ln x^3$

**En los ejercicios 37-40, $v(t)$ es el valor de una inversión en el tiempo $t$. Hallar el ritmo de cambio porcentual instantáneo.**

37. $v(t) = 100\,3^t$

38. $v(t) = 100\,4^t$

39. $v(t) = 100\,e^t$

40. $v(t) = 100\,e^{-t}$

41. Una población inicial de 200 bacterias se triplica cada día. Hallar una fórmula para la población al cabo de $t$ días y calcular el ritmo de cambio porcentual instantáneo de la población.

42. Una población inicial de 500 bacterias se duplica cada día. Hallar una fórmula para la población al cabo de $t$ días y calcular el ritmo de cambio porcentual instantáneo de la población.

43. Una inversión de $A$ euros al $100r\%$ anual de interés compuesto continuamente se convierte en $t$ años en $f(t) = Ae^{rt}$ euros. El porcentaje anual de rendimiento se define como $[f(1) - A]/A$, crecimiento relativo del capital en un año. Calcular el porcentaje anual de rendimiento para tasas de interés del

(a) 5% (b) 10% (c) 20% (d) 100 ln 2% (e) 100%

44. Determinar la tasa de interés necesaria para obtener un porcentaje anual de rendimiento del (a) 100%, (b) 10%.

45. El movimiento de un muelle viene descrito por $f(t) = e^{-t}\cos t$. Calcular y representar la función velocidad. ¿Cuándo es 0 la velocidad? ¿En qué posición tiene el muelle velocidad 0?

46. El movimiento de un muelle viene descrito por $f(t) = e^{-t}\,\text{sen}\,t$. Calcular y representar la función velocidad. ¿Cuándo es 0 la velocidad? ¿En qué posición tiene el muelle velocidad 0?

47. En el ejercicio 45, estimar gráficamente el valor de $t > 0$ en el que se alcanza la máxima velocidad y estimar en qué posición está el muelle en ese momento.

48. En el ejercicio 46, estimar gráficamente el valor de $t > 0$ en el que se alcanza la máxima velocidad y estimar en qué posición está el muelle en ese momento.

**En los ejercicios 49-52, utilizar un PCS o una calculadora gráfica.**

49. Halle la derivada de $f(x) = e^{\ln x^2}$ y compare la respuesta con $2x$. Explique cómo obtener ambas respuestas si son diferentes.

50. Halle la derivada de $f(x) = e^{\ln(-x^2)}$. La respuesta correcta es que no existe. Explique cómo obtener ambas respuestas si son diferentes.

51. Halle la derivada de $f(x) = \ln\sqrt{4e^{3x}}$ y compare la respuesta con $\frac{3}{2}$. Explique cómo obtener ambas respuestas si son diferentes.

52. Halle la derivada de $f(x) = \ln\left(\frac{e^{4x}}{x^2}\right)$ y compare la respuesta con $4 - 2/x$. Explique cómo obtener ambas respuestas si son diferentes.

53. Estime numéricamente el límite de (6.1) para $a = 3$ y compare la respuesta con ln 3.

54. Estime numéricamente el límite de (6.1) para $a = \frac{1}{3}$ y compare la respuesta con $\ln\frac{1}{3}$.

55. Estime numéricamente la derivada de $\ln x$ en $a = 4$ y compare la respuesta con $\frac{1}{4}$.

56. Estime numéricamente la derivada de $\ln x$ en $a = 5$ y compare la respuesta con $\frac{1}{5}$.

57. El **aproximante de Padé** de $e^x$ es la función del tipo $f(x) = \frac{a+bx}{1+cx}$, tal que $f(0)$, $f'(0)$ y $f''(0)$ son iguales a los valores correspondientes para $e^x$. Probar que esos valores son 1 y determinar los valores de $a$, $b$ y $c$ tales que $f(0) = f'(0) = f''(0) = 1$. Comparar las gráficas de $f(x)$ y $e^x$.

58. Usando las propiedades de las funciones exponenciales y logarítmicas podemos descubrir reglas de derivación que anuncian la regla de la cadena de la próxima sección. Usando $e^{2x} = (e^x)^2$, probar que $\frac{d}{dx}(e^{2x}) = 2e^{2x}$. Usando $e^{3x} = e^x e^{2x}$, probar que $\frac{d}{dx}(e^{3x}) = 3e^{3x}$.
Demostrar, por inducción, que $\frac{d}{dx}(e^{nx}) = ne^{nx}$ para todo entero $n > 0$. Como veremos, la fórmula es válida para todo número real $n$. Usando $\ln x^a = a \ln x$, deducir una fórmula para la derivada de $\ln x^a$. Usando $\ln(ax) = \ln a + \ln x$, hallar la derivada de $\ln(ax)$.

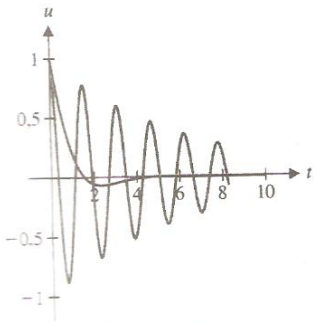



**Figura 2.38**

$u = e^{-t/6}\cos 4t$ y $u = e^{-t}\cos t$.

## 2.7 LA REGLA DE LA CADENA

En la sección 2.5 vimos que la función coseno describe las oscilaciones de un peso suspendido de un muelle y en la sección 2.6 que, combinado con una exponencial, describe un movimiento oscilatorio amortiguado. Pero el modelo $u(t) = e^{-t}\cos t$ representa sólo uno de los posibles movimientos de esa clase (de hecho, uno de amortiguamiento muy rápido). Eligiendo otra función exponencial, el ritmo de amortiguamiento cambia. Eligiendo otra función trigonométrica, el período de las oscilaciones sería distinto. Por ejemplo, $u(t) = e^{-t/6}\cos 4t$ describe un movimiento diferente (figura 2.38).

Esto se asemeja más que la figura 2.36 a la forma en que esperamos que un muelle vaya llegando al reposo. Pues bien, en este momento no disponemos de ninguna regla que nos permita derivar funciones como $e^{-t/6}$ o $\cos 4t$. Recurrir cada vez a la definición de la derivada sería muy penoso, así que vamos a presentar una regla para derivar la composición de dos funciones. Con ella, por ejemplo, conociendo las derivadas de $-t/6$ y de $e^t$ sabremos derivar $e^{-t/6}$.

En el ejemplo 5.2 usamos la regla del producto para demostrar que

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^2 x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x.$$

Sabiendo eso, de la regla del producto se sigue que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^3 x) &= \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x \operatorname{sen}^2 x)\\ &= \cos x \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x\,(2 \operatorname{sen} x \cos x)\\ &= 3 \operatorname{sen}^2 x \cos x.\end{aligned}$$

Dejamos como ejercicio extender este resultado a

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^4 x) = 4 \operatorname{sen}^3 x \cos x.$$

Nótese que en cada caso el exponente baja, la potencia disminuye en uno y se multiplica por la derivada de sen $x$. Ahora bien, $\operatorname{sen}^4 x$ se puede reescribir como

$$\operatorname{sen}^4 x = (\operatorname{sen} x)^4 = f(g(x)),$$

donde $g(x) = \operatorname{sen} x$ y $f(x) = x^4$. Las derivadas de $f$ y $g$ son $f'(x) = 4x^3$ y $g'(x) = \cos x$. Es fácil ver que $4 \operatorname{sen}^3 x = f'(g(x))$. Finalmente, la derivada de la función compuesta resulta ser

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = \frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^4 x) = 4 \operatorname{sen}^3 x \cos x = f'(g(x))g'(x).$$

Esto es un ejemplo de la **regla de la cadena** que enunciamos a continuación.

---

### Teorema 7.1

Si $g$ es derivable en $x$ y $f$ es derivable en $g(x)$, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x))g'(x).$$

---

### Demostración

A estas alturas sólo podemos demostrarlo en el supuesto de que $g'(x) \neq 0$. Sea $F(x) = f(g(x))$. Entonces,

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h}$$ Porque $F(x) = f(g(x))$.

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{g(x+h) - g(x)}$$ Multiplicamos numerador y denominador por $g(x+h) - g(x)$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$ Reagrupar términos

$$= \lim_{g(x+h) \to g(x)} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= f'(g(x))g'(x),$$

donde la penúltima línea es válida porque cuando $h \to 0$, $g(x+h) \to g(x)$, porque $g$ es continua (por ser derivable). En los ejercicios se pide precisar algunos detalles del argumento, en particular por qué se ha exigido $g'(x) \neq 0$.

Suele ser conveniente pensar la regla de la cadena en la notación de Leibniz. Si $y = f(u)$ con $u = g(x)$, entonces $y = f(g(x))$ y la regla de la cadena establece que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx}.$$

### Ejemplo 7.1 Aplicación de la regla de la cadena

Derivar $y = (x^3 + x - 1)^5$.

**Solución** Con $u = x^3 + x - 1$, es $y = u^5$. Aplicando (7.1),

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx} = \frac{d}{du}(u^5)\frac{du}{dx} \qquad \text{Hacer } y = u^5.$$

$$= 5u^4\,\frac{d}{dx}(x^3 + x - 1)$$

$$= 5(x^3 + x - 1)^4(3x^2 + 1).$$

El último término es la derivada de la expresión que está dentro del paréntesis (la citaremos como *derivada del interior*).

### Ejemplo 7.2 Aplicación de la regla de la cadena a una función exponencial

Hallar $\dfrac{d}{dt}(e^{-t/6})$.

**Solución** Con $u = -t/6$, de (7.1) se obtiene

$$\frac{d}{dt}(e^{-t/6}) = \frac{d}{dt}(e^u) = \frac{d}{du}(e^u)\frac{du}{dt}$$

$$= e^u\,\frac{d}{dt}\left(\frac{-t}{6}\right) = -\frac{1}{6}e^{-t/6}.$$

Aquí el papel de derivada del interior lo juega la derivada del exponente.

### Ejemplo 7.3 Velocidad de un peso suspendido de un muelle

La posición de un peso suspendido de un muelle viene dada por $u(t) = e^{-t/6}\cos 4t$. Hallar su velocidad en cualquier instante $t$.

**Solución** Por la regla del producto y la regla de la cadena,

$$v(t) = u'(t) = \frac{d}{dt}(e^{-t/6})(\cos 4t) + e^{-t/6}\frac{d}{dt}(\cos 4t) \qquad \text{Regla del producto.}$$

$$= e^{-t/6}\underbrace{\frac{d}{dt}\left(-\frac{t}{6}\right)}_{\text{derivada del interior}}(\cos 4t) + e^{-t/6}(-\operatorname{sen} 4t)\underbrace{\frac{d}{dt}(4t)}_{\text{derivada del interior}} \qquad \text{Regla de la cadena.}$$

$$= e^{-t/6}\left(-\frac{1}{6}\right)\cos 4t + e^{-t/6}(-\operatorname{sen} 4t)(4)$$

$$= -\frac{1}{6}e^{-t/6}\cos 4t - 4e^{-t/6}\operatorname{sen} 4t.$$

Ya está en condiciones de derivar casi cualquier función que se proponga. En muchos casos tendrá que combinar la regla de la cadena con alguna otra de las que ya conocíamos.

**Ejemplo 7.4** **Derivadas de algunas funciones trigonométricas similares**

Hallar las derivadas de $f(x) = \cos x^3$, $g(x) = \cos^3 x$ y $h(x) = \cos 3x$.

**Solución** Atención a la diferencia entre ellas. Poniendo los paréntesis implícitos (que con el fin de aligerar la notación no solemos escribir), son $f(x) = \cos(x^3)$, $g(x) = (\cos x)^3$ y $h(x) = \cos(3x)$. La derivada de la primera es

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\cos(x^3) = -\operatorname{sen}(x^3)\underbrace{\frac{d}{dx}x^3}_{\text{derivada del interior}} = -\operatorname{sen}(x^3)(3x^2) = -3x^2 \operatorname{sen} x^3.$$

Asimismo,

$$g'(x) = \frac{d}{dx}(\cos x)^3 = 3(\cos x)^2\underbrace{\frac{d}{dx}\cos x}_{\text{derivada del interior}}$$

$$= 3(\cos x)^2(-\operatorname{sen} x) = -3 \operatorname{sen} x \cos^2 x.$$

Finalmente,

$$h'(x) = \frac{d}{dx}\cos(3x) = -\operatorname{sen}(3x)\underbrace{\frac{d}{dx}(3x)}_{\text{derivada del interior}} = -\operatorname{sen}(3x)(3) = -3 \operatorname{sen} 3x.$$

**Ejemplo 7.5** **Una derivada que exige la regla de la cadena y la regla del cociente**

Hallar la derivada de $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{2x}{x+1}\right)$.

**Solución**

$$f'(x) = \cos\left(\frac{2x}{x+1}\right)\underbrace{\frac{d}{dx}\left(\frac{2x}{x+1}\right)}_{\text{derivada del interior}} \qquad \text{Regla de la cadena.}$$

$$= \cos\left(\frac{2x}{x+1}\right)\frac{2(x+1)-2x(1)}{(x+1)^2} \qquad \text{Regla del cociente.}$$

$$= \cos\left(\frac{2x}{x+1}\right)\frac{2}{(x+1)^2}.$$

**Ejemplo 7.6** **Una derivada que exige varias aplicaciones de la regla de la cadena y la regla del cociente**

Hallar la derivada de $f(x) = \dfrac{\tan 2x^2}{(2x+1)^2}$.

**Solución**

$$f'(x) = \frac{\dfrac{d}{dx}(\tan 2x^2)(2x+1)^2 - \tan 2x^2 \dfrac{d}{dx}(2x+1)^2}{[(2x+1)^2]^2} \qquad \text{Regla del cociente.}$$

$$= \frac{\sec^2 2x^2 \dfrac{d}{dx}(2x^2)(2x+1)^2 - \tan 2x^2(2)(2x+1)^1 \dfrac{d}{dx}(2x+1)}{(2x+1)^4} \quad \text{Regla de la cadena.}$$

$$= \frac{\sec^2 2x^2(4x)(2x+1)^2 - \tan 2x^2(2)(2x+1)\,(2)}{(2x+1)^4}$$

$$= \frac{4(2x+1)[x(2x+1)\sec^2 2x^2 - \tan 2x^2]}{(2x+1)^4}$$

$$= \frac{4[x(2x+1)\sec^2 2x^2 - \tan 2x^2]}{(2x+1)^3}.$$

**Ejemplo 7.7** **Una derivada que exige varias aplicaciones de la regla de la cadena**

Hallar la derivada de $f(x) = \ln[\cos(e^{x^2-\sec x})]$.

**Solución** Aquí merece la pena pensar la regla de la cadena de fuera hacia adentro, tal como lo indicamos paso a paso:

$$\frac{d}{dx}\ln[\cos(e^{x^2-\sec x})] = \frac{1}{\cos(e^{x^2-\sec x})} \underbrace{\frac{d}{dx}\cos(e^{x^2-\sec x})}_{\text{derivada del interior}}$$

$$= \frac{1}{\cos(e^{x^2-\sec x})}[-\operatorname{sen}(e^{x^2-\sec x})] \underbrace{\frac{d}{dx}(e^{x^2-\sec x})}_{\text{derivada del interior}}$$

$$= \frac{-\operatorname{sen}(e^{x^2-\sec x})}{\cos(e^{x^2-\sec x})} e^{x^2-\sec x} \underbrace{\frac{d}{dx}(x^2 - \sec x)}_{\text{derivada del exponente}}$$

$$= \frac{-\operatorname{sen}(e^{x^2-\sec x})}{\cos(e^{x^2-\sec x})} e^{x^2-\sec x}(2x - \sec x \tan x).$$

A continuación, consideramos una aplicación sencilla.

**Ejemplo 7.8** **Concentración de un producto químico**

La concentración de un producto químico, $t$ segundos después de una reacción autocatalizada, viene dada por $x(t) = \dfrac{10}{9e^{-20t}+1}$. Probar que $x'(t) > 0$ y, con esta información, demostrar que la concentración nunca pasa de 10.

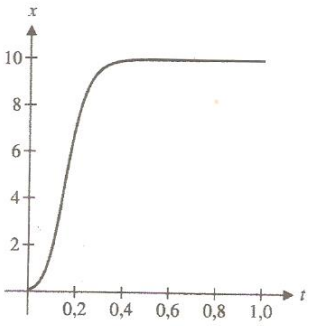



**Figura 2.39**

Concentración de un producto químico.

**Solución** Antes de derivar, miremos la función $x(t)$. La variable independiente es $t$ y el único término que la contiene está en el denominador. Así, pues, no necesitamos la regla del cociente. En vez de eso, reescribimos la función como $x(t) = 10(9e^{-20t}+1)^{-1}$ y aplicamos la regla de la cadena:

$$x'(t) = -10(9e^{-20t}+1)^{-2}\frac{d}{dt}(9e^{-20t}+1)$$

$$= -10(9e^{-20t}+1)^{-2}(-180e^{-20t})$$

$$= 1.800e^{-20t}(9e^{-20t}+1)^{-2}$$

$$= \frac{1.800e^{-20t}}{(9e^{-20t}+1)^2}.$$

Puesto que $e^{-20t} > 0$ para todo $t$, numerador y denominador son positivos, de manera que $x'(t) > 0$. En consecuencia, la gráfica de $y = x(t)$ es creciente, como muestra la figura 2.39.

Como la concentración es siempre creciente, su valor es siempre menor que el valor límite $\lim_{t \to \infty} x(t)$, fácil de calcular:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{10}{9e^{-20t} + 1} = \frac{10}{0 + 1} = 10.$$

## EJERCICIOS 2.7

1. David corre a 10 km/h y Yago a velocidad doble que David. ¿A qué velocidad corre Yago? La respuesta es obvia, pero formule este simple problema como un cálculo mediante la regla de la cadena. Concluya que, en este contexto, la regla de la cadena es obvia.

2. La mayor dificultad en el cálculo de las derivadas de $e^{x \operatorname{sen} x}$, $e^x \operatorname{sen} x$ y $xe^{\operatorname{sen} x}$ es saber qué regla (de la cadena, del cociente...) conviene aplicar. Explique cuál usaría y por qué. (Ayuda: Piense en el orden en que hay que efectuar las operaciones para evaluar cada función en un $x$ concreto).

3. Una consecuencia de la regla de la cadena es que si $g(x) = f(x - a)$, entonces $g'(x) = f'(x - a)$. Explique esta derivada gráficamente: compare las gráficas de $f$ y $g$ y argumente por qué las pendientes de las rectas tangentes se relacionan como la fórmula indica.

4. Otra implicación sencilla de la regla de la cadena es que si $h(x) = f(2x)$, entonces $h'(x) = 2f'(2x)$. Explique esta derivada gráficamente: compare las gráficas de $f$ y $h$ y argumente por qué las pendientes de las rectas tangentes se relacionan como la fórmula indica.

**En los ejercicios 5-8, hallar las derivadas con y sin la regla de la cadena.**

5. $f(x) = (x^3 - 1)^2$
6. $f(x) = (x^2 + 2x + 1)^2$
7. $f(x) = e^{-2x}$
8. $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$

**En los ejercicios 9-40, hallar la derivada de la función.**

9. $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$
10. $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 4x}$
11. $f(x) = (x^3 + x + 1)^3$
12. $f(x) = (2x + 3)^{2/3}$
13. $f(x) = \operatorname{sen}(2x^2 + 3)$
14. $f(x) = \sqrt[3]{\cos x}$
15. $f(x) = \operatorname{sen}^4 x$
16. $f(x) = \operatorname{sen} 4x$
17. $f(x) = \tan^2 x$
18. $f(x) = \tan x^2$
19. $f(x) = e^{x^2}$
20. $f(x) = (e^x)^2$
21. $f(x) = e^{1/3x}$
22. $f(x) = (e^{x^2} + 1)^{1/3}$
23. $f(x) = \ln(x^3 + 3x)$
24. $f(x) = \ln(\cos x)$
25. $f(x) = x^2 \operatorname{sen} 4x$
26. $f(x) = xe^{x^2}$
27. $f(x) = \sec^3 4x$
28. $f(x) = e^{\operatorname{sen} 2x}$
29. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x^2}{x^2}$
30. $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x^2 + 4}}$
31. $f(x) = \operatorname{sen}(\ln(\cos x^3))$
32. $f(x) = \sec\left(\tan e^{6x^2}\right)$
33. $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x^2}$
34. $f(x) = \cos\sqrt{x^2 + 1}$
35. $f(x) = [\ln(x^2 + 1)]^8$
36. $f(x) = e^{\ln \operatorname{sen}(x^2)}$
37. $f(x) = \cos\left(\dfrac{4x}{x^2 + 1}\right)$
38. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x \operatorname{sen} x}{x^2 + 4}}$
39. $f(x) = \ln(\sec x + \tan x)$
40. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x - 2}{x + 2}\right)$

**En los ejercicios 41 y 42, hallar una ecuación de la recta tangente a $y = f(x)$ en $x = a$.**

41. $f(x) = \sqrt{x^2 + 16}$, $a = 3$
42. $f(x) = \operatorname{sen} x^2$, $a = \sqrt{\pi}$

**En los ejercicios 43-46, usar la función posición dada para calcular la velocidad en el instante $t = 2$.**

43. $s(t) = e^{-4t} \operatorname{sen} 3t$
44. $s(t) = e^{-5t} \cos 2t$
45. $s(t) = e^{-2t} - e^{-4t}$
46. $s(t) = te^{-4t}$

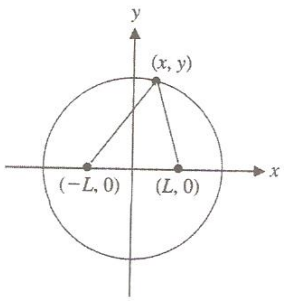
**En los ejercicios 47-50, hallar $f'(x)$, $f''(x)$ y $f^{(4)}(x)$ e identificar una pauta para la $n$-ésima derivada $f^{(n)}(x)$.**

47. $f(x) = \sqrt{2x + 1}$
48. $f(x) = \operatorname{sen} 3x$
49. $f(x) = e^{2x}$
50. $f(x) = \dfrac{2}{x + 1}$

**En los ejercicios 51-54, encontrar una función $g(x)$ tal que $g'(x) = f(x)$.**

51. $f(x) = (x^2 + 3)^2(2x)$
52. $f(x) = 2xe^{x^2}$
53. $f(x) = 3 \operatorname{sen} 2x$
54. $f(x) = \cos 3x$

55. En la figura, la luz que emerge del punto $(L, 0)$ se refleja en el punto $(x, y)$ de la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ y llega al punto $(-L, 0)$. La distancia recorrida es $D = \sqrt{(x - L)^2 + y^2} + \sqrt{(x + L)^2 + y^2}$. Hallar gráficamente el valor $x$ que hace máxima la distancia recorrida (sustituir $y$ por $\sqrt{r^2 - x^2}$). Probar que en ese punto la derivada es 0.




56. El movimiento circular de velocidad constante se puede describir por las ecuaciones $x(t) = a \cos bt$ e $y(t) = a \operatorname{sen} bt$, con $a$ y $b$ constantes. Calcular la velocidad $\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$. Para un móvil con velocidad no constante, hay que ajustar el argumento de las funciones trigonométricas. ¿Cuál es la velocidad si $x(t) = \cos t^2$ e $y(t) = \operatorname{sen} t^2$? Hallar una función $g(t)$ tal que para $x(t) = \cos g(t)$ e $y(t) = \operatorname{sen} g(t)$ la velocidad sea $3t^2$.

57. Dado que $a^x = e^x \ln a$, para $a > 0$, usar la regla de la cadena para hallar la derivada de $f(x) = a^x$.

58. En nuestra demostración de la regla de la cadena, ¿qué pasos no están suficientemente argumentados? ¿Dónde hemos usado la condición $g'(x) \neq 0$?

59. En Estadística se usa la función $f(x) = e^{-x^2/2}$ para analizar magnitudes aleatorias con distribución en forma de campana (normal). Las soluciones de $f''(x) = 0$ informan de la variabilidad de la magnitud aleatoria. Hallar todas las soluciones.

60. Repetir el ejercicio 59 para la función $f(x) = e^{-x^2/8}$. Comparando las gráficas de las dos funciones, explicar por qué se puede decir que esta distribución es más ancha que la del ejercicio 59.

61. Repetir el ejercicio 59 para la función general $f(x) = e^{-(x-m)^2/2c^2}$, con $m$ y $c$ constantes.

62. Una cuerda de guitarra de longitud $L$, densidad $p$ y tensión $T$ vibra con una frecuencia $f = \dfrac{1}{2L}\sqrt{\dfrac{T}{p}}$: (a) Calcular $\dfrac{df}{dp}$, considerando a $p$ como la variable independiente y manteniendo $T$ y $L$ constantes. Interpretar esta derivada en términos de tensar o destensar la cuerda para afinar la guitarra. (b) Calcular la derivada $\dfrac{df}{dL}$ e interpretarla en términos de pisar la cuerda para obtener las notas adecuadas.

63. La segunda ley de Newton, $F = ma$, donde $m$ denota la masa del objeto que experimenta una aceleración $a$ debida a la acción de una fuerza $F$, es muy precisa a pequeñas velocidades. A velocidades altas, se aplica la fórmula relativista de Einstein, $F = m\dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{v(t)}{\sqrt{1 - v^2(t)/c^2}}\right]$, donde $v(t)$ es la función velocidad y $c$ la velocidad de la luz ¿Qué hay que despreciar para que la expresión relativista se reduzca a la aceleración $a = v'(t)$ de la segunda ley de Newton?

## 2.8 DERIVACIÓN IMPLÍCITA Y RITMOS RELACIONADOS

Compare las dos ecuaciones siguientes que describen curvas familiares:

$$y = x^2 + 3 \text{ (parábola)}$$

y

$$x^2 + y^2 = 4 \text{ (circunferencia).}$$

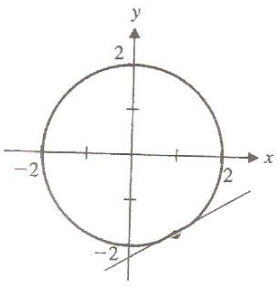



**Figura 2.40**
La recta tangente en el punto $(1, -\sqrt{3})$.

La primera define $y$ como función de $x$ **explícitamente**: para cada $x$, la ecuación da una fórmula explícita para calcular el valor de $y$ correspondiente.

La segunda no define una función, ya que la circunferencia no satisface el criterio de la recta vertical (figura 2.40). No obstante, podemos despejar $y$, con lo que obtenemos dos funciones ($y = \sqrt{4 - x^2}$ e $y = -\sqrt{4 - x^2}$) que vienen definidas **implícitamente** por la ecuación $x^2 + y^2 = 4$. Gráficamente, las identificamos como porciones de la curva dada por la ecuación original, cada una de las cuales pasa ya el criterio de la recta vertical.

Pues bien, necesitamos saber calcular las pendientes de las rectas tangentes a este tipo de curvas, aunque no sepamos despejar explícitamente $y$ en la ecuación que las define.

Supongamos que deseamos calcular la pendiente de la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ en el punto $(1, -\sqrt{3})$ (figura 2.40). Nuestras fórmulas de derivación no son directamente aplicables porque no tenemos $y$ expresada como función explícita de $x$. Podemos ver el círculo como la gráfica de dos semicircunferencias $y = \sqrt{4 - x^2}$ e $y = -\sqrt{4 - x^2}$. Como

estamos interesados en el punto $(1, -\sqrt{3})$, usamos la ecuación de la semicircunferencia inferior, $y = -\sqrt{4 - x^2}$.

Ésta es ya explícita y podemos calcular

$$y'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{4 - x^2}}(-2x) = \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}.$$

Así, pues, la pendiente de la recta tangente en el punto $(1, -\sqrt{3})$ es $y'(1) = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Este cálculo no era difícil, aunque pronto veremos una forma más fácil de hallarlo. Sin embargo, no siempre es posible despejar $y$ explícitamente en una ecuación. Por ejemplo, la ecuación de Van der Waals, que relaciona la presión $P$, el volumen $V$ y la temperatura $T$ de un gas, es

$$\left(P + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT, \tag{8.1}$$

con $a$, $n$, $b$ y $R$ constantes. Nótese que no es fácil despejar $V$ en función de $P$. Si queremos hallar la derivada $\frac{dV}{dP}$ necesitaremos un método para calcularla directamente de la ecuación implícita (8.1).

Consideremos los siguientes cálculos:

$$\frac{d}{dx}(x^3 + 4)^4 = 4(x^3 + 4)^3(3x^2),$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x - 3x)^4 = 4(\operatorname{sen} x - 3x)^3(\cos x - 3)$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x + 2)^4 = 4(\tan x + 2)^3 \sec^2 x.$$

Salta a la vista que todos ellos tienen una forma común, a saber:

$$\frac{d}{dx}[y(x)]^4 = 4[y(x)]^3 y'(x),$$

con adecuadas elecciones de la función $y(x)$. Esta forma común es simplemente una expresión de la regla de la cadena, útil al calcular derivadas de funciones definidas implícitamente.

Volvamos al caso simple de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$. Suponiendo que esta ecuación defina una o más funciones $y = y(x)$ de $x$, la ecuación se escribe

$$x^2 + [y(x)]^2 = 4. \tag{8.2}$$

Derivando ambos lados de (8.2) respecto de $x$, se obtiene

$$\frac{d}{dx}\{x^2 + [y(x)]^2\} = \frac{d}{dx}(4).$$

Usando la regla general $\frac{d}{dx}[y(x)]^2 = 2y(x)y'(x)$, obtenemos

$$2x + 2y(x)y'(x) = 0. \tag{8.3}$$

Para despejar en (8.3) la derivada $y'(x)$ que nos interesa, primero restamos $2x$

$$2y(x)y'(x) = -2x$$

y a continuación dividimos por $2y(x)$ (supuesto que $y(x) \neq 0$), lo que da

$$y'(x) = \frac{-2x}{2y(x)} = \frac{-x}{y(x)}.$$

Es importante advertir que $y'(x)$ se obtiene en términos de $x$ e $y$. Para calcular la pendiente en el punto $(1, -\sqrt{3})$, basta sustituir $x = 1$ e $y = -\sqrt{3}$:

$$y'(1) = \frac{-x}{y(x)}\bigg|_{x=1} = \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Nótese que el valor resultante es el mismo que obtuvimos antes despejando $y$ explícitamente y derivando después.

Este proceso consistente en derivar ambos lados de una ecuación con respecto a $x$ y despejar a continuación $y'(x)$ se conoce como **derivación implícita**.

Cuando se encuentre con una ecuación que define de manera implícita una o más funciones $y = y(x)$, derive ambos lados y tenga cuidado en aplicar la regla de la cadena en cada término que lo requiera. En particular, cada vez que derive una expresión que contenga $y$, digamos $g(y)$, debe aplicarla así:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\,g(y) = g'(y)y'(x).}$$

Después, busque los términos donde aparece $y'(x)$, páselos todos a un mismo lado de la ecuación y despeje $y'(x)$. Ilustramos este proceso en el ejemplo que sigue.

### Ejemplo 8.1 Cálculo implícito de la pendiente

Hallar $y'(x)$ sabiendo que $x^2 + y^3 - 2y = 3$. A continuación, calcular la pendiente de la recta tangente en el punto $(2, 1)$.

**Solución** Como no es fácil despejar $y$ en términos de $x$ explícitamente, aplicamos derivación implícita. Derivando en ambos lados respecto de $x$ se obtiene

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^3 - 2y) = \frac{d}{dx}(3),$$

y por tanto,

$$2x + 3y^2y'(x) - 2y'(x) = 0.$$

Para despejar $y'(x)$ reunimos en un lado de la igualdad los términos en los que aparece $y'$ y los restantes en el otro. Así,

$$3y^2y'(x) - 2y'(x) = -2x,$$

y ahora factorizando queda

$$(3y^2 - 2)y'(x) = -2x. \qquad \text{Sacamos factor común } y'(x).$$

Despejando $y'(x)$ resulta

$$y'(x) = \frac{-2x}{3y^2 - 2}. \qquad \text{Dividir entre } (3y^2 - 2).$$

La pendiente de la recta tangente en el punto $(2, 1)$ se obtiene haciendo $x = 2$ e $y = 1$:

$$y'(2) = \frac{-4}{3 - 2} = -4.$$

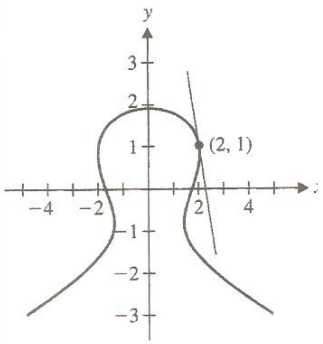



**Figura 2.41**
Recta tangente en (2, 1).

La ecuación de la recta tangente se obtiene de

$$-4 = \frac{y-1}{x-2},$$

o sea,

$$y - 1 = -4(x - 2).$$

Hemos representado la ecuación y la recta tangente en la figura 2.41 usando el modo de gráficas implícitas de nuestro PCS.

### Ejemplo 8.2 Una recta tangente hallada por derivación implícita

(a) Hallar $y'(x)$ sabiendo que $x^2y^2 - 2x = 4 - 4y$.

(b) Hallar una ecuación de la recta tangente en el punto $(2, -2)$.

**Solución** (a) Derivando respecto de $x$ en ambos lados, se obtiene

$$\frac{d}{dx}(x^2y^2 - 2x) = \frac{d}{dx}(4 - 4y).$$

En el primer término, el producto $x^2y^2$, debemos usar la regla del producto.

$$2xy^2 + x^2(2y)y'(x) - 2 = 0 - 4y'(x).$$

Pasando los términos con $y'(x)$ a un lado y los demás al otro, queda

$$(2x^2y + 4)y'(x) = 2 - 2xy^2$$

de donde ya podemos despejar

$$y'(x) = \frac{2 - 2xy^2}{2x^2y + 4}.$$

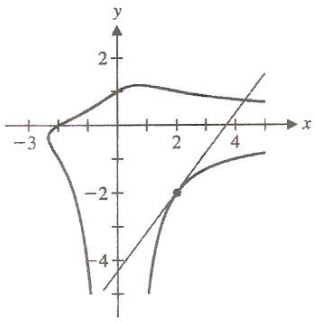



**Figura 2.42**
Recta tangente en (2, −2).

(b) La pendiente de la recta tangente se calcula haciendo $x = 2$, $y = -2$:

$$y'(2) = \frac{2 - 16}{-16 + 4} = \frac{7}{6}.$$

Una ecuación para la recta tangente viene dada por

$$y + 2 = \frac{7}{6}(x - 2)$$

Hemos representado la ecuación y la recta tangente en la figura 2.42 usando el modo de gráficas implícitas de nuestro PCS.

La derivación implícita permite hallar la derivada a partir de casi cualquier ecuación, como ilustra la siguiente aplicación.

### Ejemplo 8.3 Ritmo de cambio del volumen con respecto a la presión

Supongamos que la ecuación de Van der Waals para cierto gas es

$$\left(P + \frac{5}{V^2}\right)(V - 0{,}03) = 9{,}7. \tag{8.4}$$

Tratando el volumen como función de la presión $P$, usar derivación implícita para calcular la derivada $\frac{dV}{dP}$ en el punto $(5, 1)$.

**Solución** Derivando ambos lados de (8.4) respecto de $P$ se obtiene

$$\frac{d}{dP}\,[(P + 5V^{-2})(V - 0{,}03)] = \frac{d}{dP}\,9{,}7.$$

Por la regla del producto y la regla de la cadena,

$$\left(1 - 10V^{-3}\,\frac{dV}{dP}\right)(V - 0{,}03) + (P + 5V^{-2})\,\frac{dV}{dP} = 0.$$

Separando los términos que contienen $\dfrac{dV}{dP}$, resulta

$$[-10V^{-3}(V - 0{,}03) + P + 5V^{-2}]\,\frac{dV}{dP} = 0{,}03 - V.$$

Despejando $\dfrac{dV}{dP}$, obtenemos

$$\frac{dV}{dP} = \frac{0{,}03 - V}{-10V^{-3}(V - 0{,}03) + P + 5V^{-2}},$$

así que

$$V'(5) = \frac{0{,}03 - 1}{-10(1)(0{,}97) + 5 + 5(1)} = \frac{-0{,}97}{0{,}3} = -\frac{97}{30}.$$

(Las unidades son en términos de volumen por unidad de presión). En la figura 2.43 pueden verse las gráficas de la ecuación de Van der Waals y de la recta tangente en el punto (5, 1).

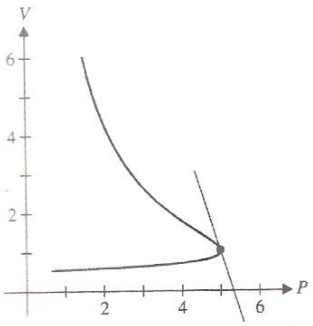



**Figura 2.43**

Gráficas de la ecuación de Van der Waals y de la recta tangente en el punto (5, 1).

Recordemos que, de momento, sólo hemos demostrado la regla de las potencias

$$\frac{d}{dx}\,x^r = rx^{r-1}$$

para exponentes **enteros** (teoremas 3.3 y 3.4), aunque la hemos usado libremente para cualquier exponente real $r$. Una vez introducida la derivación implícita, estamos en condiciones de demostrarla para exponentes **racionales**.

**Teorema 8.1**

Para cualquier exponente racional $r$, $\dfrac{d}{dx}\,x^r = rx^{r-1}$.

**Demostración**

Sea el número racional $r = \dfrac{p}{q}$, con $p$ y $q$ enteros. Consideremos

$$y = x^r = x^{p/q}. \tag{8.5}$$

Elevando ambos miembros a la potencia $q$ se tiene

$$y^q = x^p. \tag{8.6}$$

Derivamos ambos lados respecto de $x$,

$$\frac{d}{dx}\,(y^q) = \frac{d}{dx}\,(x^p).$$

Por la regla de la cadena,

$$qy^{q-1}\,\frac{dy}{dx} = px^{p-1}.$$

Ya es fácil despejar $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{px^{p-1}}{qy^{q-1}} = \frac{px^{p-1}}{q(x^{p/q})^{q-1}} \qquad \text{Porque } y = x^{p/q}.$$

$$= \frac{px^{p-1}}{qx^{p-p/q}} = \frac{p}{q}\, x^{p-1-p+p/q} \qquad \text{Reglas de los exponentes.}$$

$$= \frac{p}{q}\, x^{p/q-1} = rx^{r-1}, \qquad \text{Porque } \frac{p}{q} = r.$$

como habíamos anunciado.

## Ritmos relacionados

Hemos dicho que por derivación implícita se puede hallar la derivada a partir de casi cualquier ecuación. En muchos problemas de aplicación, cada magnitud de la ecuación cambia con el tiempo (o con alguna otra variable). En tales circunstancias, las derivadas se dice que son **ritmos relacionados**, puesto que podemos interpretar que la ecuación establece cómo están relacionadas las derivadas (los ritmos de cambio). Ilustramos esta idea en los próximos ejemplos.

### Ejemplo 8.4 Un problema de ritmos relacionados

Un petrolero sufre un accidente y el fuel escapa a razón de 150 galones por minuto. Supongamos que forma una capa de $\frac{1}{120}$ pies de espesor sobre el agua. Dado que 1 pie$^3$ = 7,5 galones, calcular el ritmo de crecimiento del radio de la mancha cuando el radio mide 500 pies.

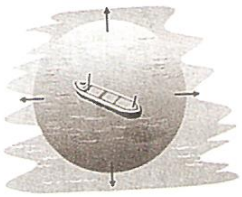


**Figura 2.44**
Mancha de petróleo.

**Solución** Como el área del círculo de radio $r$ es $\pi r^2$, el volumen del fuel es

$$V = (\text{profundidad})\,(\text{área}) = \frac{1}{120}\,\pi r^2.$$

Tanto el volumen como el radio son funciones del tiempo, así que

$$V(t) = \frac{\pi}{120}\,[r(t)]^2.$$

Derivamos ambos miembros de la ecuación respecto de $t$.

$$V'(t) = \frac{\pi}{120}\,2[r(t)]r'(t).$$

El radio dado es $r$ = 500 pies. El volumen crece a un ritmo de 150 galones/min, o sea, $\frac{150}{7,5} = 20$ pies$^3$/min. Sustituyendo $r = 500$ y $V'(t) = 20$, obtenemos

$$20 = \frac{\pi}{120}\,2(500)r'(t).$$

Finalmente, despejando $r'(t)$ concluimos que el radio está creciendo a un ritmo de $\frac{2,4}{\pi} = 0,76394$ pies/min.

Aunque los detalles cambian de un problema de ritmos relacionados a otro, el esquema general para resolverlos es idéntico. Los pasos son siempre los del ejemplo 8.4.

1. Hacer un esbozo gráfico, si conviene.
2. Formular una ecuación que relacione todas las magnitudes relevantes.
3. Derivar ambos lados de esa ecuación.
4. Sustituir los valores conocidos de las magnitudes y de sus derivadas.
5. Despejar el ritmo restante.

### Ejemplo 8.5 Otro problema de ritmos relacionados

Un automóvil se dirige hacia el sur a 50 mph y dista $\frac{1}{2}$ milla del cruce. Un coche de la policía se dirige hacia el oeste a 40 mph y dista del cruce $\frac{1}{4}$ milla. En ese instante, el radar de la policía mide el ritmo de cambio de la distancia entre los dos vehículos. ¿Qué dato registra el radar?

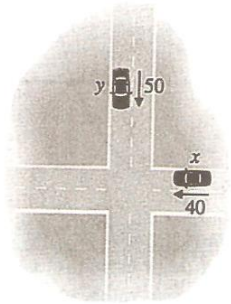



**Figura 2.45**
Automóviles acercándose a un cruce.

**Solución** Tomando $x$ e $y$ como en la figura 2.45, se tiene $\frac{dx}{dt} = -40$, ya que el coche de la policía se mueve a 40 mph en el sentido negativo del eje $x$, y $\frac{dy}{dt} = -50$, porque el otro se mueve a 50 mph en el sentido negativo del eje $y$. Por el teorema de Pitágoras, la distancia entre ellos es $d = \sqrt{x^2 + y^2}$. Puesto que las tres distancias cambian con el tiempo, nuestra ecuación es

$$d(t) = \sqrt{[x(t)]^2 + [y(t)]^2} = \{[x(t)]^2 + [y(t)]^2\}^{1/2}.$$

Derivando ambos lados respecto de $t$, y aplicando la regla de la cadena, se obtiene

$$d'(t) = \frac{1}{2}\{[x(t)]^2 + [y(t)]^2\}^{-1/2} 2[x(t)x'(t) + y(t)y'(t)]$$

$$= \frac{x(t)x'(t) + y(t)y'(t)}{\sqrt{[x(t)]^2 + [y(t)]^2}}.$$

Haciendo $x(t) = \frac{1}{4}$, $x'(t) = -40$, $y(t) = \frac{1}{2}$ e $y'(t) = -50$, resulta

$$d'(t) = \frac{-\frac{1}{4}40 - \frac{1}{2}50}{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{16}}} = \frac{-140}{\sqrt{5}} \approx -62{,}6,$$

de manera que el radar registra 62,6 mph. Nótese que ésta es una estimación poco precisa de la velocidad del automóvil. Por esa razón, la policía suele tomar medidas de radar con su vehículo parado.

## EJERCICIOS 2.8

1. En la derivación implícita escribimos $y(x)$ para recordar que $y$ se ve como función de $x$. Sin embargo, para la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ no es cierto que $y$ sea función de $x$. Como $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$, hay realmente dos funciones de $x$ definidas implícitamente. Explicar por qué eso no es una contradicción, es decir, explicar qué se está suponiendo exactamente al aplicar derivación implícita.

2. Al aplicar derivación implícita a una ecuación como $x^2y^2 + 3 = x$ empezamos derivando todos sus términos y así obtenemos $2xy^2 + x^2(2y)y' = 1$. Muchos estudiantes aprenden la receta de esta forma: hallar la derivada «normal» de todos los términos y poner $y'$ cada vez que haya que hacer una $y$-derivada. Explicar por qué esta receta funciona y reformularla de un modo más preciso e inteligible.

**En los ejercicios 3-6, calcular la pendiente de la recta tangente en el punto dado explícitamente (despejar antes $y$ como función de $x$) e implícitamente.**

3. $x^2 + 4y^2 = 8$ en $(2, 1)$
4. $x^3y - 4\sqrt{x} = x^2y$ en $(2, \sqrt{2})$
5. $y - 3x^2y = \cos x$ en $(0, 1)$
6. $y^2 + 2xy + 4 = 0$ en $(-2, 2)$.

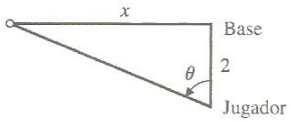
**En los ejercicios 7-18, hallar la derivada $y'(x)$ implícitamente.**

7. $x^2y^2 + 3y = 4x$
8. $3xy^3 - 4x = 10y^2$
9. $\sqrt{xy} - 4y^2 = 12$
10. $\operatorname{sen} xy = x^2 - 3$
11. $\dfrac{x+3}{y} = 4x + y^2$
12. $3x + y^3 - 4y = 10x^2$
13. $e^{x^2y} - e^y = x$
14. $xe^y - 3y \operatorname{sen} x = 1$
15. $\sqrt{x+y} - 4x^2 = y$
16. $\cos y - y^2 = 8$
17. $e^{4y} - \ln y = 2x$
18. $e^{x^2}y - 3y = x^2 + 1$

**En los ejercicios 19-26, hallar una ecuación de la recta tangente en el punto indicado. Si dispone de un PCS que represente curvas implícitas, represente la curva y la recta tangente.**

19. $x^2 - 4y^2 = 0$ en $(2, 1)$
20. $x^3 - 4y^2 = 4$ en $(2, 1)$
21. $x^2 - 4y^3 = 0$ en $(2,1)$
22. $x^2y^2 = 4x$ en $(1, 2)$
23. $x^2y^2 = 4y$ en $(2, 1)$
24. $x^3y^2 = -3xy$ en $(-1, -3)$
25. $x^3y^3 = 9y$ en $(1, 3)$
26. $x^2y^3 = 9y$ en $(1, -3)$

27. Un jugador de béisbol dista 2 pies de la base y vigila el movimiento de una pelota. En el diagrama, $x$ es la distancia de la pelota a la base y $\theta$ mide el ángulo de la mirada del jugador. Hallar el ritmo de cambio $\theta'$ al que debe girar su mirada para seguir una pelota con $x' = -130$ pies/s cuando cruza por la base, situada en $x = 0$.




28. En la situación del ejercicio 27, el ojo humano puede mantener el foco sólo para $\theta' \leq \frac{\pi}{2}$ (véase *Keep Your Eye on the Ball*, de Watts y Bahill). ¿Cuál es la máxima rapidez de una pelota que se puede seguir con la vista cuando cruza por la base?

29. Una cámara sigue el lanzamiento de un cohete espacial, situada en el suelo, a 2 millas de distancia del punto de lanzamiento. Cuando el cohete ha subido 3 millas y viaja a 0,2 millas por segundo, ¿a qué ritmo está cambiando el ángulo de la cámara (medido respecto de la horizontal)?

30. Repetir el ejercicio 29 para el momento en que el cohete, con la misma velocidad, ha ascendido 1 milla. ¿Qué ritmo es mayor? Explicarlo por puro sentido común.

31. El radio de una mancha circular es 3 mm y crece a un ritmo de 1 mm por hora. ¿A qué ritmo crece al área de la mancha?

32. Para la mancha del ejercicio 31, calcular el ritmo de crecimiento del área manchada cuando el radio mide 6 mm. Explicar, por sentido común, por qué este ritmo es mayor que el del ejercicio 31.

33. Un avión se encuentra a una altura de $h$ millas y a una distancia (horizontal) $x = 40$ millas de un aeropuerto. Un radar del aeropuerto detecta que la distancia $s(t)$ del avión al aeropuerto está cambiando a un ritmo $s'(t) = -240$ mph. Si el avión vuela hacia el aeropuerto a una altitud constante $h = 4$, calcular su rapidez $|x'(t)|$.

34. Repetir el ejercicio 33 para una altitud de 6 millas. Según las respuestas, ¿qué importancia tiene conocer con exactitud la altitud del avión?

35. Rehacer el ejemplo 8.5 suponiendo que el coche patrulla está en reposo. ¿Se consigue así que la medida del radar sea más precisa?

36. Probar que el radar del ejercicio 8.5 da la medida correcta de la velocidad si el coche de la policía está en el origen.

37. Probar que el radar del ejemplo 8.5 mide la velocidad correcta si el coche de la policía está en $x = \frac{1}{2}$ y se mueve a una velocidad de $(\sqrt{2} - 1)50$ mph

38. Hallar una posición y una velocidad del coche patrulla para las cuales el radar del ejemplo 8.5 registre una velocidad menor que la verdadera.

39. El coste medio de producción por unidad de cierto producto es $\overline{C}(x) = 10 + \frac{100}{x}$ donde $x$ denota el número de unidades producidas. Si $x = 10$ y la producción está creciendo a un ritmo de 2 unidades al año, ¿cuál es el ritmo de cambio del coste medio?

40. El coste medio de producción por unidad de cierto producto es $\overline{C}(x) = 12 + \frac{94}{x}$, donde $x$ denota el número de unidades producidas. La tabla muestra las producciones de los tres últimos años.

| Año | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| Prod. ($x$) | 8,2 | 8,8 | 9,4 |

Estimar el valor de $x'$ y el ritmo de cambio actual (año 2) del coste medio.

41. Una compañía que gasta $x$ miles de euros en pubilicidad, espera unas ventas anuales, en miles de euros, de $s(x) = 60 - 40e^{-0.05x}$. La tabla muestra los gastos en publicidad de los tres últimos años.

| Año | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| Publ. | 16.000 | 18.000 | 20.000 |

Estimar el valor de $x'$ y el ritmo de cambio actual (año 2) del coste medio.

42. Una compañía que gasta $x$ miles de euros en pubilicidad, calcula unas ventas anuales, en miles de euros, de $s(x) = 80 - 20e^{-0,04x}$. Si el gasto actual en publicidad es $x = 40$ y crece a un ritmo de 1.500 euros al año, hallar el ritmo de cambio del volumen de ventas.

43. Una persona de 6 pies de altura dista 12 pies de una farola de 18 pies (véase figura). La persona se aleja de la farola a 2 pies/s. ¿A qué ritmo está cambiando la longitud de su sombra? (Ayuda: Probar que $\frac{x+s}{18} = \frac{s}{6}$)

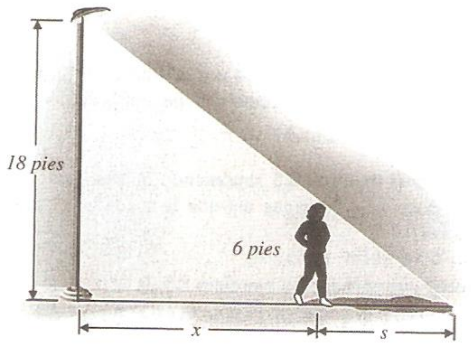



Figura para el ejercicio 43.

44. Repetir el ejercicio 43 si la persona dista 6 pies de la farola y se aleja a 3 pies/s.

45. Supongamos que una gota de lluvia se evapora manteniendo su forma esférica. Sabiendo que una esfera de radio $r$ tiene volumen $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ y área $A = 4\pi r^2$, probar que si el radio cambia con el tiempo, entonces $V' = Ar'$. Si el ritmo de evaporación ($V'$) es proporcional al área, probar que el radio cambia a ritmo constante.

46. Un incendio se extiende por un bosque en forma de círculo cuyo radio crece 5 pies/min. Cuando el radio es de 200 pies, ¿a qué ritmo crece el área incendiada?

47. La ley de Boyle para un gas a temperatura constante es $PV = c$, siendo $P$ la presión, $V$ el volumen y $c$ una constante. Supuesto que $P$ y $V$ son funciones del tiempo $t$, demostrar que $P'(t)/V'(t) = -c/V^2$.

48. En el ejercicio 47, despejar $P$ como función de $V$ y calcular $P'(V)$ tratando $V$ como la variable independiente. Comparar $P'(V)$ con $P'(t)/V'(t)$ (del ejercicio 47).

49. Está usted en un muelle, 6 pies sobre el nivel del mar, tirando de una cuerda, atada a un bote, a razón de 2 pies/s. El bote se mantiene al nivel del mar. ¿A qué velocidad se está acercando el bote al muelle cuando dista de él 20 pies? ¿Y cuándo dista 10 pies? ¿Es sorprendente que la velocidad del bote no sea constante?

50. Se arroja arena, a razón de 5 $m^3/s$, en un montón cónico cuya altura es igual al diámetro de la base. ¿A qué ritmo está cambiando la altura del montón cuando su altura es de 2 metros?

**En los ejercicios 51 y 52, localizar las tangentes horizontales y verticales.**

51. $x^2 + y^3 - 3y = 4$

52. $xy^2 - 2y = 2$

**En los ejercicios 53 y 54, hallar la segunda derivada $y''(x)$.**

53. $x^2 + y^2 = 4$

54. $x^2 + y^3 - 2y = 3$

55. En el ejemplo 8.1 es fácil encontrar un valor de $y$ para $x = 2$, pero otros valores de $y$ no son tan fáciles de hallar. Inténtelo para $x = 1,9$. Use la recta tangente del ejemplo 8.1 para estimar ese valor de $y$. Ídem para $x = 2,1$.

56. Usar la recta tangente del ejemplo 8.2 para estimar el valor de $y$ correspondiente a $x = 1,9$. Ídem para $x = 2,1$.

57. En las **curvas elípticas** hay métodos bonitos para hallar puntos con coordenadas racionales (véase el artículo «Three Fermat Trails to Elliptic Curves», de Ezra Brown, en *College Mathematics Journal*, mayo del año 2000). Si dispone de un PCS que dibuje gráficas implícitas, represente la curva elíptica dada por $y^2 = x^3 - 6x + 9$. Compruebe que los puntos $(-3, 0)$ y $(0, 3)$ pertenecen a la curva. Halle la recta que los une y pruebe que corta a la curva en otro punto con coordenadas racionales (enteras incluso).

58. Comprobar que el punto $(-1, 3)$ pertenece a la curva elíptica $y^2 = x^3 - 6x + 4$. Hallar la recta que los une y probar que corta a la curva en otro punto con coordenadas racionales.

59. Hallar $y'(x)$ por derivación implícita, sabiendo que $x^2y - 2y = 4$. A la vista de la ecuación, ¿por qué cabe esperar tangentes verticales en $x = \pm\sqrt{2}$ y horizontal en $y = 0$? Probar que no hay puntos para esos valores. Para ver qué sucede, despeje $y$ en la ecuación original y represente la gráfica. Describa qué ocurre en $x = \pm\sqrt{2}$ y en $y = 0$.

60. Demostrar que cualquier curva del tipo $xy = c$, con $c$ constante, corta a toda curva de la forma $x^2 - y^2 = k$, con $k$ constante, en ángulo recto (o sea, las rectas tangentes a las dos curvas son perpendiculares). En casos como éste, se dice que las dos familias de curvas son **ortogonales**.

61. Una honda (sección 2.1) gira, en sentido contrario a las agujas de un reloj, sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ y suelta la piedra en el punto (2,9, 0,77). Si la piedra recorre 300 pies, ¿dónde cae? [Ayuda: Hallar la recta tangente en (2,9, 0,77) y determinar el punto $(x, y)$ de esa recta tal que haga la distancia $\sqrt{(x - 2,9)^2 + (y - 0,77)^2} = 300$].

## 2.9 EL TEOREMA DEL VALOR MEDIO

En esta sección presentamos el teorema del valor medio, uno de los centros neurálgicos del Cálculo. Aunque es muy intuitivo, pondremos cuidado en demostrarlo con rigor. Es tan rico en contenido que iremos extrayendo ideas nuevas de él en muchos de los capítulos siguientes.

Antes de entrar en él, vamos a ocuparnos de un caso especial, el teorema de Rolle. Su idea es muy simple. Sea $f$ continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto $(a, b)$. Si además $f(a) = f(b)$, debe haber un punto entre $a$ y $b$ donde la recta tangente a $y = f(x)$ es horizontal. Las figuras 2.46a-2.46c muestran varias gráficas de ese tipo y todas tienen tangente horizontal en al menos un punto.

Le invitamos a dibujar a mano unas cuantas gráficas con las características enunciadas intentando que no haya un punto con tangente horizontal. Así se convencerá de que no es posible. ¡Cuidado, la función ha de ser continua y derivable!

Como $f'(x) = 0$ en un punto con tangente horizontal, eso significa que hay al menos un punto $c$ en $(a, b)$ donde $f'(c) = 0$ (figuras 2.46a-2.46c).

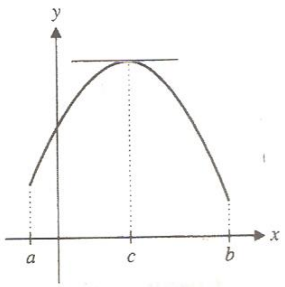



**Figura 2.46a**
Gráfica inicialmente creciente.

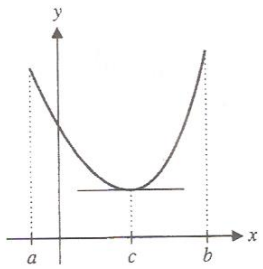



**Figura 2.46b**
Gráfica inicialmente decreciente.

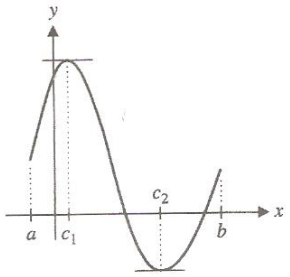



**Figura 2.46c**
Gráfica con dos tangentes horizontales.

---

**Teorema 9.1 (Teorema de Rolle)**

Sea $f(x)$ continua en $[a, b]$, derivable en $(a, b)$ y tal que $f(a) = f(b)$. Entonces existe algún $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

---

### Idea gráfica de la demostración

Si $f(x)$ es constante en $[a, b]$, el resultado es inmediato, ya que, de hecho, $f'(x) = 0$ en todos los $x$ entre $a$ y $b$.

Sea, pues, $f(x)$ no constante en $[a, b]$. En tal caso, en algún punto la gráfica tiene que empezar a subir o a bajar (figuras 2.47a y 2.47b). Nos centramos sólo en el caso de la figura 2.47a.

Como la gráfica empieza subiendo, para volver al valor inicial tendrá que rebotar en algún punto $x = c$ y empezar a bajar. (Piense en la ascensión a una montaña con regreso al punto base). En ese punto $c$, la gráfica pasa de creciente a decreciente (figura 2.47a).

Puesto que sabemos que $f'(c)$ existe, será $f'(c) > 0$, $f'(c) < 0$ o $f'(c) = 0$. Queremos probar que $f'(c) = 0$, como indican las figuras 2.47a y 2.47b. Para ello es suficiente probar que $f'(c) > 0$ o $f'(c) < 0$ son imposibles.

En efecto, si $f'(c) > 0$, de la definición alternativa de la derivada (ecuación (2.2) en la sección 2.2) se sigue que

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0.$$

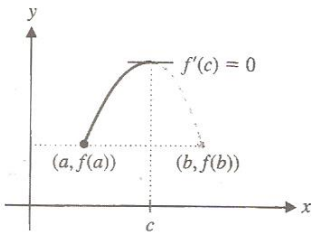



**Figura 2.47a**

La gráfica sube y rebota para bajar hasta el valor inicial.

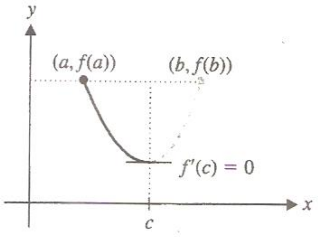



**Figura 2.47b**

La gráfica baja y rebota para subir hasta el valor inicial.

Eso dice que para $x$ suficientemente cercano al $c$,

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0. \tag{9.1}$$

En particular, para el caso en que la gráfica comienza subiendo, si $x - c > 0$ (o sea, si $x > c$) ha de ser $f(x) - f(c) > 0$, esto es, $f(x) > f(c)$, que no puede ser cierto para todos los $x$ cercanos al $c$ si la gráfica ha de descender a la derecha de $c$. Concluimos que $f'(c) > 0$ es imposible.

Un argumento similar demuestra que $f'(c) < 0$ también es imposible. En consecuencia, $f'(c) = 0$, como queríamos demostrar.

El caso en que la gráfica empieza bajando (figura 2.47b) es análogo y lo dejamos al cuidado del lector.

**Notas históricas**

**Michel Rolle (1652-1719).** Matemático francés que demostró el teorema que hoy lleva su nombre para polinomios. De origen humilde y autodidacta, se debatió entre una larga serie de trabajos, incluyendo pasante de un abogado, escribano y maestro de escuela. Fue muy enérgico como miembro de la Academia de Ciencias francesa, argumentando contra lumbreras de la talla de Descartes que $a > b$ implica $-b < -a$ (así, por ejemplo, $-2 < -1$). Curiosamente, Rolle era adversario del recién desarrollado Cálculo, al que calificaba de «colección de falacias ingeniosas».

### Ejemplo 9.1 Ilustración del teorema de Rolle

Hallar un valor $c$ que satisfaga la conclusión del teorema de Rolle para

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$$

en el intervalo $[0, 1]$.

**Solución** Antes de nada hay que verificar si se satisfacen las hipótesis del teorema. En efecto, $f(x)$ es continua y derivable en todas partes (todos los polinomios lo son). Además, $f(0) = f(1) = 2$. Su derivada es

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2.$$

Buscamos valores $c$ tales que

$$f'(c) = 3c^2 - 6c + 2 = 0$$

La fórmula cuadrática da $c = 1 + \frac{1}{3}\sqrt{3} \approx 1{,}5774$ [que no está en el intervalo $(0, 1)$] y $c = 1 - \frac{1}{3}\sqrt{3} \approx 0{,}42265 \in (0, 1)$.

### Nota 9.1

El ejemplo 9.1 no es más que una *ilustración* del teorema de Rolle. La utilidad de este teorema **no** está en la búsqueda del valor (o valores) $c$, sino en que sirve para demostrar un resultado fundamental del Cálculo: el teorema del valor medio.

A pesar de su carácter simple e intuitivo, el teorema de Rolle es clave para deducir varias propiedades de las funciones. Por ejemplo, con frecuencia estamos interesados en hallar los ceros de una función $f$ (o sea, las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$). En la práctica, suele ser difícil saber cuántos ceros tiene la función. El teorema de Rolle ayuda en este aspecto.

**Teorema 9.2**

Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$, derivable en $(a, b)$ y $f(x) = 0$ tiene dos soluciones en $[a, b]$, entonces $f'(x) = 0$ tiene al menos una solución en $(a, b)$.

**Demostración**

Es un caso especial del teorema de Rolle. Sean $x = s$ y $x = t$ los dos ceros de $f$, con $s < t$. Como $f(s) = f(t)$, el teorema de Rolle garantiza la existencia de un número $c$ tal que $s < c < t$ (por tanto, $a < c < b$) en el cual $f'(c) = 0$.

El teorema que sigue generaliza el resultado del teorema 9.2.

**Teorema 9.3**

Para todo entero $n > 0$, si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y derivable en $(a, b)$ y además $f(x) = 0$ tiene $n$ soluciones en $[a, b]$, entonces $f'(x) = 0$ tiene al menos $(n - 1)$ soluciones en $(a, b)$.

**Demostración**

Por el teorema 9.2, entre cada par de soluciones de $f(x) = 0$ hay al menos una de $f'(x) = 0$. Como hay $(n - 1)$ pares de ceros consecutivos de $f$, el teorema queda demostrado.

Gracias a los teoremas 9.2 y 9.3 podemos investigar cuántos ceros tiene una función.

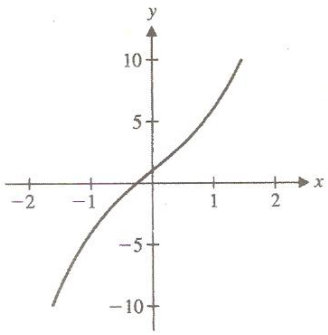



**Figura 2.48**
$y = x^3 + 4x + 1$.

**Ejemplo 9.2** **Número de ceros de una función**

Probar que $x^3 + 4x + 1 = 0$ tiene exactamente una solución.

**Solución** A la vista de la gráfica de la figura 2.48, el resultado parece razonable, pero ¿cómo estar seguros de que no hay otras soluciones fuera de esa ventana? Si llamamos $f(x) = x^3 + 4x + 1$, entonces

$$f'(x) = 3x^2 + 4 > 0$$

para todo $x$. Por el teorema 9.2, si $f(x) = 0$ tuviera dos soluciones, $f'(x) = 0$ tendría al menos una. Pero $f'(x) \neq 0$ para todo $x$, así que $f(x)$ no puede tener dos (o más) soluciones. Por tanto, tiene exactamente una solución.

A continuación generalizamos el teorema de Rolle a uno de los resultados más importantes del Cálculo.

**Teorema 9.4 (Teorema del valor medio)**

Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y derivable en $(a, b)$, existe algún $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{9.2}$$

Las hipótesis son las mismas que en el teorema de Rolle, salvo que aquí no se exige $f(a) = f(b)$. Si $f(a) = f(b)$, este teorema se reduce al teorema de Rolle.

**Demostración**

La expresión $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ es la pendiente de la recta secante que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. Queremos probar que hay un punto $x = c$ en el que la recta tangente tiene esa misma pendiente, o sea, es paralela a esa recta secante (figuras 2.49 y 2.50).

Si mira la figura 2.50 inclinando la cabeza hasta ver la secante horizontal, le recordará el teorema de Rolle (figuras 2.47a y 2.47b). De hecho, la demostración viene a ser como «inclinar la cabeza» y aplicar entonces el teorema de Rolle.

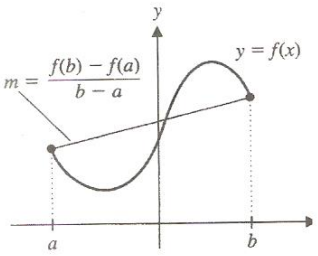



**Figura 2.49**
Recta secante.

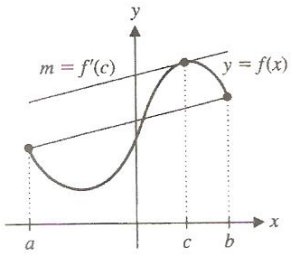



**Figura 2.50**
Terorema del valor medio.

En primer lugar, la recta secante que une $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ tiene pendiente

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

La ecuación de la recta secante es, por tanto,

$$y - f(a) = m(x - a).$$

Definimos la función «inclinada» $g$ como la diferencia entre los valores de $f$ y de la secante:

$$g(x) = f(x) - [m(x - a) + f(a)]. \tag{9.3}$$

Como $f$ es continua en $[a, b]$ y derivable en $(a, b)$, también $g$ lo es. Además,

$$g(a) = f(a) - [0 + f(a)] = 0$$

$$\begin{aligned} g(b) &= f(b) - [m(b - a) + f(a)] \\ &= f(b) - [f(b) - f(a) + f(a)] = 0. \end{aligned} \qquad \text{Porque } m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Al ser $g(a) = g(b)$, el teorema de Rolle afirma que existe un $c$ en $(a, b)$ tal que $g'(c) = 0$. Ahora bien, derivando (9.3) se obtiene

$$g'(c) = f'(c) - m. \tag{9.4}$$

Despejando $f'(c)$, llegamos al resultado anunciado

$$f'(c) = m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Antes de poner de manifiesto la potencia del teorema del valor medio, ilustramos su conclusión en un ejemplo.

### Ejemplo 9.3 Ilustración del teorema del valor medio

Hallar un valor $c$ que satisfaga la conclusión del teorema del valor medio para

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$$

en el intervalo [0, 2].

**Solución** Como todo polinomio, $f$ es continua y derivable en todas partes. Además, $f(0) = 1$ y $f(2) = 3$. El teorema del valor medio asegura que existe algún número $c$ entre 0 y 2 para el cual

$$f'(c) = \frac{3-1}{2-0} = 1.$$

Para hallar ese número $c$ hacemos

$$f'(c) = 3c^2 - 2c - 1 = 1$$

esto es,

$$3c^2 - 2c - 2 = 0.$$

La fórmula cuadrática da $c = \dfrac{1 \pm \sqrt{7}}{3}$. Sólo $c = \dfrac{1 + \sqrt{7}}{3}$ pertenece al intervalo (0, 2). La figura 2.51 muestra la gráfica de $f$, la recta secante que une los puntos inicial y final de la curva en el intervalo [0, 2] y la recta tangente en $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{7}}{3}$

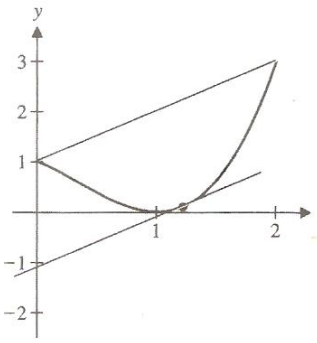



**Figura 2.51**
Teorema del valor medio.

### Nota 9.2

No hay que confundir el significado del teorema del valor medio con la ilustración del ejemplo 9.3, donde hemos encontrado el número $c$ anunciado en él. En la práctica, $c$ es desconocido. La fuerza del teorema está en que es capaz de relacionar una diferencia de valores de $f$ con una diferencia de valores de $x$, como en la ecuación (9.5). Y esa relación juega un papel crucial a partir de ahora.

Multiplicando la conclusión (9.2) del teorema del valor medio por $(b - a)$, se obtiene

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \tag{9.5}$$

Como tendremos ocasión de constatar, la mayor parte de los resultados básicos del Cálculo, incluido el **teorema fundamental del Cálculo**, son consecuencia del teorema del valor medio. De momento, deducimos un hecho que será esencial en el Capítulo 4, sobre cuántas funciones comparten una misma derivada.

Recordemos que para cualquier constante $c$,

$$\frac{d}{dx}(c) = 0.$$

Ésta es, sin duda, la derivada más simple posible. Allá va una cuestión en la que quizá no haya pensado hasta ahora: ¿hay otras funciones cuya derivada sea 0? El próximo teorema responde que no.

### Teorema 9.5

Si $f'(x) = 0$ para todo $x$ en un intervalo abierto $I$, entonces $f(x)$ es constante en $I$.

**Demostración**

Tomemos dos números $a < b$ en $I$. Como $f$ es derivable en $I$ y $(a, b) \subset I$, $f$ es derivable en $(a, b)$ y continua en $[a, b]$. Por el teorema del valor medio, sabemos que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c). \tag{9.6}$$

para algún número $c \in (a, b) \subset I$. Pero como $f'(x) = 0$ para todo $x \in I$, es $f'(c) = 0$, de modo que (9.6) implica

$$f(b) - f(a) = 0, \text{ o sea, } f(b) = f(a)$$

Puesto que todo par de puntos de $I$ se pueden tomar como $a$ y $b$, $f$ es constante en $I$.

Hay una pregunta estrechamente relacionada con el teorema 9.5. Sabemos, por ejemplo, que

$$\frac{d}{dx}(x^2 + 2) = 2x.$$

Pero ¿hay más funciones con esa misma derivada? Se le habrán ocurrido varias a simple vista: $x^2 + 3$ y $x^2 - 4$ también tienen derivada $2x$. De hecho,

$$\frac{d}{dx}(x^2 + c) = 2x,$$

para toda constante $c$. (Las gráficas de estas funciones son todas de la misma forma, traslaciones verticales todas ellas de $y = x^2$). ¿Hay todavía otras funciones con derivada $2x$? No, según el resultado que sigue.

**Corolario 9.1**

Si $g'(x) = f'(x)$ para todo $x$ en un intervalo abierto $I$, hay alguna constante $c$ tal que

$$g(x) = f(x) + c \text{ para todo } x \text{ en } I.$$

**Demostración**

Llamemos $h(x) = g(x) - f(x)$. Entonces,

$$h'(x) = g'(x) - f'(x) = 0$$

para todo $x$ en $I$. Por el teorema 9.5, $h(x) = c$, para alguna constante $c$. Y el resultado se sigue de la definición de $h(x)$.

Veremos en el Capítulo 4 que este corolario tiene consecuencias interesantes cuando intentemos invertir la operación de derivación (o sea, construir una **antiderivación**). Echamos una mirada rápida a este aspecto en el próximo ejemplo.

**Ejemplo 9.4** **Todas las funciones con una misma derivada**

Hallar todas las funciones que tienen derivada igual a $3x^2 + 1$.

**Solución** Aprovechando nuestra experiencia con la derivación, nos es fácil encontrar una función con esa derivada: $x^3 + x$. El corolario 9.1 nos dice que cualquier otra función con esa misma derivada difiere de ella en una constante. Por tanto, toda función con derivada $3x^2 + 1$ es de la forma $x^3 + x + c$ para alguna constante $c$.

En el último ejemplo utilizamos el teorema del valor medio para demostrar una desigualdad útil.

**Ejemplo 9.5** **Una desigualdad para sen $x$**

Demostrar que

$$|\text{sen } a| \leq |a| \text{ para todo } a$$

**Solución** En primer lugar, observemos que $f(x) = \text{sen } x$ es continua y derivable en todas partes y además

$$|\text{sen } a| = |\text{sen } a - \text{sen } 0|,$$

ya que sen 0 = 0. Por el teorema del valor medio, si $a \neq 0$ se tiene

$$\frac{\text{sen } a - \text{sen } 0}{a - 0} = f'(c) = \cos c, \tag{9.7}$$

para algún número $c$ entre $a$ y 0. Multiplicando (9.7) por $a$ y tomando valores absolutos, se obtiene

$$|\text{sen } a| = |\text{sen } a - \text{sen } 0| = |\cos c|\,|a - 0| = |\cos c|\,|a|. \tag{9.8}$$

Y como $|\cos c| \leq 1$ para todo número real $c$, de (9.8) se deduce que

$$|\text{sen } a| = |\cos c|\,|a| \leq (1)\,|a| = |a|,$$

como queríamos demostrar.

## EJERCICIOS 2.9

1. Los teoremas de Rolle y del valor medio suponen $f$ continua en $[a, b]$ y derivable en $(a, b)$. Recordemos que si $f$ es derivable en $x = a$, es necesariamente continua en $x = a$. Por tanto, exigiendo que $f$ fuera derivable en $[a, b]$ no sería necesario mencionar la continuidad. No hemos hecho eso porque no es necesario que $f$ sea derivable en los extremos del intervalo. La «ética» del enunciado de un teorema lleva a incluir sólo las hipótesis estrictamente necesarias. Debatir acerca de las ventajas de esta tradición. ¿Es de uso común en nuestras relaciones sociales, financieras o en nuestras conversaciones?

2. Uno de los resultados de esta sección es que si $f'(x) = g'(x)$, entonces $g(x) = f(x) + c$. Explicarlo gráficamente.

3. Explicar el corolario 9.1 en términos de funciones posición y velocidad. Esto es, si dos móviles tienen la misma función velocidad, ¿qué se puede decir de sus posiciones relativas?

4. Como hemos mencionado, el teorema de Rolle se deduce del teorema del valor medio sin más que hacer $f(a) = f(b)$. Puede dar la impresión de que, en consecuencia, el teorema de Rolle no merece ni un nombre ni un espacio propio. Para defender nuestra opción, comente por qué el teorema de Rolle es más fácil de entender que el del valor medio.

**En los ejercicios 5-8, explicar por qué no es aplicable el teorema del valor medio. Cuando las hipótesis no se cumplen, el teorema nada dice acerca de si su conclusión es verdadera. En tres de los cuatro casos propuestos, probar que no hay ningún valor $c$ que verifique la conclusión del teorema. En el otro caso, hallar el valor de $c$.**

5. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $[-1, 1]$
6. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $[-1, 2]$
7. $f(x) = \tan x$, $[0, \pi]$
8. $f(x) = x^{1/3}$, $[-1, 1]$

**En los ejercicios 9-14, comprobar las hipótesis del teorema de Rolle y del teorema del valor medio y hallar un valor de $c$ que satisface la conclusión. Ilustrar la conclusión con una gráfica.**

9. $f(x) = x^2 + 1$, $[-2, 2]$
10. $f(x) = x^2 + 1$, $[0, 2]$
11. $f(x) = x^3 + x^2$, $[0, 1]$
12. $f(x) = x^3 + x^2$, $[-1, 1]$
13. $f(x) = \operatorname{sen} x^2$, $[0, \pi/2]$
14. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $[-\pi, 0]$

15. Probar que si $f'(x) > 0$ para todo $x$, $f(x)$ es **creciente** (es decir, $f(a) < f(b)$ siempre que $a < b$).

16. Probar que si $f'(x) < 0$ para todo $x$, $f(x)$ es **decreciente** (es decir, $f(a) > f(b)$ si $a < b$).

**En los ejercicios 17-24, averiguar si la función es creciente, decreciente o ninguna de ambas cosas.**

17. $f(x) = x^3 + 5x + 1$
18. $f(x) = x^5 + 3x^3 - 1$
19. $f(x) = -x^3 - 3x + 1$
20. $f(x) = x^4 + 2x + 1$
21. $f(x) = e^x$
22. $f(x) = e^{-x}$
23. $f(x) = \ln x$
24. $f(x) = \ln x^2$

25. Probar que $x^3 + 5x + 1 = 0$ tiene exactamente una solución.

26. Probar que $x^3 + 4x - 3 = 0$ tiene exactamente una solución.

27. Probar que $x^4 + 3x^2 - 2 = 0$ tiene exactamente dos soluciones.

28. Probar que $x^4 + 6x^2 - 1 = 0$ tiene exactamente dos soluciones.

29. Probar que $x^3 + ax + b = 0$ tiene exactamente una solución para $a > 0$.

30. Probar que $x^4 + ax^2 - b = 0$ $(a > 0, b > 0)$ tiene exactamente dos soluciones.

31. Probar que $x^5 + x^3 + bx + c = 0$ tiene exactamente una solución para $a > 0$, $b > 0$.

32. Demostrar que un polinomio de grado tres (cúbico) tiene a lo sumo tres ceros. (Puede usar la fórmula cuadrática).

33. Probar que un polinomio de grado cuatro tiene a lo sumo cuatro ceros.

34. Probar que un polinomio de grado $n$ tiene a lo sumo $n$ ceros.

**En los ejercicio 35-42, hallar todas las funciones $g(x)$ tales que $g'(x) = f(x)$.**

35. $f(x) = x^2$
36. $f(x) = x^3$
37. $f(x) = x^4$
38. $f(x) = 9x^4$
39. $f(x) = 1/x^2$
40. $f(x) = \sqrt{x}$
41. $f(x) = \operatorname{sen} x$
42. $f(x) = \cos x$

43. Sea $f$ una función derivable con $f(0) = f'(0) = 0$ y $f''(0) > 0$. Argumentar que debe existir una constante $a > 0$ tal que $f(x) > 0$ para todo $x$ en el intervalo $(0, a)$. ¿Se puede concluir algo acerca de los valores de $f(x)$ para $x < 0$?

44. Demostrar que $|\cos u - \cos v| \leq |u - v|$, para todo par de números reales $u$, $v$. (Ayuda: Usar el teorema del valor medio).

45. Probar que $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \leq 0 \\ 2x - 4 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ es continua y derivable en el intervalo $(0,2)$ y que $f(0) = f(2)$. Demostrar que no existe ningún valor $c$ tal que $f'(c) = 0$. ¿Qué hipótesis del teorema de Rolle falla?

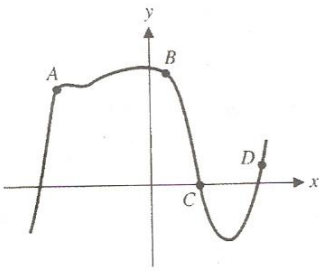
46. Sea $f(x)$ una función derivable tal que $f(0) = f'(0) = 0$. Probar, mediante un ejemplo, que no tiene por qué ser $f(x) = 0$ para todo $x$. Encontrar el fallo en la siguiente demostración falaz: Usando el teorema del valor medio con $a = x$ y $b = 0$, se tiene $f'(c) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$. Como $f(0) = 0$ y $f'(c) = 0$, se sigue que $0 = \dfrac{f(x)}{x}$, de donde $f(x) = 0$.

# EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO

1. Estimar el valor de $f'(1)$ a partir de los datos de la tabla.

| $x$ | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 2,0 | 2,6 | 3,0 | 3,4 | 4,0 |

2. Ordenar los puntos $A$, $B$, $C$ y $D$ en orden creciente de la pendiente de sus rectas tangentes.




**En los ejercicios 3-8, usar la definición de límite para calcular la derivada que se especifica.**

3. $f'(2)$ para $f(x) = x^2 - 2x$
4. $f'(1)$ para $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$
5. $f'(1)$ para $f(x) = \sqrt{x}$
6. $f'(0)$ para $f(x) = x^3 - 2x$
7. $f'(x)$ para $f(x) = x^3 + x$
8. $f'(x)$ para $f(x) = \dfrac{3}{x}$

**En los ejercicios 9-14, hallar una ecuación de la recta tangente.**

9. $y = x^4 - 2x + 1$ en $x = 1$
10. $y = \operatorname{sen} 2x$ en $x = 0$
11. $y = 3e^{2x}$ en $x = 0$
12. $y = \sqrt{x^2 + 1}$ en $x = 0$
13. $y - x^2y^2 = x - 1$ en $(1, 1)$
14. $y^2 + xe^y = 4 - x$ en $(2, 0)$

**En los ejercicios 15-18, usar la función posición dada para hallar la velocidad y la aceleración.**

15. $s(t) = -16t^2 + 40t + 10$
16. $s(t) = -9{,}8t^2 - 22t + 6$
17. $s(t) = -10e^{-2t} \operatorname{sen} 4t$
18. $s(t) = \sqrt{4t + 16} - 4$
19. En el ejercicio 15, $s(t)$ da la altura de una pelota. Calcular la velocidad de la pelota en $t = 1$. En ese momento, la pelota ¿sube o baja? Calcular la velocidad de la pelota en $t = 2$. En ese momento, la pelota ¿sube o baja?
20. En el ejercicio 17, $s(t)$ da la posición de un muelle. Comparar sus velocidades en $t = 0$ y $t = \pi$. ¿Se mueve en la misma dirección o en direcciones opuestas? ¿En qué momento se mueve con velocidad máxima?

**En los ejercicios 21 y 22, calcular las pendientes de las rectas secantes entre (a) $x = 1$ y $x = 2$, (b) $x = 1$ y $x = 1{,}5$ y (c) $x = 1$ y $x = 1{,}1$. Estimar la pendiente de la recta tangente en $x = 1$.**

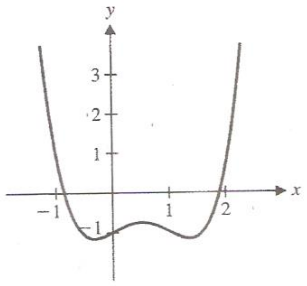
21. $f(x) = \sqrt{x + 1}$
22. $f(x) = e^{2x}$

**En los ejercicios 23-46, hallar la derivada de la función.**

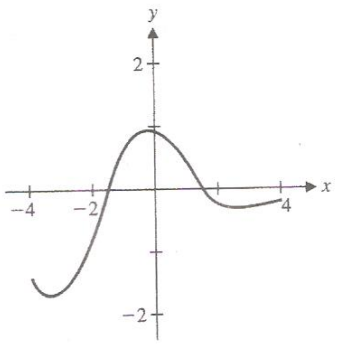
23. $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x - 1$
24. $f(x) = x^{2/3} - 4x^2 + 5$
25. $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x}} + \dfrac{5}{x^2}$
26. $f(x) = \dfrac{2 - 3x + x^2}{\sqrt{x}}$
27. $f(t) = t^2(t + 2)^3$
28. $f(t) = (t^2 + 1)(t^3 - 3t + 2)$
29. $g(x) = \dfrac{x}{3x^2 - 1}$
30. $g(x) = \dfrac{3x^2 - 1}{x}$
31. $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x$
32. $f(x) = \operatorname{sen} x^2$
33. $f(x) = \tan \sqrt{x}$
34. $f(x) = \sqrt{\tan x}$
35. $f(t) = t \operatorname{cosec} t$
36. $f(t) = \operatorname{sen} 3t \cos 4t$
37. $u(x) = 2e^{-x^2}$
38. $u(x) = (2e^{-x})^2$
39. $f(x) = x \ln x^2$
40. $f(x) = \sqrt{\ln x + 1}$
41. $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} 4x}$
42. $f(x) = \cos^2 3x$
43. $f(x) = \left(\dfrac{x + 1}{x - 1}\right)^2$
44. $f(x) = e^{\sqrt{3x}}$
45. $f(t) = te^{4t}$
46. $f(x) = \dfrac{6x}{(x - 1)^2}$

**En los ejecicios 47 y 48, usar la gráfica de $f(x)$ para esbozar la gráfica de $f'(x)$.**

47.




48.



**En los ejercicios 49-56, hallar la derivada que se indica.**

49. $f''(x)$ para $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x - 1$

50. $f'''(x)$ para $f(x) = \sqrt{x+1}$

51. $f'''(x)$ para $f(x) = xe^{2x}$

52. $f''(x)$ para $f(x) = \dfrac{4}{x+1}$

53. $f''(x)$ para $f(x) = \tan x$

54. $f^{(4)}(x)$ para $f(x) = x^6 - 3x^4 + 2x^3 - 7x + 1$

55. $f^{(26)}(x)$ para $f(x) = \operatorname{sen} 3x$

56. $f^{(31)}(x)$ para $f(x) = e^{-2x}$

57. Ingresos igual a cantidad por precio. Supongamos que el precio actual es 2,40 euros y se venden 12.000 unidades a ese precio. Si el precio aumenta 0,10 euros al año y las ventas disminuyen 1.500 unidades al año, ¿a qué ritmo cambian los ingresos?

58. El valor (en euros) de una inversión en función del tiempo $t$ (en años) viene dado por $v(t) = 200\left(\frac{3}{2}\right)^t$. Calcular el ritmo instantáneo de cambio porcentual del valor de la inversión.

59. La posición de un muelle que se mueve verticalmente viene dada por $f(t) = 4 \cos 2t$. Hallar la posición del muelle cuando su velocidad es (a) cero, (b) máxima, (c) mínima.

60. La posición de un muelle que se mueve verticalmente viene dada por $f(t) = e^{-2t} \operatorname{sen} 3t$. Hallar su velocidad en cualquier instante $t$.

**En los ejercicios 61-64, hallar la derivada $y'(x)$.**

61. $x^2y - 3y^3 = x^2 + 1$

62. $\operatorname{sen}(xy) + x^2 = x - y$

63. $\dfrac{y}{x+1} - 3y = \tan x$

64. $x - 2y^2 = 3e^{x/y}$

65. Un automóvil viaja a 50 mph en dirección norte y un coche de la policía viaja a 60 mph en dirección este. Un destello del radar mide el ritmo de cambio de la distancia entre los dos vehículos. Si en ese momento el automóvil está $\frac{1}{4}$ de milla al norte del punto de cruce y el de la policía está $\frac{1}{2}$ milla al este de ese cruce, ¿qué dato registra el radar?

66. Una mancha de fuel circular tiene un espesor de $\frac{1}{50}$ pies. Si la cantidad de fuel está creciendo a un ritmo de 40 pies$^3$ por segundo, ¿a qué ritmo crece el radio de la mancha cuando su radio es de 50 pies?

**En los ejercicios 67-70, hallar los puntos en los que la recta tangente a la curva es (a) horizontal, (b) vertical.**

67. $y = x^3 - 6x^2 + 1$

68. $y = x^{2/3}$

69. $x^2y - 4y = x^2$

70. $y = x^4 - 2x^2 + 3$

71. Probar que la ecuación $x^3 + 7x - 1 = 0$ tiene exactamente una solución.

72. Probar que la ecuación $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$ tiene exactamente dos soluciones.

**En los ejercicios 73 y 74, hallar un valor de $c$ que cumpla la conclusión del teorema del valor medio.**

73. $f(x) = x^2 - 2x$ en el intervalo $[0, 2]$

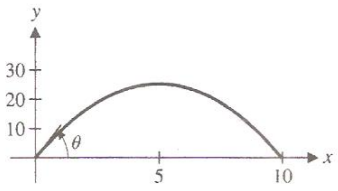
74. $f(x) = x^3 - x$ en el intervalo $[0, 2]$

**En los ejercicios 75 y 76, hallar todas las funciones $g(x)$ tales que $g'(x) = f(x)$.**

75. $f(x) = 3x^2 - \cos x$

76. $f(x) = x^3 - e^{2x}$

77. Tener buena puntería con una pelota es esencial en muchos deportes y no es nada fácil si la trayectoria, a causa de la gravedad o de otros factores, no es recta. Así, en béisbol el lanzador debe apuntar más arriba del punto de destino para tener en cuenta el efecto de la gravedad. Despreciando la resistencia del aire y cualquier movimiento lateral, el movimiento de la pelota puede aproximarse por $y = -\dfrac{16}{v^2 \cos^2 \theta} x^2 + (\tan \theta)x$. Aquí, la pelota se lanza desde la posición (0, 0) con velocidad inicial $v$ pies/s y con ángulo de elevación $\theta$.

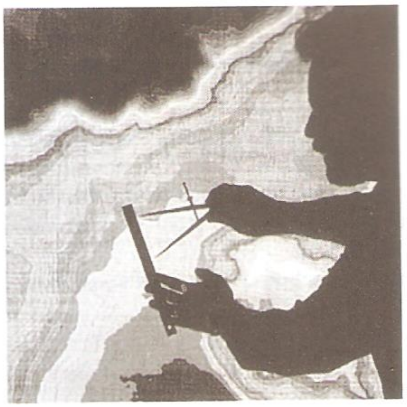



Dada esa curva, es fácil calcular la pendiente $m$ de la recta tangente en $x = 0$, pero ¿cómo podemos calcular el ángulo $\theta$ apropiado? Probar que $\tan \theta = m$. (Ayuda: Dibujar un triángulo con la recta tangente y el eje $x$ y recordar que pendiente = ascenso/desplazamiento horizontal).

Tangente es un nombre muy adecuado, ¿no cree?

Vamos a analizar cómo deben apuntar los jugadores de béisbol para alcanzar el punto de destino del modo más fácil posible. Si la longitud del lanzamiento es $L$ (pies) y queremos que la pelota llegue a la misma altura de salida (como en la figura), de la parábola se obtiene la siguiente relación entre ángulo y velocidad: $\operatorname{sen} 2\theta = 32L/v^2$. Otro lanzador envía la pelota a 130 pies/s (unas 90 mph) y tiene que llegar a 120 pies de distancia para alcanzar la primera base. Calcular el ángulo del lanzamiento (sustituir $L$ y $v$ y, por prueba y error, hallar un valor de $\theta$ correcto), la pendiente de la recta tangente y la altura a la que apunta el lanzador (o sea, la que alcanzaría la pelota si no hubiera gravedad).

¿Cuánto cambia esto para un lanzamiento a 100 pies/s? ¿Y para un lanzamiento de 300 pies a 130 pies/s? Muchos lanzadores niegan que ellos estén apuntando a tanta altura. ¿Qué aspectos de su experiencia les hace difícil creer en lo que dicen los cálculos?



# CAPÍTULO 3

# APLICACIONES DE LA DERIVADA

Una prueba relativamente reciente utilizada por los médicos para diagnosticar lesiones y enfermedades es la imagen por resonancia magnética (IRM) con la que se visualizan estructuras internas como las roturas de menisco. La posibilidad de *ver* el interior de una rodilla o de un órgano interno sin recurrir a la cirugía es una ayuda inestimable para el médico y para sus pacientes. No obstante, sigue siendo necesario que un médico experto distinga los rasgos importantes de los carentes de interés en una IRM. Si ha visto alguna vez una IRM, o incluso una placa de rayos X convencional, habrá quedado atónito ante la cantidad de detalles significativos que el médico es capaz de apreciar. En la IRM de aquí abajo, ¿puede identificar algún daño en la rodilla? Naturalmente, siempre ayuda el saber qué es lo que uno busca.

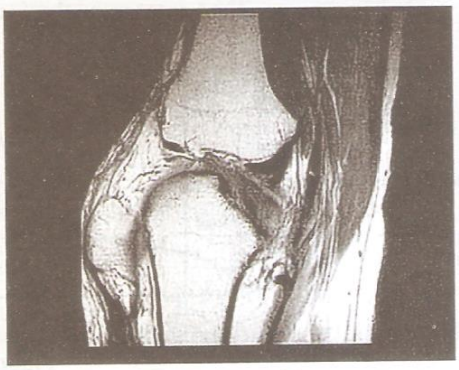
La capacidad para interpretar gráficas de forma precisa es un objetivo prioritario de este capítulo. Al final de la sección 6 debe ser capaz de tener una idea apropiada de cuáles son los rasgos característicos de una gráfica. Aunque sólo nos ocuparemos de gráficas en dos dimensiones, el lenguaje y los métodos adquiridos son trasladables a la interpretación de lecturas de registros de seísmos, mapas por sonar del fondo marino y otros medios de información gráfica que pueda encontrar.

La mayoría de la gente no reconoce la gran cantidad de cálculos matemáticos requeridos en la obtención de una buena imagen por resonancia magnética. En una IRM se usan campos magnéticos y pulsos de ondas de radio para determinar la distribución de átomos de hidrógeno en el cuerpo (véase *Visualization*, de R. Friedhoff y W. Benzon, para más detalles).

La presencia de átomos de hidrógeno, a su vez, se deduce de la liberación de energía durante el proceso de magnetización. (¡Esto dista mucho de una imagen típica de rayos X!). Resolviendo innumerables ecuaciones y efectuando cálculos complicados, un ordenador transforma los datos de energía en una imagen nítida del interior de un cuerpo humano.

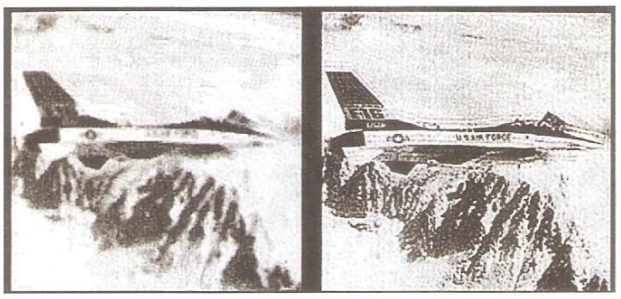
Asimismo, le puede sorprender la cantidad de cálculos que requiere llegar a obtener una gráfica significativa de una función. En cada etapa del proceso tendremos que resolver ecuaciones para identificar rasgos característicos de la gráfica. Debido al papel central que juegan las ecuaciones en este capítulo, dedicamos la segunda sección a discutir un método potente para aproximar soluciones de ecuaciones que, por su dificultad, no sabemos resolver exactamente.

Seguro que está pensando: pero si una calculadora es capaz de hacer cualquier cálculo, ¿para qué necesito saber lo que está



IRM de una rodilla.

haciendo? Una respuesta posible es que ningún algoritmo es perfecto y puede producir aproximaciones erróneas en ciertos tipos de problemas. Entendiendo cómo trabajan los algoritmos, podemos anticiparnos e identificar cuándo se ha producido un error. Por ejemplo, la figura de aquí abajo a la derecha es el resultado de mejorar la de la izquierda, desenfocada, en un ordenador.



Nótese que la fotografía de la derecha muestra un halo tenue en torno al avión. No es un fantasma ni un aura, ni siquiera ondas de sonido, sino un subproducto del algoritmo utilizado por el ordenador para realzar la nitidez de la figura. Si se conoce cómo funciona el algoritmo no se hará una interpretación inadecuada de ese halo fantasma. Sí, de acuerdo, un halo en un avión tal vez no sea un asunto muy grave, pero las matemáticas que se utilizan para mejorar esa fotografía intervienen también en la producción de una IRM ¡y en ella puede ser mucho más grave una mala interpretación! (¿Cómo se sentiría si una IRM pareciera mostrar un tumor que en realidad no existe?).

## 3.1 APROXIMACIONES LINEALES Y LA REGLA DE L'HÔPITAL

¿Para qué usamos las calculadoras? Si lo piensa, verá que para dos tareas distintas. En primer lugar, efectúan operaciones aritméticas (+, –, ×, /) mucho más deprisa de lo que se puede imaginar. No es que uno no sepa multiplicar 1.024 por 1.673. Es que la calculadora nos ahorra tiempo y no queremos renunciar a esa comodidad. En segundo lugar, usamos las calculadoras para evaluar funciones trascendentes, como seno, coseno, tangente, exponenciales o logarítmicas. Y en este caso la calculadora es más que una simple cuestión de comodidad.

Si se plantea cómo hallar sen(1,2345678) sin calculadora, probablemente quedará con la mente en blanco. ¡Tranquilo! No pasa nada raro con sus conocimientos previos. (Además, nadie le pedirá jamás que halle ese valor sin calculadora). El problema es que la función seno no es *algebraica*. Es decir, no hay fórmula para sen $x$ mediante sólo operaciones aritméticas. Entonces, ¿cómo sabe la calculadora que sen(1,2345678) $\approx$ 0,9440056953? No, no

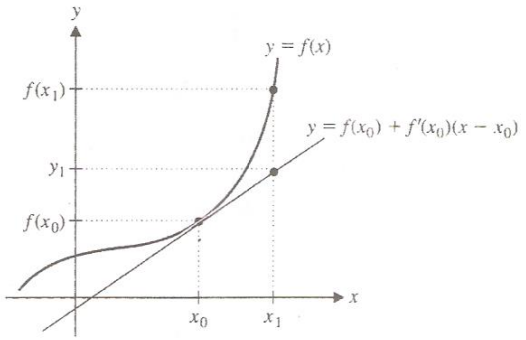



**Figura 3.1**
Aproximación lineal de $f(x_1)$.

lo *sabe*, pero tiene incorporado un programa que calcula valores **aproximados** del seno y de otras funciones trascendentes.

En esta sección avanzamos un paso en el largo camino de las aproximaciones. Vamos a presentar un método que, aunque poco refinado, apunta hacia técnicas de aproximación futuras más sofisticadas.

Nuestra intención es únicamente dar una idea de cómo se atacan los problemas de aproximación.

## Aproximación lineal

Supongamos que queremos aproximar el valor, desconocido, de $f(x_1)$ y que conocemos el valor $f(x_0)$ para un $x_0$ «próximo» a $x_1$. Por ejemplo, el valor de cos(1) es desconocido, pero sabemos que $\cos(\pi/3) = \frac{1}{2}$ exactamente y $\pi/3 \approx 1{,}047$ es «próximo» a 1. Podríamos tomar $\frac{1}{2}$ como aproximación de cos(1), pero podemos hacer algo mucho mejor.

Recordemos que la recta tangente se mantiene muy cerca de la curva $y = f(x)$ en las proximidades del punto de tangencia. En la figura 3.1, si $x_1$ es «próximo» a $x_0$ y seguimos la recta tangente en $x = x_0$ hasta el punto con $x = x_1$, la coordenada $y$ de este punto ($y_1$) diferirá poco de la del punto de la curva, que es $f(x_1)$.

Como la pendiente de la recta tangente a $y = f(x)$ en $x = x_0$ es $f'(x_0)$, su ecuación se deduce de

$$m_{tg} = f'(x_0) = \frac{y - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{1.1}$$

Despejando $y$ en (1.1) se obtiene

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{1.2}$$

A la función lineal que aparece en (1.2) y da la ecuación de la recta tangente a $y = f(x)$ en $x = x_0$, se le da un nombre especial.

---

**Definición 1.1**
Se llama **aproximación lineal** (o **aproximación por la recta tangente**) de $f(x)$ en $x = x_0$ a la función $L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

---

Nótese que la coordenada $y_1$ del punto de la recta tangente con $x = x_1$ se halla sustituyendo directamente $x = x_1$ en la ecuación (1.2):

$$y_1 = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) \tag{1.3}$$

Definimos los **incrementos** $\Delta x$, $\Delta y$ como

$$\Delta x = x_1 - x_0$$

y

$$\Delta y = f(x_1) - f(x_0)$$

Con esta notación, la ecuación (1.3) da la aproximación

$$\boxed{f(x_1) \approx y_1 = f(x_0) + f'(x_0)\,\Delta x.} \tag{1.4}$$

(Véase figura 3.2). A veces reescribimos (1.4), restando $f(x_0)$, como

$$\Delta y = f(x_1) - f(x_0) \approx f'(x_0)\,\Delta x = dy, \tag{1.5}$$

donde $dy = f'(x_0)\,\Delta x$ se llama la **diferencial** de $y$. Para completar esta notación definimos también $dx$, la diferencial de $x$, como $dx = \Delta x$, de modo que (1.5) se lee

$$dy = f'(x_0)\,dx.$$

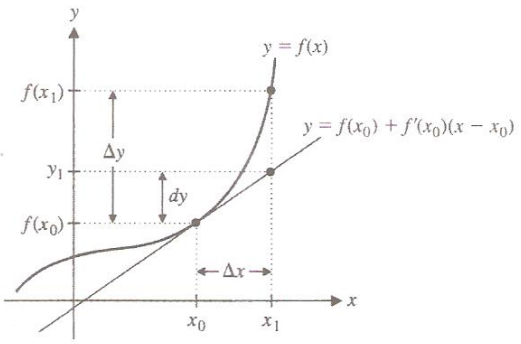



**Figura 3.2**
Incrementos y diferenciales.

Las aproximaciones lineales se pueden utilizar para estimar valores de funciones trascendentes, como ilustra el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 1.1** **Una aproximación lineal**

Hallar la aproximación lineal de $f(x) = \cos x$ en $x_0 = \pi/3$ y usarla para estimar el valor de $\cos(1)$.

**Solución** Según la definición 1.1, la aproximación lineal viene dada por $L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Aquí, $x_0 = \pi/3$, $f(x) = \cos x$ y $f'(x) = -\text{sen}\, x$. Por tanto,

$$L(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right).$$

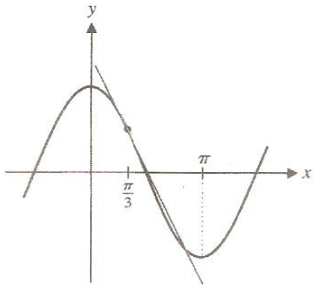



**Figura 3.3**
$y = \cos x$ y la aproximación lineal en $x_0 = \pi/3$.

La figura 3.3 muestra las gráficas de $y = \cos x$ y de la aproximación lineal de $\cos x$ para $x_0 = \pi/3$ (o sea, la recta tangente en $x_0 = \pi/3$). Nótese que la recta tangente permanece próxima a la gráfica de $y = \cos x$ sólo para los $x$ próximos a $\pi/3$. De hecho, en $x < 0$ y en $x > \pi$ la aproximación lineal es muy pobre. Esto es típico de las aproximaciones lineales (rectas tangentes).

Hemos elegido $x_0 = \frac{\pi}{3}$ porque $\frac{\pi}{3}$ es el valor más próximo a 1 para el que conocemos el coseno exactamente. Nuestra estimación final para $\cos(1)$ es

$$L(1)\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1 - \frac{\pi}{3}\right) \approx 0{,}5409.$$

La calculadora da $\cos(1) \approx 0{,}5403$, así que hemos conseguido una aproximación muy buena.

En el ejemplo siguiente deducimos una aproximación de sen $x$, válida cuando $x$ es próximo a 0. Se utiliza con frecuencia en las aplicaciones a la Física y a la Ingeniería con el fin de simplificar ecuaciones en las que aparece sen $x$.

**Ejemplo 1.2** **Aproximación lineal de sen $x$**

Hallar la aproximación lineal de $f(x) = \text{sen}\, x$ para $x$ cercanos a 0.

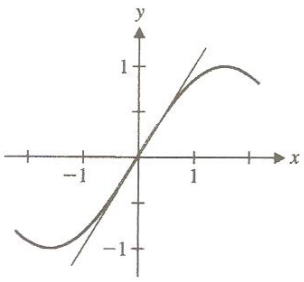



**Figura 3.4**
$y = \operatorname{sen} x$ e $y = x$.

**Solución** Aquí $f'(x) = \cos x$, de modo que por la definición 1.1 tenemos

$$\operatorname{sen} x \approx L(x) = f(0) + f'(0)\,(x - 0) = \operatorname{sen} 0 + \cos 0(x) = x.$$

Eso significa que, para $x$ en un entorno de 0, $\operatorname{sen} x \approx x$. La figura 3.4 ilustra la situación mostrando las gráficas de $y = \operatorname{sen} x$ e $y = x$.

En la figura 3.4 queda claro que la gráfica de $y = x$ sólo permanece próxima a la de $y = \operatorname{sen} x$ en la vecindad de $x = 0$. Así, pues, la aproximación $\operatorname{sen} x \approx x$ sólo es válida en esa zona. Cuanto más se aleja $x$ de 0 peor es la aproximación. Compare con la figura 3.1 para convencerse de que siempre ocurre así. Todavía quedará más claro en el ejemplo siguiente, donde ilustramos también los incrementos $\Delta x$, $\Delta y$.

### Ejemplo 1.3 Aproximación lineal de raíces cúbicas

Utilizar aproximación lineal para estimar los valores de $\sqrt[3]{8{,}02}$, $\sqrt[3]{8{,}07}$, $\sqrt[3]{8{,}15}$ y $\sqrt[3]{25{,}2}$.

**Solución** Ahora intentamos estimar valores de la función $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$. Así, pues, $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$.

El número de raíz cúbica conocida más próximo a 8,02, 8,07 y 8,15 es 8. Escribimos

$$\begin{aligned} f(8{,}02) &= f(8) + [f(8{,}02) - f(8)] \qquad \text{Sumar y restar } f(8). \\ &= f(8) + \Delta y \end{aligned} \tag{1.6}$$

De (1.5) se sigue

$$\begin{aligned} \Delta y \approx dy &= f'(8)\,\Delta x \\ &= \left(\frac{1}{3}\right) 8^{-2/3}\,(8{,}02 - 8) = \frac{1}{600}. \end{aligned} \qquad \text{Porque } \Delta x = 8{,}02 - 8 \tag{1.7}$$

Usando (1.6) y (1.7), obtenemos

$$f(8{,}02) \approx f(8) + dx = 2 + \frac{1}{600} \approx 2{,}0016667,$$

mientras que la calculadora da $\sqrt[3]{8{,}02} \approx 2{,}0016653$. Análogamente,

$$f(8{,}07) \approx f(8) + \frac{1}{3}\,8^{-2/3}\,(8{,}07 - 8) \approx 2{,}0058333$$

y

$$f(8{,}15) \approx f(8) + \frac{1}{3}\,8^{-2/3}\,(8{,}15 - 8) \approx 2{,}0125,$$

mientras que la calculadora da $\sqrt[3]{8{,}07} \approx 2{,}005816$ y $\sqrt[3]{8{,}15} \approx 2{,}012423$.

Finalmente, para aproximar $\sqrt[3]{25{,}2}$ no es 8 el número más cercano a 25,2 cuya raíz cúbica conocemos, sino 27. Por tanto, escribimos

$$f(25{,}2) = f(27) + \Delta y \approx f(27) + dy = 3 + dy.$$

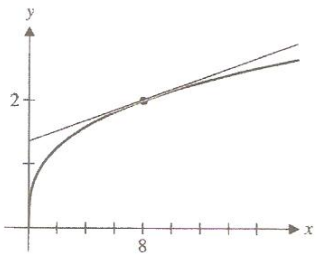



**Figura 3.5**
$y = \sqrt[3]{x}$ y la aproximación lineal en $x_0 = 8$.

En este caso,

$$dy = f'(27)\,\Delta x = \frac{1}{3}\,27^{-2/3}\,(25{,}2 - 27) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{9}\right)(-1{,}8) = -\frac{1}{15}$$

de manera que

$$f(25{,}2) \approx 3 + dy = 3 - \frac{1}{15} = 2{,}9333333$$

a comparar con el valor 2,931794 que da la calculadora. Es importante darse cuenta de que cuanto más lejos del punto de tangencia esté $x$, peor tiende a ser la aproximación. La figura 3.5 lo ilustra con nitidez: la aproximación lineal se aleja de $\sqrt[3]{x}$ cuando $x$ se aleja de 8.

Nuestros tres primeros ejemplos pretendían familiarizarle con la técnica y dar idea de lo buena (o mala) que puede ser la aproximación lineal. En el ejemplo que sigue no hay respuesta exacta con la qué comparar la aproximación. El uso que se hace en él de la aproximación lineal se conoce como **interpolación lineal**.

### Ejemplo 1.4 Interpolación lineal

| $x$ | 6 | 10 | 14 |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 84 | 60 | 32 |

El precio de un artículo afecta a su demanda. Una empresa preve que a $x$ euros la unidad, se venderán $f(x)$ (en miles) cámaras fotográficas, con las estimaciones de la tabla adjunta. Estimar el número de cámaras que se venderán a un precio de 7 euros.

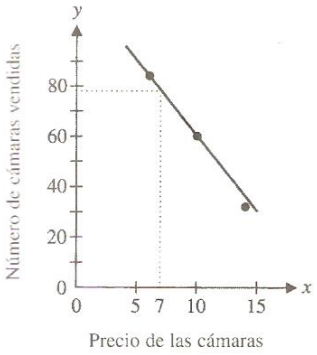



**Figura 3.6**
Interpolación lineal.

**Solución** El valor más cercano a 7 en la tabla es 6. [O sea, 6 es el valor de $x$ más próximo a 7 en el que conocemos $f(x)$]. La aproximación lineal de $f(x)$ en $x = 6$ es

$$L(x) = f(6) + f'(6)(x - 6).$$

Por la tabla sabemos que $f(6) = 84$, pero no conocemos $f'(6)$. Tampoco podemos calcularla, porque no tenemos una fórmula para $f(x)$. Lo mejor que podemos hacer es aproximar la derivada con los datos disponibles como

$$f'(6) \approx \frac{f(10) - f(6)}{10 - 6} = \frac{60 - 84}{4} = -6.$$

La aproximación lineal es, por tanto,

$$L(x) = 84 - 6(x - 6).$$

Con ella estimamos que el número de cámaras vendidas a 7 euros (o sea, $x = 7$) sería $L(7) = 84 - 6 = 78$ (en miles). La interpretación gráfica puede verse en la figura 3.6, donde la recta es la aproximación lineal (en este caso, la recta secante que une los dos primeros puntos de los datos).

## La regla de L'Hôpital

Cerramos esta sección aplicando la aproximación lineal al cálculo de algunos límites que suponen un desafío nada fácil. Es un caso especial de la regla de L'Hôpital que estudiaremos con detalle en la sección 7.6

Repase la sección 2.5, donde hemos resuelto el límite $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ por argumentos geométricos intrincados. Ese límite es de la forma indeterminada $\frac{0}{0}$ (los límites de numerador y denominador son 0), pero no hay forma de simplificar la expresión. Más en general, desearíamos saber evaluar $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$, donde $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = 0$. La aproximación lineal sugiere una solución, como sigue.

Si $f$ y $g$ son derivables en $x = c$, son necesariamente continuas en $x = c$, así que $f(c) = \lim_{x \to c} f(x) = 0$ y $g(c) = \lim_{x \to c} g(x) = 0$. Sus aproximaciones lineales son

$$f(x) \approx f(c) + f'(c)(x - c) = f'(c)(x - c)$$

y

$$g(x) \approx g(c) + g'(c)(x - c) = g'(c)(x - c)$$

donde hemos usado que $f(c) = 0$ y $g(c) = 0$. Como sabemos, la aproximación mejora cuando $x$ tiende a $c$, de manera que si el límite existe debemos esperar que

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(c)(x - c)}{g'(c)(x - c)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

supuesto que $g'(c) \neq 0$.

Nótese que si $f'(x)$ y $g'(x)$ son continuas en $x = c$ y $g'(c) \neq 0$, entonces $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \to c} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.
Resumimos todo esto en el siguiente resultado.

**Notas históricas**

**Guillaume de L'Hôpital (1661-1704).** Este matemático francés fue el primero en publicar la regla que hoy lleva su nombre. De familia noble, recibió lecciones de Cálculo del brillante matemático Johann Bernoulli. Matemático competente, L'Hôpital es conocido sobre todo como autor del primer libro de Cálculo. Fue amigo de muchos de los matemáticos más relevantes del siglo XVII.

**Teorema 1.1 (Regla de L'Hôpital)**
Sean $f$ y $g$ derivables en el intervalo $(a, b)$ excepto posiblemente en un punto $x = c$ en $(a, b)$. Y supongamos que $g'(x) \neq 0$ en $(a, b)$ excepto posiblemente en $x = c$. Si $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = 0$ y $\lim_{x \to c} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, entonces

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Aquí demostraremos sólo el caso en que $f, f', g$ y $g'$ son continuas en todo el intervalo $(a, b)$ y $g'(c) \neq 0$ (el caso general se demuestra en el apéndice A). Recordemos la forma alternativa de la derivada (sección 2.2):

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Por la continuidad de $f'$ y $g'$,

$$\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{\lim_{x \to c} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}}{\lim_{x \to c} \dfrac{g(x) - g(c)}{x - c}} = \lim_{x \to c} \frac{\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}}{\dfrac{g(x) - g(c)}{x - c}} = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)}.$$

Además, por ser $f$ y $g$ continuas en $x = c$, se tiene

$$f(c) = \lim_{x \to c} f(x) = 0 \text{ y } g(c) = \lim_{x \to c} g(x) = 0.$$

Por consiguiente,

$$\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} = \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)},$$

que es lo que queríamos demostrar.

**Ejemplo 1.5** **A vueltas con un límite ya conocido**

Calcular $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$.

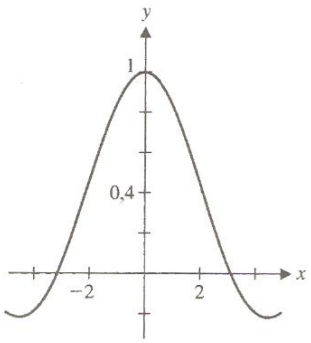



**Figura 3.7**
$y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$.

**Solución** Es de la forma indeterminada $\frac{0}{0}$. Tanto $f(x) = \operatorname{sen} x$ como $g(x) = x$ son continuas y derivables en todas partes. Además, $g'(x) = \dfrac{d}{dx}(x) = 1 \neq 0$, de manera que todas las hipótesis de la regla de L'Hôpital se satisfacen. En la figura 3.7 parece que el límite es aproximadamente 1. La regla de L'Hôpital confirma esa sospecha:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{d}{dx}(\operatorname{sen} x)}{\dfrac{d}{dx}(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{1}{1} = 1.$$

lo mismo que habíamos demostrado por un complicado argumento geométrico en la sección 2.5.

El cálculo de algunos límites requiere aplicar la regla de L'Hôpital más de una vez.

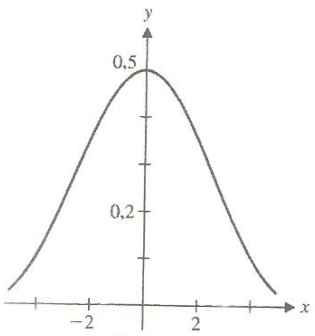



**Figura 3.8**

$y = \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$.

### Ejemplo 1.6 Un límite que exige aplicar la regla de L'Hôpital dos veces

Calcular $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$.

**Solución** De nuevo estamos ante una forma indeterminada $\frac{0}{0}$ y es fácil verificar que se cumplen las hipótesis de la regla de L'Hôpital. La figura 3.8 indica que el límite es aproximadamente 0,5. Usando la regla de L'Hôpital,

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{2x},$$

que sigue siendo una forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$. Para este nuevo límite se vuelven a satisfacer las condiciones exigidas en el teorema 1.1. Aplicando otra vez la regla de L'Hôpital se obtiene

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}.$$

### Nota 1.1

Un error muy frecuente consiste en aplicar la regla de L'Hôpital indiscriminadamente, sin comprobar antes que el límite tiene la forma indeterminada $\frac{0}{0}$. ¡Cuidado con eso!

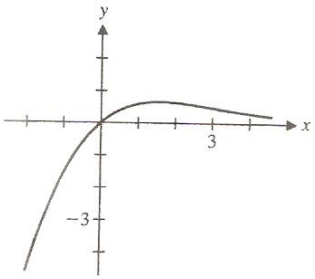



**Figura 3.9**

$y = \dfrac{x^2}{e^x - 1}$.

### Ejemplo 1.7 Uso erróneo de la regla de L'Hôpital

Encontrar el error en la cadena de igualdades

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{e^x - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \to 0} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{1} = 2.$$

**Solución** La figura 3.9 indica que el límite es aproximadamente 0, de manera que el valor 2 debe ser incorrecto. El primer límite, $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^2}{e^x - 1}$, es del tipo $\frac{0}{0}$ y las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = e^x - 1$ satisfacen las hipótesis de la regla de L'Hôpital. En consecuencia, la primera igualdad: $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^2}{e^x - 1} = \lim_{x \to 0} \dfrac{2x}{e^x}$ es correcta.

Pero observemos que $\lim_{x \to 0} \dfrac{2x}{e^x} = \dfrac{0}{1} = 0$, así que la regla de L'Hôpital **no** es aplicable aquí. La evaluación correcta es

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{e^x - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{2x}{e^x} = \frac{0}{1} = 0.$$

# EJERCICIOS 3.1

1. Hemos visto que las aproximaciones lineales pueden ser «buenas» o «malas». Explicar por qué, en un entorno de $x = 0$, decimos que $y = x$ es una buena aproximación de $y = \operatorname{sen} x$ en un entorno de $x = 0$ y que $y = 1$ no es una buena aproximación de $y = \cos x$. (Ayuda: Representar $y = x$ e $y = \operatorname{sen} x$ en unos mismos ejes. A continuación, hacer lo mismo con $y = 1$ e $y = \cos x$).

2. Explicar en unas líneas, en términos de rectas tangentes, por qué la aproximación del ejemplo 1.3 empeora cuando $x$ se aleja de 8.

3. Un amigo tiene dificultades con la regla de L'Hôpital. Cuando se le pide que resuelva un problema con ella dice: «Primero, sustituyo $x$ y obtengo 0 dividido entre 0. Entonces derivo aplicando la regla del cociente. A continuación, sustituyo $x$ otra vez». Razonar qué error está cometiendo y cómo se corrige.

4. Dos atletas parten de la salida, uno con velocidad doble que la del otro. Si $f(t)$ y $g(t)$ representan sus posiciones en $t \geq 0$, explicar por qué podemos suponer $f(0) = g(0) = 0$ y

$\lim_{t \to 0^+} \frac{f'(t)}{g'(t)} = 2$. Explicar, en términos de las posiciones de los atletas, por qué es válida la regla de L'Hôpital: $\lim_{t \to 0} \frac{f(t)}{g(t)} = 2$.

**En los ejercicios 5-12, hallar la aproximación lineal de $f(x)$ en $x = x_0$. Representar la función y su aproximación lineal.**

5. $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$
6. $f(x) = (x + 1)^{1/3}$, $x_0 = 0$
7. $f(x) = \sqrt{2x + 9}$, $x_0 = 0$
8. $f(x) = 2/x$, $x_0 = 1$
9. $f(x) = \operatorname{sen} 3x$, $x_0 = 0$
10. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $x_0 = \pi$
11. $f(x) = e^{2x}$, $x_0 = 0$
12. $f(x) = e^{x^2}$, $x_0 = 0$

**En los ejercicios 13-16, hallar la aproximación lineal en $x = 0$ para probar que las siguientes aproximaciones, de uso frecuente, son válidas para $x$ «pequeños». Comparar las aproximaciones con los valores exactos para $x = 0{,}01$, $x = 0{,}1$ y $x = 1$.**

13. $\operatorname{tg} x \approx x$
14. $\sqrt{1 + x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$
15. $\sqrt{4 + x} \approx 2 + \frac{1}{4}x$
16. $e^x \approx 1 + x$

**En los ejercicios 17-22, usar aproximación lineal para estimar la cantidad propuesta.**

17. sen 1
18. $\operatorname{sen} \frac{9}{4}$
19. $\sqrt[4]{16{,}04}$
20. $\sqrt[4]{16{,}08}$
21. $\sqrt[4]{16{,}16}$
22. ln 2,8 (Ayuda: ln $e$ = 1).

23. Calcular el error (el valor absoluto de la diferencia entre el valor exacto y la aproximación lineal) en los ejercicios 19-21.

24. Pensando en los ejercicios 19-21 como números de la forma $\sqrt[4]{16 + \Delta x}$, denotar los errores por $e(\Delta x)$, donde $\Delta x = 0{,}04$, $\Delta x = 0{,}08$, $\Delta x = 0{,}16$. A la vista de esos tres cálculos, determinar un valor de la constante $c$ tal que $e(\Delta x) \approx c(\Delta x)^2$.

25. Usar un PCS para determinar el rango de $x$ en el ejercicio 13 en el que la aproximación tiene error menor que 0,01. En otras palabras, hallar los $x$ tales que $|\tan x - x| < 0{,}01$.

26. Usar un PCS para determinar el rango de $x$ en el ejercicio 16 en el que la aproximación tiene error menor que 0,01. En otras palabras, hallar los $x$ tales que $|e^x - (1 + x)| < 0{,}01$.

**En los ejercicios 27-30, usar aproximación lineal para estimar la cantidad que se especifica.**

27. Una compañía estima que venderá $f(x)$ miles de juegos para ordenador si el precio es de $x$ euros (véase la tabla).

| $x$ | 20 | 30 | 40 |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 18 | 14 | 12 |

Estimar el número de juegos vendidos a un precio de (a) 24 euros, (b) 36 euros.

28. Una distribuidora estima que en un día de temperatura $x$ (grados Fahrenheit) se venden $f(x)$ latas de refresco (véase la tabla).

| $x$ | 60 | 80 | 100 |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 84 | 120 | 168 |

Estimar el número de latas vendidas con una temperatura de (a) 72°, (b) 94°.

29. Un director de cine de animación introduce la posición $f(t)$ de la cabeza de un personaje tras $t$ tomas de película como recoge la tabla.

| $t$ | 200 | 220 | 240 |
|---|---|---|---|
| $f(t)$ | 128 | 142 | 136 |

Si el software del ordenador usa interpolación para determinar posiciones intermedias, calcular la posición en la toma (a) 208, (b) 232.

30. Un sensor mide la posición $f(t)$ de una partícula $t$ microsegundos después de una colisión (véase la tabla).

| $t$ | 5 | 10 | 15 |
|---|---|---|---|
| $f(t)$ | 8 | 14 | 18 |

Estimar la posición de la partícula en los instantes (a) $t = 8$ y (b) $t = 12$.

**En los ejercicios 31-42, evaluar el límite mediante la regla de L'Hôpital.**

31. $\lim_{x \to 2} \frac{x - 2}{x^2 - 4}$
32. $\lim_{x \to -1} \frac{x + 1}{x^2 + 4x + 3}$
33. $\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{\operatorname{sen} x - x}$
34. $\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x - \operatorname{tg} x}$
35. $\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{\ln x}$
36. $\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x^2}$
37. $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{\cos x - 1}$
38. $\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\ln(x + 1)}$
39. $\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{\cos x - x}$
40. $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$
41. $\lim_{x \to 1} \frac{\ln(\ln x)}{\ln x}$
42. $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen} x}$

43. Calcular $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x^2}{x^2}$ y comparar el resultado con el del ejemplo 1.5.

44. Calcular $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^4}$ y comparar el resultado con el del ejemplo 1.6.

45. Usando los resultados de los ejercicios 43 y 44, hallar $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x^3}{x^3}$ y $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x^3}{x^6}$ sin efectuar cálculos.

46. Si $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$, ¿qué se puede decir acerca de $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x^2)}{g(x^2)}$?

Explicar por qué el hecho de saber que $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$, para $a \neq 0$, no dice nada sobre $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x^2)}{g(x^2)}$.

47. Hallar los errores en la cadena de igualdades

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen} x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x}{2} = -\frac{1}{2}.$$

A continuación, calcular el valor correcto del límite.

48. Hallar los errores en la cadena de igualdades

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen} x}{2} = 0.$$

A continuación, calcular el valor correcto del límite.

49. Cancelando «sen» en $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 2x}$ se obtiene $\lim_{x\to 0} \dfrac{3x}{2x}$ y cancelando aquí $x$ se obtiene $\frac{3}{2}$. Este valor es correcto. ¿Son válidos los pasos que han llevado a él? Argumentar, por aproximación lineal, que el primer paso era de esperar que diera una respuesta correcta.

50. Calcular $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} nx}{\operatorname{sen} mx}$ para constantes $n$ y $m$ no nulas.

51. Calcular $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{cx}-1}{x}$ para cualquier valor de $c$.

52. Calcular $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan cx - cx}{x^3}$ para cualquier valor de $c$.

53. La velocidad de una onda de $L$ metros en agua de profundidad $d$ metros satisface la ecuación

$$v^2 = \frac{4{,}9L}{\pi} \cdot \frac{e^{2\pi d/L} - e^{-2\pi d/L}}{e^{2\pi d/L} + e^{-2\pi d/L}}.$$

Considerando $L$ constante y viendo $v^2$ como una función $f(d)$, usar aproximación lineal para probar que $f(d) \approx 9{,}8d$ para valores pequeños de $d$. Es decir, en aguas poco profundas la velocidad de la onda es aproximadamente $\sqrt{9{,}8d}$ y es independiente de la longitud de ondas $L$.

54. La ley de Planck establece que la densidad de energía de la radiación del cuerpo negro con longitud de onda $x$ viene dada por

$$f(x) = \frac{8\pi hcx^{-5}}{e^{hc/(kTx)} - 1}.$$

Usar la aproximación lineal del ejercicio 16 para demostrar que $f(x) \approx 8\pi kT/x^4$, lo que se conoce como ley de Rayleigh-Jeans.

55. En este ejercicio introducimos las **series de Taylor**, objeto de estudio en el Capítulo 8.

Explicar por qué $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ significa que, para $x$ próximos a 0, sen $x \approx x$. Representar $y = \operatorname{sen} x$ e $y = x$ para ver que es cierto. Al alejarnos de $x = 0$, la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ se curva ya mucho. Vamos a exhibir polinomios de orden superior que ajustan esa curvatura.

(a) Probar que $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x - x}{x^2} = 0$. Esto significa que sen $x - x \approx 0$ y, por tanto, de nuevo, sen $x \approx x$.

(b) Probar que $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x - x}{x^3} = -\frac{1}{6}$. Esto significa que, si $x$ es próximo a 0, sen $x - x \approx -\frac{1}{6}x^3$, o sea, sen $x \approx x - \frac{1}{6}x^3$. Representar estas dos funciones para apreciar cómo ajustan.

(c) Calcular $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x - (x - x^3/6)}{x^4}$ y $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x - f(x)}{x^5}$ para ir obteniendo otras aproximaciones de $f(x)$.

(d) Observar la pauta que siguen todos esos polinomios. (Ayuda: 6 = 3!, 120 = 5!). Siguiendo esa pauta, aproximar sen $x$ mediante un polinomio de grado 11 y representarlo junto con sen $x$.

## 3.2 EL MÉTODO DE NEWTON

Volvemos al problema de cómo hallar los ceros de una función. El método de bisección (sección 1.3), aunque tedioso, era seguro para funciones continuas. En esta sección presentamos otro método que suele ser mucho más rápido que el de bisección. Buscamos valores de $x$ tales que $f(x) = 0$. Esos valores se llaman indistintamente **raíces** de la ecuación $f(x) = 0$ o **ceros** de la función $f$. Si

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

el problema no tiene dificultad, ya que conocemos una fórmula explícita para las soluciones (la fórmula cuadrática). Pero ¿y si deseamos hallar los ceros de

$$f(x) = \operatorname{tg} x - x?$$

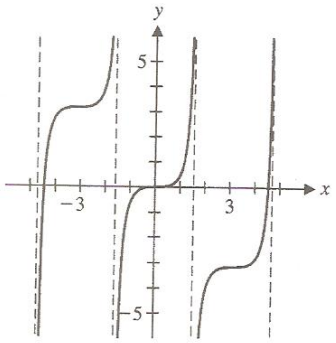



**Figura 3.10**
$y = \tan x - x$.

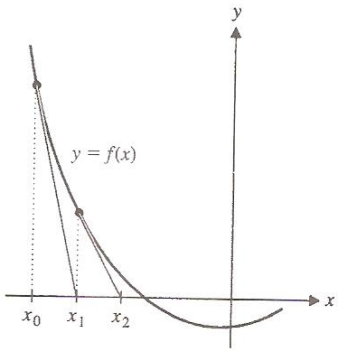



**Figura 3.11**
Método de Newton.

Esta función no es algebraica y no se conoce ninguna fórmula para calcular sus ceros. No obstante, vemos ceros en la figura 3.10 (de hecho, hay infinitos). La cuestión es ¿cómo **hallarlos**?

En general, cuando queremos hallar soluciones aproximadas de $f(x) = 0$, partimos de una **estimación inicial** razonable $x_0$. Una vez más, como la recta tangente a $y = f(x)$ en $x = x_0$ está próxima a la curva, podemos seguir la tangente para ver dónde corta al eje $x$ (figura 3.11).

Nótese que eso parece proporcionar una aproximación mejor del cero buscado. La ecuación de la recta tangente a $y = f(x)$ en $x = x_0$ viene dada por la aproximación lineal en $x_0$ [ecuación (1.2)],

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{2.1}$$

Sea $x_1$ la intersección de la recta tangente con el eje $x$ [se calcula haciendo $y = 0$ en (2.1)]. Se tiene

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

y despejando $x_1$ queda

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Si repetimos el proceso, ahora con $x_1$ como estimación inicial, obtendremos otra aproximación mejor,

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)},$$

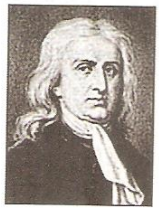
y así sucesivamente (figura 3.11). Así se generan **aproximaciones sucesivas**

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \text{ para } n = 0, 1, 2, 3, \ldots} \tag{2.2}$$

Este proceso se conoce como **método de Newton-Raphson**, o simplemente **método de Newton**. Si la figura 3.11 no engaña, las aproximaciones tienden al valor del cero al crecer $n$.

El método de Newton es, en general, muy rápido y muy seguro, como ilustra el ejemplo siguiente.

**Notas históricas**



**Sir Isaac Newton (1642-1727).** Matemático y científico inglés, coinventor del Cálculo. En un período de 2 años (1665 a 1667), Newton hizo aportaciones fundamentales en Cálculo y en Óptica, además de descubrir la ley de gravitación. No publicó sus resultados matemáticos en un primer momento. Más bien, como ocurrió con el método de Newton, los fue introduciendo como instrumentos útiles en sus artículos científicos. Su obra *Mathematical Principles of Natural Philosophy* se considera uno de los mayores logros de la mente humana.

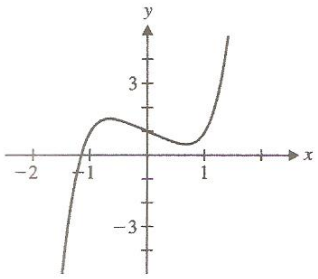



**Figura 3.12**
$y = x^5 - x + 1$.

### Ejemplo 2.1 Aplicación del método de Newton

Hallar un cero de $f(x) = x^5 - x + 1$.

**Solución** La figura 3.12 sugiere que el único cero de $f$ está entre $x = -2$ y $x = -1$. Además, $f(-1) = 1 > 0$ y $f(-2) = -29 < 0$. Como $f$ es continua (todos los polinomios lo son), el teorema del valor intermedio (teorema 3.4 de la sección 1.3) asegura que $f$ tiene un cero en el intervalo $(-2, -1)$. La figura indica que el cero está más cerca de $x = -1$, así que elegimos como estimación inicial $x_0 = -1$. Como $f'(x) = 5x^4 - 1$, el método de Newton da

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$= x_n - \frac{x_n^5 - x_n + 1}{5x_n^4 - 1}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Usando la estimación inicial $x_0 = -1$, se obtiene

$$x_1 = -1 - \frac{(-1)^5 - (-1) + 1}{5(-1)^4 - 1}$$

$$= -1 - \frac{1}{4} = -\frac{5}{4}.$$

Del mismo modo, partiendo de $x_1 = -\frac{5}{4}$, obtenemos una aproximación mejor,

$$x_2 = -\frac{5}{4} - \frac{\left(-\frac{5}{4}\right)^5 - \left(-\frac{5}{4}\right) + 1}{5\left(-\frac{5}{4}\right)^4 - 1}$$

$$= -1{,}178459394$$

y así sucesivamente se van encontrando

$$x_3 = -1{,}167537384,$$
$$x_4 = -1{,}167304083$$

y

$$x_5 = -1{,}167303978 = x_6.$$

Puesto que $x_5 = x_6$, no haremos más progresos aunque calculemos más pasos. Como comprobación de la bondad de nuestra aproximación, evaluamos

$$f(x_6) \approx 3 \times 10^{-12}$$

Es casi cero, por lo que proponemos $x_6 = 1{,}167303978$ como **cero aproximado** de $f$.

El método de Newton encaja en multitud de situaciones, aunque, como en el ejemplo que sigue, puede ser necesario traducir previamente el problema en términos de ceros de una función.

### Ejemplo 2.2 Aproximación de una raíz cúbica por el método de Newton

Usar el método de Newton para aproximar $\sqrt[3]{7}$.

**Solución** En un problema de este tipo podríamos usar aproximación lineal, pero el método de Newton llegará más rápido a una muy buena aproximación. Para que sea aplicable el

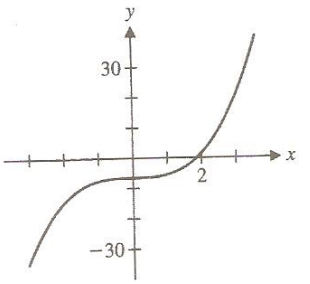



**Figura 3.13**

$y = x^3 - 7$.

método de Newton necesitamos plantear el problema en la forma $f(x) = 0$. Pues bien, sea $x = \sqrt[3]{7}$. Entonces, $x^3 = 7$, que se puede escribir como

$$f(x) = x^3 - 7 = 0.$$

Aquí $f'(x) = 3x^2$. La estimación inicial la sugiere la figura 3.13. Vemos que el cero está cerca de $x = 2$, así que elegimos $x_0 = 2$. Con esos datos, el método de Newton da

$$x_1 = 2 - \frac{2^3 - 7}{3(2^2)} = \frac{23}{12} \approx 1{,}916666667.$$

Continuando este proceso, se obtienen

$$x_2 \approx 1{,}912938458$$

y

$$x_3 \approx 1{,}912931183 \approx x_4.$$

Además,

$$f(x_4) \approx -5 \times 10^{-12}$$

y, por tanto, $x_4$ es un cero aproximado de $f'$. Y, en consecuencia,

$$\sqrt[3]{7} \approx 1{,}912931183.$$

Compare este valor con el que da la calculadora para $\sqrt[3]{7}$ y apreciará en su justa medida la precisión del método de Newton.

### Nota 2.1

Aunque es muy preciso, como muestran los dos ejemplos previos, el método de Newton tiene un defecto: no siempre funciona. Le aconsejamos comprobar si los valores sucesivos obtenidos en él se van acercando cada vez más entre sí (y hacia el cero buscado, confiamos). No se detenga hasta que sobrepase los límites de precisión de su calculadora. Además, compruebe que el valor de la función en el presunto cero aproximado es casi 0; de lo contrario, rechace el resultado de la aproximación.

El ejemplo próximo deja claro que el método de Newton requiere una buena estimación inicial.

### Ejemplo 2.3 Efecto de una mala estimación inicial en el método de Newton

Hallar un cero aproximado de $f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 1$ por el método de Newton.

**Solución** La figura 3.14 indica la existencia de un cero en el intervalo (2, 3). Si adoptamos la (nada buena) estimación inicial $x_0 = 1$, obtenemos $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, etc. (compruébelo). El método de Newton es muy sensible a la estimación inicial y hemos elegido una mala. Si se parte de $x_0 = 2$ (mucho más razonable), el método de Newton converge rápidamente al cero aproximado 2,769292354. (Compruebe esto también).

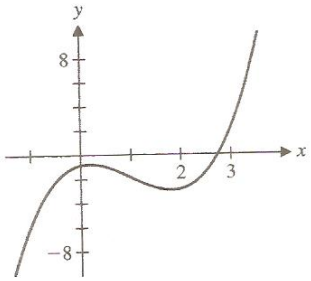



**Figura 3.14**

$y = x^3 - 3x^2 + x - 1$.

| $n$ | $x_n$ |
|---|---|
| 1 | −9,5 |
| 2 | −65,9 |
| 3 | −2302 |
| 4 | −2654301 |
| 5 | $-3{,}5 \times 10^{12}$ |
| 6 | $-3{,}1 \times 10^{24}$ |

Iteraciones del método de Newton con $x_0 = -2$.

Una mala elección de la estimación inicial $x_0$ puede acarrear consecuencias catastróficas, como acabamos de ver. Pero una buena elección de $x_0$ tampoco garantiza la convergencia del método de Newton. Para algunas funciones, la convergencia será lenta por buena que sea la estimación inicial. Por convergencia lenta entendemos que son necesarias muchas iteraciones para lograr una mejoría significativa en la aproximación.

### Ejemplo 2.4 Convergencia inusualmente lenta del método de Newton

Usar el método de Newton con (a) $x_0 = -2$, (b) $x_0 = -1$ y (c) $x_0 = 0$ para intentar localizar el cero de $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$.

**Solución** No hay misterio: el único cero es $x = 1$. Pero ¿qué sucede si aplicamos el método de Newton con las estimaciones iniciales propuestas?

(a) Con $x_0 = -2$ se obtienen los valores de la tabla adjunta, que huyen del cero a toda prisa. ¿Por qué? La figura 3.15 muestra las gráficas de $f(x)$ y de la recta tangente en $x = -2$. Si seguimos la recta tangente hasta que corte al eje $x$, nos vamos muy lejos del cero. Y como

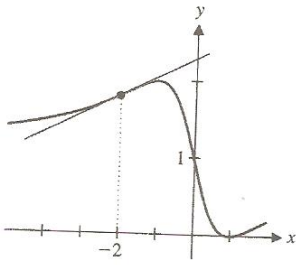



**Figura 3.15**

$y = \dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$ y la recta tangente en $x = -2$.

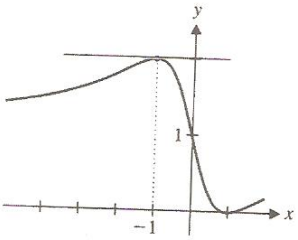



**Figura 3.16**

$y = \dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$ y la recta tangente en $x = -1$.

las rectas tangentes en $x \le -2$ tienen pendiente positiva, cada nuevo paso del proceso nos lleva más lejos todavía. (Compruebe que $f'(x) > 0$ en $x \le -2$ y trace varias rectas tangentes sucesivas para comprobar lo que acabamos de decir).

(b) Si partimos de $x_0 = -1$, una estimación inicial mejor, no podemos ni calcular $x_1$. En este caso, $f'(x_0) = 0$, de manera que el método de Newton falla. Gráficamente, eso significa que la recta tangente a $y = f(x)$ en $x = -1$ es horizontal (figura 3.16) y no corta al eje $x$.

(c) Con la estimación $x_0 = 0$, aún mejor, obtenemos las aproximaciones sucesivas de la tabla siguiente.

| $n$ | $x_n$ | $n$ | $x_n$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0,5 | 7 | 0,9881719 |
| 2 | 0,70833 | 8 | 0,9940512 |
| 3 | 0,85653 | 9 | 0,9970168 |
| 4 | 0,912179 | 10 | 0,9985062 |
| 5 | 0,95425 | 11 | 0,9992525 |
| 6 | 0,976614 | 12 | 0,9996261 |

Iteraciones del método de Newton con $x_0 = 0$.

Por fin hemos dado con una estimación inicial con la que el método de Newton converge a la raíz $x = 1$. Lo inusual de este ejemplo es que las aproximaciones sucesivas de la tabla convergen a 1 mucho más despacio que en los ejemplos precedentes. Mientras en el ejemplo 2.1 las iteraciones ya no cambiaban a partir de $x_5$, aquí $x_5$ es una aproximación poco precisa. Es más, en este caso $x_{12}$ es menos precisa que la $x_5$ del ejemplo 2.1. En los ejercicios seguimos analizando este tipo de comportamiento.

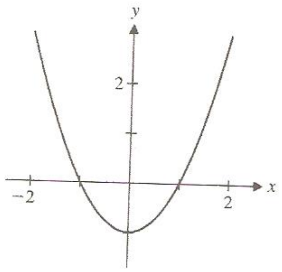
A pesar de los defectos señalados, el método de Newton es, las más de las veces, eficiente y fiable. Basta manejarlo con un poco de prudencia y con sentido común. Si las sucesivas aproximaciones convergen a algún valor no consistente con la gráfica, deben analizarse los resultados con cuidado y, tal vez, ensayar con una estimación inicial distinta.

## EJERCICIOS 3.2

1. En el ejemplo 2.2 comentamos que se podía haber utilizado una aproximación lineal o el método de Newton. Comparar la aproximación lineal y el primer paso del método de Newton para $\sqrt[3]{7}$.

2. Explicar por qué falla el método de Newton cuando $f'(x_0) = 0$. En términos de rectas tangentes que cortan el eje $x$, argumentar por qué $f'(x_0) = 0$ plantea un problema.

3. Dada la gráfica de $y = f(x)$, dibujar las rectas tangentes que se usan en el método de Newton para determinar $x_1$ y $x_2$ con estimación inicial $x_0 = 2$. ¿A cuál de los ceros de $f$ converge el método de Newton?




4. Repetir el ejercicio 3 con $x_0 = -2$ y $x_0 = 0{,}4$.

5. ¿Qué ocurre con el método de Newton en el ejercicio 3 si se toma $x_0 = 0$?

6. Considere el método de Newton en el ejercicio 3 con $x_0 = 0{,}2$ y $x_0 = 10$. Obviamente, $x_0 = 0{,}2$ está mucho más cerca de un cero de la función, pero ¿qué estimación inicial funcionará mejor en el método de Newton? Razonar la respuesta.

**En los ejercicios 7–10, usar el método de Newton con la estimación inicial $x_0$ que se especifica (a) para calcular $x_1$ y $x_2$ a mano, y (b) para hallar la raíz en la calculadora con cinco cifras exactas.**

7. $x^3 + 3x^2 - 1 = 0$, $x_0 = 1$

8. $x^3 + 4x^2 - x - 1 = 0$, $x_0 = -1$

9. $x^4 - 3x^2 + 1 = 0$, $x_0 = 1$

10. $x^4 - 3x^2 + 1 = 0$, $x_0 = -1$

**En los ejercicios 11-20, hallar un valor aproximado de la raíz (con al menos seis cifras exactas) mediante el método de Newton. Esbozar la gráfica y explicar cómo se ha elegido la estimación inicial.**

11. $x^3 + 4x^2 - 3x + 1 = 0$
12. $x^4 - 4x^3 + x^2 - 1 = 0$
13. $x^5 + 3x^3 + x - 1 = 0$
14. $x^3 + 2x + 1 = 0$
15. $\cos x - x = 0$
16. $x - e^{-x} = 0$
17. $\operatorname{sen} x = x^2 - 1$
18. $\cos x^2 = x$
19. $e^x = -x$
20. $e^{-x} = \sqrt{x}$

**En los ejercicios 21-26 el método de Newton falla. ¿Por qué? Si es posible, corregir el método y hallar la raíz.**

21. $4x^3 - 7x^2 + 1 = 0,\ x_0 = 0$
22. $4x^3 - 7x^2 + 1 = 0,\ x_0 = 1$
23. $x^2 + 1 = 0,\ x_0 = 0$
24. $x^2 + 1 = 0,\ x_0 = 1$
25. $\dfrac{4x^2 - 8x + 1}{4x^2 - 3x - 7} = 0,\ x_0 = -1$
26. $\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{1/3} = 0,\ x_0 = 0{,}5$
27. Probar que el método de Newton aplicado a $x^2 - c = 0$ $(c > 0)$ produce aproximaciones $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + c/x_n)$ para $\sqrt{c}$. Esta fórmula se conoce desde hace unos 2.000 años. Para entender por qué funciona, suponga que su estimación inicial $x_0$ para $\sqrt{c}$ es menor que el valor exacto. ¿Cómo se compara $c/x_0$ con $\sqrt{c}$? Explicar por qué el promedio de $x_0$ y $c/x_0$ dará una aproximación mejor de $\sqrt{c}$.
28. Demostrar que el método de Newton, aplicado a $x^n - c = 0$ ($n$ y $c$ positivos) produce aproximaciones $x_{n+1} = \frac{1}{n}[(n-1)x_n + cx_n^{1-n}]$ para $\sqrt[n]{c}$.

**En los ejercicios 29-36, usar el método de Newton [especifique qué función $f(x)$ utiliza] para estimar el número propuesto. (Ayuda: Véanse los ejercicios 27 y 28).**

29. $\sqrt{11}$
30. $\sqrt{23}$
31. $\sqrt[3]{11}$
32. $\sqrt[3]{23}$
33. $\sqrt[4]{24}$
34. $\sqrt[5]{33}$
35. $\sqrt[4,4]{24}$
36. $\sqrt[4,6]{24}$
37. Supongamos que en la reproducción de una especie, $p_0, p_1, p_2, \ldots$, son, respectivamente, las probabilidades de tener 0, 1, 2, ..., descendientes. La probabilidad de extinción de la especie viene dada por la menor solución no negativa de la ecuación $p_0 + p_1x + p_2x^2 + \cdots = x$ (véase *Games of Life*, de Karl Sigmund). Calcular las soluciones positivas de las ecuaciones $0{,}1 + 0{,}2x + 0{,}3x^2 + 0{,}4x^3 = x$ y $0{,}4 + 0{,}3x + 0{,}2x^2 + 0{,}1x^3 = x$. Explicar, en términos de extinción de la especie, por qué la primera ecuación tiene una solución menor que la segunda.
38. Para el problema de extinción del ejercicio 37, probar algebraicamente que si $p_0 = 0$, la probabilidad de extinción es 0. Explicar este resultado en términos de reproducción de la especie. Demostrar que una especie con $p_0 = 0{,}35$, $p_1 = 0{,}4$ y $p_2 = 0{,}25$ (y todos los demás $p_n$ cero) se extingue con certeza (con probabilidad 1).
39. Las larvas de *Choristoneura fumiferana* son un enemigo temible para los abetos del bálsamo de Canadá. En un modelo de la interacción entre los dos organismos, las poblaciones de larvas a largo plazo vienen dadas por las soluciones de la ecuación $r(1 - x/k) = x/(1 + x^2)$ con $r$ y $k$ positivas (véase *Mathematical Biology*, de J. D. Murray). Hallar todas las soluciones positivas de esa ecuación para $r = 0{,}5$ y $k = 7$.
40. Repetir el ejercicio 39 con $r = 0{,}5$ y $k = 7{,}5$. Con un cambio tan pequeño de la constante ambiental $k$, ¿cuánto ha cambiado la solución? La solución mayor corresponde a una plaga de larvas.
41. La teoría de la gravitación de Newton establece que el peso de una persona a $x$ pies de altura sobre el nivel del mar es $W(x) = PR^2/(R + x)^2$, donde $P$ es el peso al nivel del mar y $r$ el radio de la Tierra (unos 20.900.000 pies). Hallar la aproximación lineal de $W(x)$ en $x = 0$ y estimar con ella a qué altura se reduce un 1% el peso de una persona de 120 libras.
42. Un hecho importante de la teoría de la relatividad de Einstein es que la masa no es constante. A velocidad $v$, la masa de una persona cuya masa en reposo es $m_0$, pasa a ser $m = m_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, donde $c$ denota la velocidad de la luz. Viendo $m$ como función de $v$, hallar la aproximación lineal de $m(v)$ en $v = 0$. Usarla para probar que la masa es casi constante a velocidades bajas.
43. Sobre una viga, fija en su extremo izquierdo y apoyada en el derecho, actúa una **carga axial** $P$ (véase figura).

Si se aplica una carga suficiente, la viga se curva. Evidentemente, es muy importante para los ingenieros calcular esa **carga de pandeo**. En ciertos tipos de vigas, esa carga $L$ viene dada por la menor solución positiva de la ecuación $\tan \sqrt{x} = \sqrt{x}$. La viga curvada adopta la forma determinada por $y = \sqrt{L} - \sqrt{L}x - \sqrt{L}\cos\sqrt{L}x + \operatorname{sen}\sqrt{L}x$. Hallar $L$ y la forma de la viga.

44. La radiación espectral de un radiador ideal a temperatura constante es una función $S(f)$ de la frecuencia $f$. La función $S(f)$ alcanza su máximo cuando $3e^{-cf} + cf - 3 = 0$ (para $c = 10^{-13}$). Usar el método de Newton para aproximar la solución.

**En los ejercicios 45-49 investigamos la convergencia del método de Newton para $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$.**

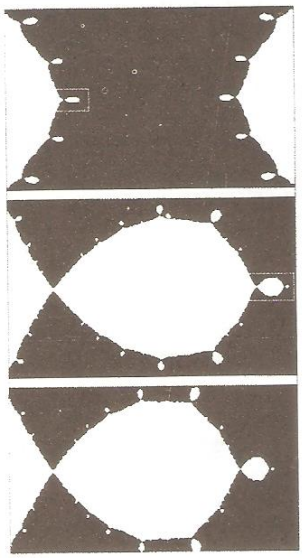
45. Probar que los ceros de $f$ son $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$.
46. Determinar a cuál de los ceros converge el método de Newton para (a) $x_0 = 0{,}1$, (b) $x_0 = 1{,}1$ y (c) $x_0 = 2.1$.

47. Determinar a cuál de los ceros converge el método de Newton para (a) $x_0 = 0{,}54$, (b) $x_0 = 0{,}55$ y (c) $x_0 = 0{,}56$.

48. El resultado del ejercicio 46 tiene sentido, pero el del 47 es algo sorprendente. Calcule pendientes de $f$ en cada uno de los puntos iniciales de los ejercicios 46 y 47 e intente explicar gráficamente la razón de esa sorpresa.

49. Se llama **dominio de atracción** de un cero al conjunto de valores iniciales $x_0$ para los que el método de Newton converge a él. Los ejercicios 45-48 indican que los dominios de atracción son más complicados de lo que cabría esperar. Por ejemplo, hemos visto que el intervalo [0,54, 0,56] contiene puntos de los tres dominios de atracción. Probar que lo mismo ocurre en [0,552, 0,553]. La cosa se pone aún más interesante si se utilizan números complejos ($a + bi$, con $i = \sqrt{-1}$). El resto del ejercicio requiere un PCS.

Ensaye, en primer lugar, el método de Newton con $x_0 = 1 + i$. ¡La fórmula es exactamente la misma! Verifique con su PCS que $x_1 = x_0 - \dfrac{x_0^3 - 3x_0^2 + 2x_0}{3x_0^2 - 6x_0 + 2} = 1 + \frac{1}{2}i$.



Compruebe que $x_2 = 1 + \frac{1}{7}i$ y $x_3 = 1 + \frac{1}{182}i$. Parece que las iteraciones convergen al cero $x = 1$.

Ahora un poco de programación. Dentro de un doble ciclo, con el parámetro $a$ yendo de 0 a 2 y $b$ de $-1$ a 1 (ambos en pasos de 0,02), tome $x_{10} = a + bi$ y calcule 10 iteraciones del método de Newton. Si $x_{10}$ es próximo a 0, digamos $|x_{10} - 0| < 0{,}1$, podemos conjeturar que converge a 0.

(Nota: Para números complejos, $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$). Pinte negro el píxel del punto $(a, b)$ si la iteración converge a 0 y blanco en caso contrario. Puede cambiar los rangos de $a$ y $b$, así como el tamaño del paso para hacer «zoom» en la región interesante. La figura muestra el dominio de atracción (en negro) para $x = 1$. En la primera figura aparece la región $-1{,}5 \le x \le 3{,}5$. En la segunda, hemos hecho zoom en la porción $0{,}26 \le x \le 0{,}56$. La tercera muestra una región aún más pequeña: $0{,}5 \le x \le 0{,}555$.

50. Otra cuestión importante que afecta al método de Newton es el ritmo de su convergencia. Intuitivamente, podemos distinguir entre el ritmo de convergencia para $f(x) = x^2 - 1$ (con $x_0 = 1{,}1$) y para $g(x) = x^2 - 2x + 1$ (con $x_0 = 1{,}1$). Pero ¿cómo se mide? Una posibilidad es calcular la diferencia $\Delta_n = x_n - x_{n-1}$ entre dos aproximaciones sucesivas $x_{n-1}$ y $x_n$. Para entender la importancia de esta cantidad, aplique el método de Newton con $x_0 = 1{,}5$ y calcule después los cocientes $\Delta_3/\Delta_2$, $\Delta_4/\Delta_3$, $\Delta_5/\Delta_4$, .... para cada una de estas funciones:

$$F_1(x) = (x-1)(x+2)^3 = x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8,$$
$$F_2(x) = (x-1)^2(x+2)^2 = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4,$$
$$F_3(x) = (x-1)^3(x+2) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2,$$
$$F_4(x) = (x-1)^4 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1.$$

En cada caso, conjeturar un valor para el límite

$$r = \lim_{x \to \infty} \frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n}.$$

Si el límite existe y es no nulo, decimos que el método de Newton **converge linealmente**. ¿Qué tiene que ver $r$ con nuestra interpretación intuitiva de la rapidez de convergencia?

Para $f(x) = (x-1)^4$, decimos que el cero $x = 1$ tiene **multiplicidad** 4. Para $f(x) = (x-1)^3(x+2)$, $x = 1$ tiene multiplicidad 3. ¿Qué relación hay entre $r$ y la multiplicidad del cero?

A la vista de este análisis, ¿por qué el método de Newton converge más rápidamente para $f(x) = x^2 - 1$ que para $g(x) = x^2 - 2x + 1$?

Finalmente, usar el método de Newton para calcular el ritmo $r$ y aventurar una hipótesis sobre la multiplicidad del cero $x = 0$ en $f(x) = x \operatorname{sen} x$ y $g(x) = x \operatorname{sen} x^2$.

## 3.3 VALORES MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Oímos hablar cada día de maximizar o minimizar beneficios o gastos en Economía, riesgos, impacto medioambiental, etc. Eso hace que en nuestra sociedad hayan alcanzado especial relieve las técnicas matemáticas dedicadas al estudio de los valores máximos o mínimos de funciones que representan magnitudes de interés. En esta sección investigamos estas cuestiones desde una perspectiva puramente matemática. En la sección 3.7 nos ocuparemos de las aplicaciones a problemas reales.

Para empezar, definimos con cuidado algunos términos de uso común.

**Definición 3.1**

Sea $f$ una función definida sobre un conjunto $S$ de números reales y sea $c \in S$.
(i) $f(c)$ es el **máximo absoluto** de $f$ en $S$ si $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in S$.
(ii) $f(c)$ es el **mínimo absoluto** de $f$ en $S$ si $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in S$.

Nos referiremos a los máximos y mínimos absolutos conjuntamente como **extremos absolutos**.

Surge una pregunta inmediata: ¿Toda función tiene un máximo absoluto y un mínimo absoluto? La respuesta es no, como indican las figuras 3.17a y 3.17b.

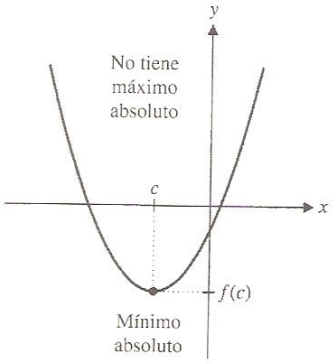



**Figura 3.17a**

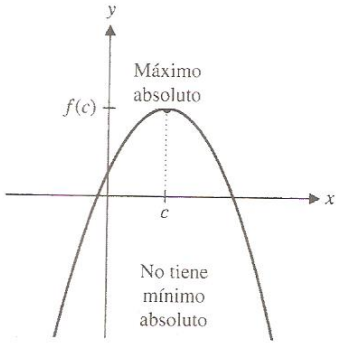



**Figura 3.17b**

**Ejemplo 3.1** **Valores máximo y mínimo absolutos**

Localizar los extremos absolutos de $f(x) = x^2 - 9$ en los intervalos (a) $(-\infty, \infty)$, (b) $(-3, 3)$ y (c) $[-3, 3]$.

**Solución** (a) En la figura 3.18 vemos que $f$ tiene un mínimo absoluto de valor $f(0) = -9$, pero no tiene máximo absoluto.

(b) En la figura 3.19a vemos que $f$ tiene un mínimo absoluto $f(0) = -9$, pero sigue sin tener máximo absoluto. Puede parecer que lo tiene igual a 0, pero $f(x) \neq 0$ para todo $x \in (-3, 3)$, ya que este intervalo es abierto y, por tanto, no incluye los puntos terminales –3 y 3.

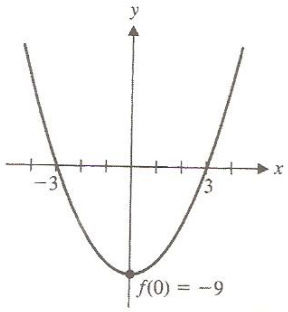



**Figura 3.18**
$y = x^2 - 9$ en $(-\infty, \infty)$.

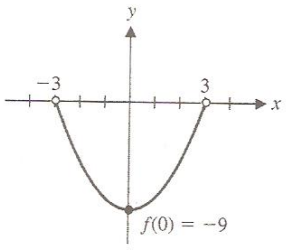



**Figura 3.19a**
$y = x^2 - 9$ en $(-3, 3)$.

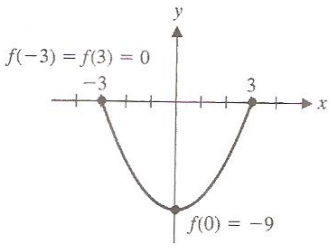



**Figura 3.19b**
$y = x^2 - 9$ en $[-3, 3]$.

(c) En este caso, los puntos terminales 3 y –3 están en el intervalo $[-3, 3]$ y $f(x)$ alcanza su valor máximo absoluto en dos puntos: $f(3) = f(-3) = 0$ (véase figura 3.19b).

El ejemplo 3.1 enseña que incluso funciones simples, continuas, pueden no tener extremos absolutos, según en qué intervalo sean consideradas. Sigue en pie la cuestión de saber cuándo está **garantizado** que una función en un intervalo tenga máximo y mínimo absolutos. En el ejemplo 3.1, la función sólo tenía máximo absoluto en el intervalo cerrado y acotado $[-3, 3]$. Esto da algunas pistas y el ejemplo que sigue aporta otra pieza al rompecabezas.

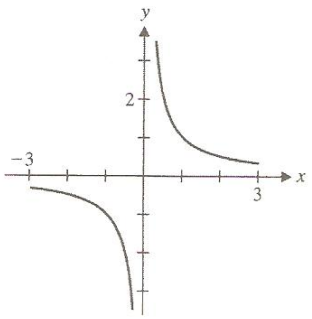



**Figura 3.20**
$y = 1/x$.

### Ejemplo 3.2 Una función sin máximo ni mínimo absolutos

Localizar los extremos absolutos de $f(x) = 1/x$ en el intervalo $[-3, 3]$.

**Solución** La figura 3.20 indica que $f$ no tiene máximo absoluto ni mínimo absoluto en $[-3, 3]$. La siguiente tabla de valores de $f(x)$ en $x$ próximos a 0 apunta en la misma dirección.

| $x$ | $1/x$ | $x$ | $1/x$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | −1 | −1 |
| 0,1 | 10 | −0,1 | −10 |
| 0,01 | 100 | −0,01 | −100 |
| 0,001 | 1.000 | −0,001 | −1.000 |
| 0,0001 | 10.000 | −0,0001 | −10.000 |
| 0,00001 | 100.000 | −0,00001 | −100.000 |
| 0,000001 | 1.000.000 | −0,000001 | −1.000.000 |

La diferencia esencial entre las funciones de los ejemplos 3.1 y 3.2 es que $f(x) = 1/x$ no es continua en el intervalo $[-3, 3]$. Todas estas observaciones se plasman en el teorema siguiente, cuya demostración omitimos.

### Teorema 3.1 (Teorema de los valores extremos)

Una función continua $f$ definida en un intervalo **cerrado** y **acotado** $[a, b]$ alcanza un valor máximo absoluto y un valor mínimo absoluto en ese intervalo.

Aunque no es necesario que la función sea continua ni que el intervalo sea cerrado y acotado para que existan valores extremos, el teorema garantiza su existencia cuando esas dos condiciones se satisfacen.

En el ejemplo que sigue volvemos a la función del ejemplo 3.2, pero ahora en un intervalo diferente.

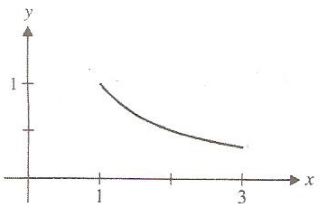



**Figura 3.21**
$y = 1/x$ en $[1, 3]$.

### Ejemplo 3.3 Extremos absolutos de una función continua

Hallar los extremos absolutos de $f(x) = 1/x$ en el intervalo $[1, 3]$.

**Solución** La función es continua en el intervalo $[1, 3]$, así que el teorema de los valores extremos asegura que $f$ tiene máximo y mínimo absoluto en $[1, 3]$. La figura 3.21 muestra que el máximo se alcanza en $x = 1$ y el mínimo en $x = 3$.

Nuestro próximo objetivo es aprender cómo localizar los extremos absolutos. Antes de eso, necesitamos considerar otra clase de valores extremos.

### Definición 3.2

(i) $f(c)$ es un **máximo local** de $f$ si $f(c) \geq f(x)$ para todo $x$ en algún intervalo abierto que contiene a $c$.

(ii) $f(c)$ es un **mínimo local** de $f$ si $f(c) \leq f(x)$ para todo $x$ en algún intervalo abierto que contiene a $c$.

En ambos casos se dice que $f(c)$ es un **extremo local** de $f$.

Los extremos locales se llaman también extremos **relativos**. La figura 3.22 muestra una función con varios extremos locales. Están localizados en puntos con tangente horizontal [o

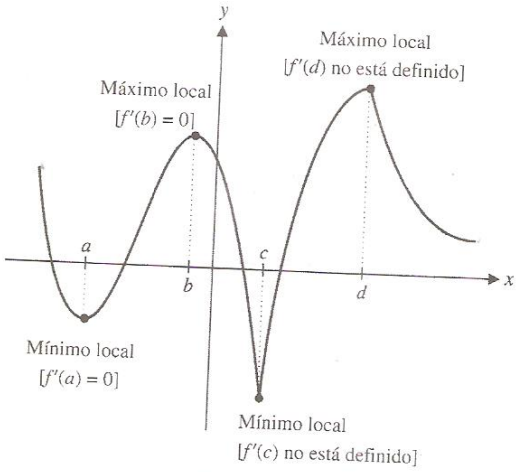



**Figura 3.22**

Extremos locales.

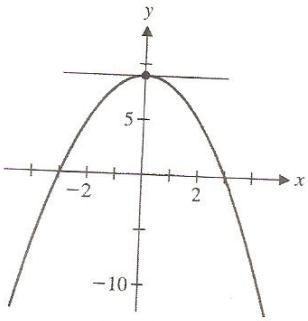



**Figura 3.23**

$y = 9 - x^2$ y la recta tangente en $x = 0$.

sea, $f'(x) = 0$], en un punto donde la recta tangente es vertical [$f'(x)$ no está definida] o en un punto anguloso [$f'(x)$ tampoco está definida]. Este comportamiento queda patente en los dos ejemplos siguientes.

### Ejemplo 3.4 Una función con derivada cero en un máximo local

Localizar los extremos locales de $f(x) = 9 - x^2$ y describir el comportamiento de la derivada en cada uno de ellos.

**Solución** En la figura 3.23 vemos que hay un máximo local en $x = 0$. Además, $f'(x) = -2x$, luego $f'(0) = 0$. Eso significa que la recta tangente a $y = f(x)$ en $x = 0$ es horizontal, como indica la figura 3.23.

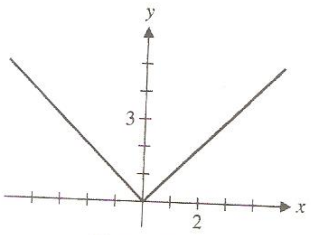



**Figura 3.24**

$y = |x|$.

### Ejemplo 3.5 Una función con derivada no definida en un mínimo local

Localizar los extremos locales de $f(x) = |x|$ y describir el comportamiento de la derivada en cada uno de ellos.

**Solución** En la figura 3.24 vemos que hay un mínimo local en $x = 0$. La gráfica tiene un punto anguloso en $x = 0$ y, por tanto, como ya dijimos en el Capítulo 2, $f'(0)$ no está definida. [Las rectas tangentes en $x < 0$ tienen pendiente $-1$ y en $x > 0$ pendiente 1. Puesto que esos límites no coinciden, $f'(0)$ no existe]

Las gráficas de las figuras 3.22–3.24 no son inusuales. He aquí un pequeño reto: dibuje unas cuantas gráficas al azar. No tardará mucho tiempo en convencerse de que los extremos locales ocurren sólo en puntos donde la derivada es cero o no está definida. Por esa razón, damos a tales puntos un nombre especial.

### Definición 3.3

Se dice que un número $c$ en el dominio de una función $f$ es un **número crítico** de $f$ si $f'(c) = 0$ o si $f'(c)$ no está definido.

**Notas históricas**

**Pierre de Fermat (1601-1665).** Matemático francés, descubrió muchos resultados importantes, entre ellos el teorema que hemos denominado con su nombre. Para Fermat, jurista y miembro de la Corte Suprema de Toulouse, las Matemáticas eran una afición. El «Príncipe de los aficionados» dejó un legado inusual al anotar en el margen de un libro que había descubierto una demostración maravillosa de un resultado brillante, pero que en ese margen no había espacio suficiente para detallarla. Este «último teorema de Fermat» trajo en vilo a los mejores matemáticos del mundo durante más de 300 años. Fue demostrado por Andrew Wiles en 1995.

Pues bien, nuestra observación anterior sobre dónde se localizan los extremos locales resulta ser correcta. Es decir, los extremos locales *sólo* pueden ocurrir en puntos donde la derivada es cero o no está definida. Ése es el contenido del teorema que sigue.

**Teorema 3.2 (Teorema de Fermat)**

Si $f(c)$ es un extremo relativo (máximo o mínimo) de $f$, $c$ es un número crítico de $f$.

**Demostración**

Supongamos $f$ derivable en $x = c$ (si no lo es, entonces $c$ es crítico, como deseamos probar). Si además $f'(c) \neq 0$, ha de ser $f'(c) > 0$ o $f'(c) < 0$.

En caso de que $f'(c) > 0$, por la definición de la derivada se tiene

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} > 0.$$

Así, pues, para $h$ suficientemente pequeño,

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} > 0. \tag{3.1}$$

Para $h > 0$, (3.1) afirma que

$$f(c+h) - f(c) > 0,$$

o sea,

$$f(c+h) > f(c).$$

Por tanto, $f(c)$ no es un máximo local.

Para $h < 0$, (3.1) dice que

$$f(c+h) - f(c) < 0,$$

o sea,

$$f(c+h) < f(c).$$

Por tanto, $f(c)$ no es un mínimo local.

Como habíamos supuesto que $f(c)$ era un extremo local, esto es una contradicción. En consecuencia, concluimos que $f'(c) \leq 0$.

Análogamente, si $f'(c) < 0$, se llega a la misma contradicción (lo dejamos como ejercicio). La única posibilidad es $f'(c) = 0$, lo que demuestra el teorema.

Con el teorema de Fermat y la ayuda de gráficas generadas en la calculadora podemos hallar los extremos locales, como en los dos ejemplos siguientes.

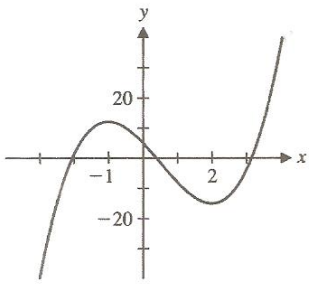



**Figura 3.25**
$y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$.

**Ejemplo 3.6** **Extremos locales de un polinomio**

Hallar los números críticos y los extremos locales de $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$.

**Solución**

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2)$$
$$= 6(x - 2)(x + 1).$$

Por tanto, $f$ tiene dos números críticos, $x = -1$ y $x = 2$. En la gráfica 3.25 vemos que corresponden a un máximo local y a un mínimo local, respectivamente.

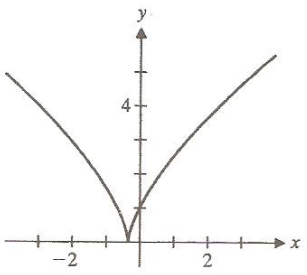



**Figura 3.26**
$y = (3x + 1)^{2/3}$.

**Nota 3.1**

Según el teorema de Fermat, los extremos locales pueden ocurrir sólo en los números críticos. Lo que no asegura es que haya un extremo local en **todos** y **cada** uno de los números críticos. De hecho, es falso, como muestran los ejemplos 3.8 y 3.9.

### Ejemplo 3.7 Extremo en un punto donde la derivada no está definida

Hallar los números críticos y los extremos locales de $f(x) = (3x + 1)^{2/3}$.

**Solución**

$$f'(x) = \frac{2}{3}(3x + 1)^{-1/3}(3) = \frac{2}{(3x + 1)^{1/3}}.$$

Está claro que $f'(x)$ no se anula en ningún $x$, pero $f'(x)$ no está definido en $x = -\frac{1}{3}$ (que pertenece al dominio de $f$). Por tanto, $x = -\frac{1}{3}$ es el único número crítico de $f$. La figura 3.26 permite ver que corresponde a un mínimo local (y absoluto también).

Intente reproducir la gráfica de $f$ en su calculadora. Si obtiene sólo la mitad de la gráfica de la figura 3.26, habrá descubierto uno de los peligros implícitos en una fe ciega en las calculadoras. Los algoritmos que utilizan la mayor parte de ellas darán un número complejo (o error) cuando se les pida calcular ciertas potencias fraccionarias de números negativos. Este problema enojoso se presenta en pocas ocasiones. Si lo hemos citado es tan sólo para llamar su atención sobre las limitaciones de la tecnología.

### Ejemplo 3.8 Tangente horizontal en un punto que no es extremo local

Hallar los números críticos y los extremos locales de $f(x) = x^3$.

**Solución** La figura 3.27 deja claro que $f$ no tiene extremos locales. Sin embargo, $f'(x) = 3x^2 = 0$ en $x = 0$ (único número crítico de $f$). En este caso, $f$ tiene tangente horizontal en $x = 0$, pero no extremo local (ni allí ni en ningún otro punto).

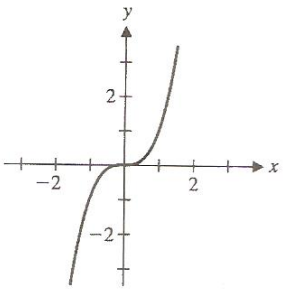



**Figura 3.27**
$y = x^3$.

### Ejemplo 3.9 Tangente vertical en un punto que no es extremo local

Hallar los números críticos y los extremos locales de $f(x) = x^{1/3}$.

**Solución** $f$ no tiene extremos locales (figura 3.28). Como $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$, $x = 0$ es número crítico de $f$ (la derivada no está definida en $x = 0$). Sin embargo, $f$ no tiene extremo local en $x = 0$ (ni en ningún otro punto).

Antes de catalogar un cierto número como crítico, hay que comprobar que está en el dominio de $f$, como ilustra el próximo ejemplo.

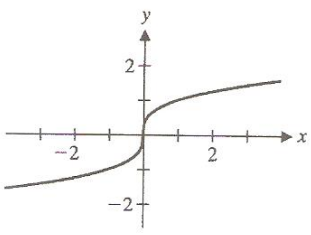



**Figura 3.28**
$y = x^{1/3}$.

### Ejemplo 3.10 Números críticos de una función racional

Hallar los números críticos de $f(x) = \dfrac{2x^2}{x + 2}$.

**Solución** El dominio de $f$ consta de todos los números reales excepto $x = -2$. Se tiene

$$f'(x) = \frac{4x(x + 2) - 2x^2(1)}{(x + 2)^2} \quad \text{Regla del cociente.}$$

$$= \frac{2x(x + 4)}{(x + 2)^2}.$$

Nótese que $f'(x) = 0$ en $x = 0$ y en $x = -4$. Además $f'(x)$ no está definida en $x = -2$. Ahora bien, $-2$ no pertenece al dominio de $f$, de manera que los únicos números críticos son $x = 0$ y $x = -4$.

Llevamos un tiempo dando vueltas a cómo localizar los extremos locales. Sabemos que deben producirse en números críticos y que una función continua tiene necesariamente un

máximo absoluto y un mínimo absoluto en todo intervalo cerrado y acotado. Pero aún no hemos sido capaces de concretar cómo encontrar los extremos. El teorema que sigue es de gran utilidad.

**Teorema 3.3**
Si $f$ es continua en el intervalo cerrado y acotado $[a, b]$, sus extremos absolutos los alcanza en un punto terminal ($a$ o $b$) o en un número crítico.

**Demostración**
Como $f$ es continua, el teorema del valor intermedio asegura que $f$ alcanza en $[a, b]$ un máximo y un mínimo absolutos. Sea $f(c)$ un extremo absoluto. Si $c$ no es un punto terminal, entonces está en el intervalo abierto $(a, b)$, de manera que $f(c)$ es también un extremo relativo. Por el teorema de Fermat, $c$ tiene que ser un número crítico.

Ilustramos el teorema 3.3 con una función polinómica en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 3.11** **Extremos absolutos en un intervalo cerrado y acotado**

Hallar los extremos absolutos de $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$ en el intervalo $[-2, 4]$.

**Solución** La figura 3.29 indica que el máximo está en el punto terminal $x = 4$ y el mínimo cerca de $x = 2$. Vimos en el ejemplo 3.6 que los números críticos de $f$ son $x = -1$ y $x = 2$ (ambos están en el intervalo dado). Así, pues, comparamos los valores de $f$ en los dos puntos terminales

$$f(-2) = 1 \quad \text{y} \quad f(4) = 37$$

y en los números críticos

$$f(-1) = 12 \quad \text{y} \quad f(2) = -15.$$

El teorema 3.3 dice que entre ellos están el máximo y el mínimo absoluto. Concluimos que $f(4) = 37$ es el máximo absoluto y $f(2) = -15$ el mínimo absoluto, en perfecta concordancia con la figura 3.29.

No es frecuente, en problemas realistas, que la derivada sea un polinomio cuadrático con ceros enteros. El próximo ejemplo es menos benévolo.

**Ejemplo 3.12** **Extremos de una función con exponente fraccionario**

Hallar los extremos absolutos de $f(x) = 4x^{5/4} - 8x^{1/4}$ en el intervalo $[0, 4]$.

**Solución** En la gráfica (figura 3.30) parece que el máximo está en el punto terminal $x = 4$ y el mínimo cerca de $x = \frac{1}{2}$. Como

$$f'(x) = 5x^{1/4} - 2x^{-3/4} = \frac{5x - 2}{x^{3/4}}.$$

Los números críticos son $x = \frac{2}{5}$ [porque $f'(\frac{2}{5}) = 0$] y $x = 0$ (porque $f'$ no está definida en él). Hemos de comparar sólo

$$f(0) = 0, \quad f(4) \approx 11{,}3137 \quad \text{y} \quad f(\tfrac{2}{5}) \approx -5{,}0897.$$

Por consiguiente, concluimos que el máximo absoluto es $f(4) \approx 11{,}3137$ y el mínimo absoluto $f(\frac{2}{5}) \approx -5{,}0897$, en buen acuerdo con lo esperado a la vista de la figura 3.30.

**Nota 3.2**

Cuando hablemos de máximo, mínimo o extremo sin especificar si son absolutos o locales, nos referiremos siempre a extremos absolutos.

**Nota 3.3**

Según el teorema 3.3, para hallar los extremos absolutos de una función continua en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$, basta comparar sus valores en $a$, en $b$ y en los números críticos. El mayor de todos ellos es el máximo absoluto. El menor de todos ellos es el mínimo absoluto.

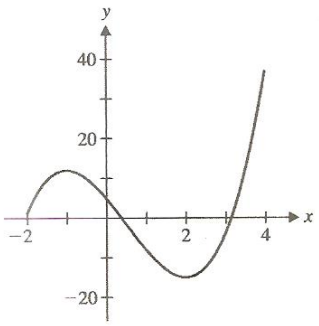



**Figura 3.29**
$y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$.

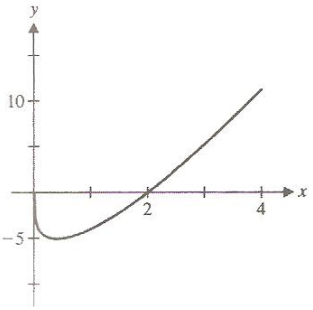



**Figura 3.30**
$y = 4x^{5/4} - 8x^{1/4}$.

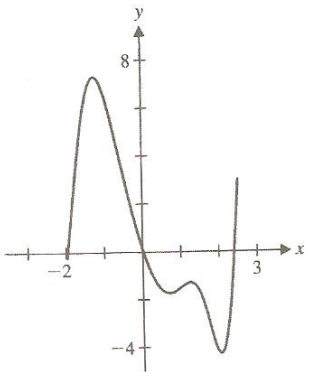



**Figura 3.31**
$y = f(x) = x^3 - 5x + 3 \text{ sen } x^2$.

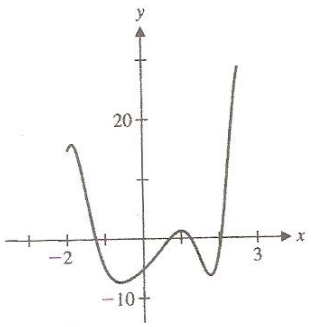



**Figura 3.32**
$y = f'(x) = 3x^2 - 5 + 6x \cos x^2$.

En la práctica, los números críticos no son tan fáciles de hallar como en los ejemplos 3.11 y 3.12. En el siguiente ejemplo no se sabe ni siquiera *cuántos* hay. No obstante, podemos estimar su número y sus localizaciones mediante un análisis cuidadoso o usando gráficas generadas en una calculadora.

### Ejemplo 3.13 Aproximación de los extremos absolutos

Hallar los extremos absolutos de $f(x) = x^3 - 5x + 3 \text{ sen } x^2$ en el intervalo $[-2, 2{,}5]$.

**Solución** La gráfica de la figura 3.31 indica que el máximo ocurre cerca de $x = -1$ y el mínimo cerca de $x = 2$. Además,

$$f'(x) = 3x^2 - 5x + 6x \cos x^2.$$

A diferencia de los ejemplos precedentes, aquí no sabemos calcular los $x$ donde $f'(x) = 0$. Nos queda la alternativa de hallar los ceros aproximados recurriendo al método de Newton (o a un PCS). Necesitamos estimaciones iniciales adecuadas. Las buscamos en la figura 3.32, que sugiere cuatro ceros de $f'(x)$ en el intervalo en cuestión, situados cerca de $-1{,}3$, $0{,}7$, $1{,}2$ y $2{,}0$. Nótese que estos cuatro valores de $x$ corresponden en la figura 3.31 a los cuatro extremos locales de la gráfica de $y = f(x)$. Aplicamos el método de Newton para resolver $f'(x) = 0$ usando esas cuatro estimaciones iniciales y obtenemos como números críticos aproximados en el intervalo $[-2, 2{,}5]$:

$$a \approx -1{,}26410884789, \quad b \approx 0{,}674471354085,$$
$$c \approx 1{,}2266828947 \quad \text{y} \quad d \approx 2{,}01830371473.$$

No son exactos, pero sí muy buenas aproximaciones. Ya sólo falta comparar los valores de $f$ en ellos y en los puntos terminales del intervalo:

$$f(a) \approx 7{,}3, \quad f(b) \approx -1{,}7, \quad f(c) \approx -1{,}3$$
$$f(d) \approx -4{,}3, \quad f(-2) \approx -0{,}3 \quad \text{y} \quad f(2{,}5) \approx 3.0.$$

En conclusión, el máximo absoluto es aproximadamente $f(-1{,}26410884789) \approx 7{,}3$ y el mínimo absoluto $f(2{,}01830371473) \approx -4{,}3$.

Teniendo en cuenta que nuestro análisis ha sido aproximado y apoyado en gráficas, es importante verificar que esos extremos aproximados se corresponden con lo que la gráfica de $y = f(x)$ anunciaba. Puesto que la coincidencia es total, podemos tener confianza en los resultados.

Ya hemos visto cómo se hallan los extremos absolutos de una función continua en un intervalo cerrado. En la sección 3.4 aprenderemos a hallar los extremos locales.

## EJERCICIOS 3.3

1. Explicar, con ayuda de una o varias gráficas, por qué es cierto el teorema de los valores extremos. ¿Mantiene su validez si no exigimos que $f(x)$ sea continua? ¿Y si no exigimos que el intervalo sea cerrado?

2. Explicar, usando gráficas, por qué es cierto el teorema de Fermat y cómo se utiliza. Enuncie el teorema en sus propias palabras con el fin de hacerlo más inteligible.

3. Suponga que $f(t)$ da su altura durante una ascención a una montaña. Si se detiene a descansar, ¿por qué es $f'(t) = 0$? Discutir bajo qué circunstancias estaría en un máximo o en un mínimo local.

4. En Matemáticas, el enunciado si/entonces suele ser unidireccional. Cuando decimos «si $A$ entonces $B$» no tiene por qué ser cierto que «si $B$ entonces $A$». Cuando ambos son verdaderos, decimos que «$A$ si y sólo si $B$».
Por desgracia, el lenguaje ordinario no siempre es tan preciso, lo cual ocasionalmente plantea dificultades a la hora de interpretar un teorema. Consideremos el enunciado «**Si** escribiera una novela de éxito, (**entonces**) me haría rico». ¿Es verdadero? ¿Cómo

difiere del recíproco: «**Si** me hiciera rico, (**entonces**) escribiría una novela de éxito»? El recíproco ¿es cierto siempre? ¿Sólo a veces? Aplicar estos argumentos lógicos al teorema del valor intermedio y al de Fermat, enunciar sus recíprocos y discutir si son verdaderos.

**En los ejercicios 5-32, hallar los números críticos y averiguar si corresponden a un máximo local, a un mínimo local o a ninguna de ambas cosas.**

5. $f(x) = x^2 + 5x - 1$
6. $f(x) = -x^2 + 4x + 2$
7. $f(x) = x^3 - 3x + 1$
8. $f(x) = x^3 + 3x + 1$
9. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$
10. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x$
11. $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2$
12. $f(x) = x^4 + 6x^2 - 2$
13. $f(x) = x^{3/4} - 4x^{1/4}$
14. $f(x) = (x^{2/5} - 3x^{1/5})^2$
15. $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x$
16. $f(x) = x^5 - 20x^2 + 1$
17. $f(x) = \operatorname{sen} x \cos x$, $[0, 2\pi]$
18. $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$, $[0, 2\pi]$
19. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$
20. $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 4}{x-1}$
21. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$
22. $f(x) = \dfrac{3x}{x^2-1}$
23. $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$
24. $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$
25. $f(x) = x^{4/3} + 4x^{1/3} + 4x^{-2/3}$
26. $f(x) = x^{7/3} - 28x^{1/3}$
27. $f(x) = 2x\sqrt{x+1}$
28. $f(x) = x/\sqrt{x^2+1}$
29. $f(x) = e^{-x^2}$
30. $f(x) = xe^{-x}$
31. $f(x) = \operatorname{sen} x^2$, $(0, \pi)$
32. $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$, $(0, 2\pi)$

**En los ejercicios 33-42, hallar los extremos absolutos de la función en el intervalo especificado.**

33. $f(x) = x^3 - 3x + 1$, $[0, 2]$
34. $f(x) = x^3 - 3x + 1$, $[-3, 2]$
35. $f(x) = x^4 - 8x^2 + 2$, $[-3, 1]$
36. $f(x) = x^4 - 8x^2 + 2$, $[-1, 3]$
37. $f(x) = x^{2/3}$, $[-4, -2]$
38. $f(x) = x^{2/3}$, $[-1, 3]$
39. $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$, $[0, 2\pi]$
40. $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$, $[\pi/2, \pi]$
41. $f(x) = x \operatorname{sen} x + 3$, $[0, 2\pi]$
42. $f(x) = x^2 + e^x$, $[-2, 2]$

**En los ejercicios 43-46, estimar numéricamente los extremos absolutos de la función dada en el intervalo que se indica.**

43. $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x + 1$ en (a) $[-1, 1]$ y (b) $[-3, 2]$
44. $f(x) = x^6 - 3x^4 - 2x + 1$ en (a) $[-1, 1]$ y (b) $[-2, 2]$
45. $f(x) = x^2 - 3x \cos x$ en (a) $[-2, 1]$ y (b) $[-5, 0]$
46. $f(x) = xe^{\cos 2x}$ en (a) $[-2, 2]$ y (b) $[2, 5]$
47. Repetir los ejercicios 33-38, pero buscando los extremos, si existen, en el intervalo abierto.
48. Describir procedimientos para buscar extremos en intervalos abiertos $(a, b)$ o semiabiertos de la forma $(a, b]$ o $[a, b)$.
49. Esbozar la gráfica de una función $f(x)$ en $[-2, 2]$ cuyo máximo absoluto sea 3 y que no tenga mínimo absoluto.
50. Esbozar la gráfica de una función continua $f(x)$ en $(-2, 2)$ cuyo mínimo absoluto sea 2 y que no tenga máximo absoluto.
51. Esbozar la gráfica de una función continua $f(x)$ en $(-2, 2)$ con máximo absoluto 4 y mínimo absoluto 2.
52. Esbozar la gráfica de una función $f(x)$ en $[-2, 2]$ que no tenga máximo ni mínimo absolutos en ese intervalo.
53. Representar $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$ para $x > 0$ y averiguar dónde es máxima su pendiente.
54. Representar $f(x) = e^{-x^2}$ y averiguar dónde es máxima su pendiente. (Nota: Este problema es importante en teoría de probabilidades).
55. Esbozar una figura que ponga de manifiesto que las gráficas de $y = f(x) = x^2 + 1$ e $y = g(x) = \ln x$ no se cortan. Hallar el $x$ que minimiza $f(x) - g(x)$. En ese valor de $x$, probar que las rectas tangentes a las gráficas de $f$ y $g$ son paralelas.
56. Explicar gráficamente por qué tiene sentido que las rectas tangentes del ejercicio 55 sean paralelas, siendo el punto donde la distancia vertical entre las gráficas se hace mínima.
57. Dar un contraejemplo a la siguiente afirmación (es decir, un ejemplo que demuestre que no es cierto en general): entre dos mínimos locales de $f(x)$ hay un máximo local.

58. ¿Es cierto el enunciado del ejercicio 57 para funciones continuas?

59. Una montaña rusa tiene la forma dada por $y = x^5 - 4x^3 - x + 10$, con $x$ entre $-2$ y 2. Hallar los extremos relativos y explicar qué partes de la montaña rusa representan. Localizar el punto de máxima pendiente.

60. Supongamos que enviamos un fichero enorme por Internet y la probabilidad de que llegue sin errores es $x$. Por tanto, la probabilidad de que llegue con algún error es $1 - x$. La teoría de la información estudia este tipo de situaciones. Una magnitud importante, la **entropía** (una medida de la impredecibilidad), se define como $H = -x \ln x - (1 - x) \ln(1 - x)$ para $0 < x < 1$. Hallar el valor de $x$ que minimiza esa cantidad.

61. Investigadores en Biología de poblaciones, Economía, tumores en animales, etc., hacen uso de la curva de crecimiento de Gompertz $W(t) = ae^{-be^{-t}}$. Cuando $t \to \infty$, probar que $W(t) \to a$ y $W'(t) \to 0$. Hallar el ritmo máximo de crecimiento.

62. Consideremos la familia de funciones $f(x) = x^3 + cx + 1$, con $c$ constante. ¿Cuántos extremos relativos tienen y de qué tipo? Supuesto que esta familia es indicativa de todas las funciones cúbicas, hacer una lista de todos sus tipos. Sin analizar ejemplos, intente elaborar la lista de tipos de polinomios de grado cuatro acompañando cada uno de una gráfica.

63. Explorar las gráficas de $e^{-x}$, $xe^{-x}$, $x^2e^{-x}$ y $x^3e^{-x}$. Hallar sus extremos locales y determinar el comportamiento cuando $x \to \infty$. Puede pensar en $x^ne^{-x}$ como resultado de una lucha entre dos fuerzas: cuando $x \to \infty$, $x^n \to \infty$, mientras que $e^{-x} \to 0$. Describir la gráfica de $x^ne^{-x}$ en términos de esa lucha.

64. Johannes Kepler (1571-1630) es conocido sobre todo como astrónomo, por sus tres leyes sobre el movimiento de los planetas. Sin embargo, sus descubrimientos se debieron primordialmente a su brillantez como matemático.

Mientras estuvo de servicio en la corte del emperador Mateo I de Austria, Kepler observó la habilidad de los viticultores austríacos para calcular, de forma misteriosa, la capacidad de diversos barriles. Los toneles tenían un orificio en el centro (véase figura a), el experto introducía una varilla hasta tocar el extremo del fondo y anunciaba el volumen del tonel.

Kepler analizó el problema para un tonel cilíndrico (figura b), cuyo volumen es $V = \pi r^2 h$. En la figura b, $r = y$, $h = 2x$, luego $V = 2\pi y^2 x$. Sea $z$ la medición de la varilla. Por el teorema de Pitágoras, $x^2 + (2y)^2 = z^2$. El misterio para Kepler era cómo conocer $V$ a partir sólo de $z$. Kepler se dio cuenta de que los toneles austríacos tenían todos, por construcción, la misma razón $x/y$ (altura/diámetro). Llamando $t = x/y$, probar que $z^2/y^2 = t^2 + 4$. Usar eso para sustituir $y^2$ en la fórmula del volumen. Sustituir $x$ por $\sqrt{z^2 - 4y^2}$ y verificar que $V = \dfrac{2\pi z^3 t}{(4 + t^2)^{3/2}}$.

En esta fórmula, $t$ es una constante, así que el experto podía medir $z$ y dar rápidamente la estimación del volumen.

Todavía no hemos dado el valor de $t$. Kepler supuso que los viticultores habrían adoptado una elección astuta para esa razón. Hallar el valor de $t$ que hace máximo el volumen del tonel para un $z$ dado. Pues ¡ése era precisamente el valor de la razón elegido en la construcción de los toneles austríacos!

**Figura a**

**Figura b**

## 3.4 FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES

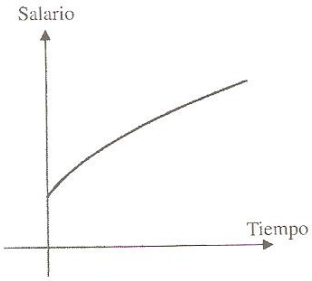



**Figura 3.33**

Salario creciente.

En la sección 3.3 ha quedado sin resolver la cuestión de cómo determinar si una función tiene un máximo o un mínimo local. Sabemos que sólo pueden ocurrir en los números críticos, pero por desgracia no todo número crítico corresponde a un extremo local. En esta sección aprenderemos a decidir si un número crítico corresponde a un extremo local. Al mismo tiempo, profundizamos en la relación entre derivada y gráficas. Empezamos por una noción muy simple.

Los términos **creciente** y **decreciente** nos son familiares. Si su salario crece con el tiempo, una gráfica del salario será parecida a la figura 3.33. Si pide un préstamo para adquirir una vivienda o un automóvil, su deuda irá decreciendo desde que inicie sus pagos y la gráfica de la deuda será del tipo indicado en la figura 3.34. Vamos a definir con precisión esas nociones formalizando la idea bien conocida por todos.

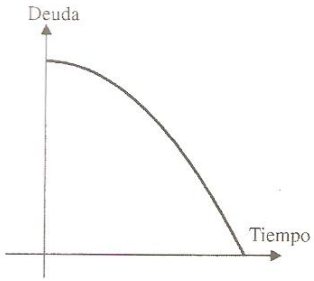



**Figura 3.34**
Deuda decreciente.

### Definición 4.1

Una función $f$ es (**estrictamente**) **creciente** en un intervalo $I$ si para cualesquiera $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2, f(x_1) < f(x_2)$ [es decir, si $f(x)$ crece al crecer $x$].

Una función $f$ es (**estrictamente**) **decreciente** en un intervalo $I$ si para cualesquiera $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2, f(x_1) > f(x_2)$ [es decir, si $f(x)$ decrece al crecer $x$].

¿Por qué perder el tiempo con una definición así? Cualquiera ve a simple vista en una gráfica si la función crece o decrece. El reto es decidir si una función es creciente o decreciente partiendo sólo de su fórmula matemática. Por ejemplo, ¿sabe si $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x$ es creciente **sin** mirar su gráfica? Y aun con la gráfica, ¿puede decidir exactamente dónde es creciente y dónde decreciente? Intente averiguar en la figura 3.35 qué caracteriza a los puntos en los que la función es creciente o decreciente.

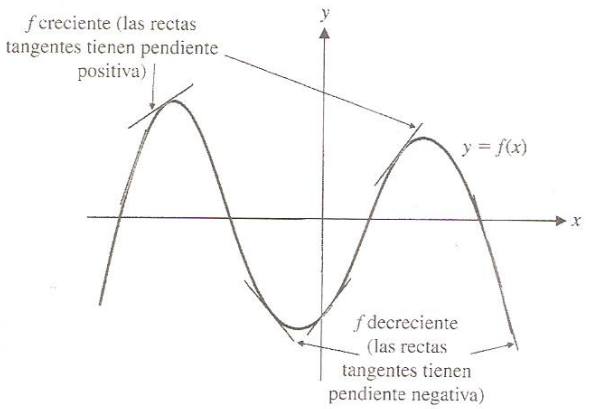



**Figura 3.35**
Crecimiento y decrecimiento.

En los intervalos donde $f$ es creciente, las rectas tangentes tienen pendiente positiva, y en aquellos donde $f$ es decreciente, la pendiente de las rectas tangentes es negativa. Ya sabemos que la pendiente de la recta tangente en un punto viene dada por el valor de la derivada en él, de modo que el crecimiento o decrecimiento de $f$ parece estar relacionado con el signo de la derivada. Esta conjetura, aunque basada sólo en una gráfica, queda confirmada en el siguiente teorema.

### Teorema 4.1

Sea $f$ una función derivable en un intervalo $I$.

(i) Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$, $f$ es creciente en $I$.

(ii) Si $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$, $f$ es decreciente en $I$.

### Demostración

(i) Consideremos dos puntos cualesquiera $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$. Aplicando el teorema del valor medio (teorema 9.4 en la sección 2.9) a $f$ en el intervalo $(x_1, x_2)$ obtenemos

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c), \tag{4.1}$$

para algún número $c \in (x_1, x_2)$. (¿Por qué es aplicable aquí el teorema del valor medio?). Por hipótesis, $f'(c) > 0$ y como $x_2 - x_1 > 0$, de (4.1) se deduce que

$$0 < f(x_2) - f(x_1),$$

o sea,

$$f(x_1) < f(x_2). \tag{4.2}$$

Puesto que (4.2) es válida para cualesquiera $x_1 < x_2$, $f$ es creciente en $I$.

La demostración de (ii) es análoga y se deja como ejercicio.

## Lo que se ve no siempre es lo que parece

El objetivo de las secciones siguientes es aprender a esbozar gráficas de funciones que muestren todos sus rasgos relevantes: crecimiento o decrecimiento, extremos, asíntotas y dos conceptos que definiremos en la sección 3.5: concavidad y puntos de inflexión. Estará pensando que no hay mucho que hacer, ya que dispone de calculadora, pero hay algo importante en ese empeño. Una gráfica representa la función en una cierta ventana, o sea, en un rango particular de valores de $x$ e $y$. Y esa ventana la elige la calculadora. Pero ¿esa ventana muestra todos los rasgos relevantes? La única forma de resolver esta cuestión es una dosis saludable de Cálculo.

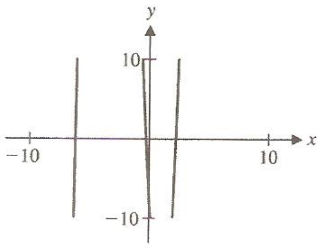


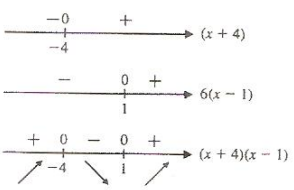

**Figura 3.36**
$y = 2x^3 + 9x^2 - 24x - 10$.

### Ejemplo 4.1 Una gráfica

Dibujar una gráfica de $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 24x - 10$ que muestre todos sus extremos locales.

**Solución** Muchas calculadoras usan la ventana $-10 \le x \le 10$ y $-10 \le y \le 10$ por defecto. En ella, la gráfica de $f$ tiene el aspecto de la figura 3.36, donde se aprecian tres segmentos que poco dicen de interesante. En vez de esperar que en la ventana elegida por la calculadora aparezca, por arte de magia, cuanto de significativo deseamos ver, vamos a analizar previamente dónde es creciente o decreciente nuestra función. Su derivada es

$$f'(x) = 6x^2 + 18x - 24 = 6(x^2 + 3x - 4)$$
$$= 6(x - 1)(x + 4).$$




Por tanto, los números críticos son 1 y –4, únicos candidatos a extremos locales. Investigamos el signo de los factores y en consecuencia de la derivada en la figura del margen. En ella vemos que

$f'(x) > 0$ en $(-\infty, -4) \cup (1, \infty)$ $\quad$ $f$ creciente.

y

$f'(x) < 0$ en $(-4, 1)$. $\quad$ $f$ decreciente.

Las flechas de abajo indican dónde es creciente o decreciente la función. En particular, queda claro que en la figura 3.36 no se veía lo suficiente de la gráfica de $f$. La volvemos a representar en la ventana $-8 \le x \le 4$, $-25 \le y \le 105$ (figura 3.37a). Hemos elegido ese rango para $y$ con el fin de atrapar los puntos críticos (–4, 102) y (1, –23). Como sabemos que la función es creciente en $(-\infty, -4)$, está claro su comportamiento a la izquierda de la zona visualizada en la figura 3.37a. Análogamente, la función es creciente en $(1, \infty)$, luego conocemos su comportamiento a la derecha de la porción visualizada. La figura 3.37a contiene lo esencial del comportamiento de la función. La figura 3.37b muestra las gráficas de $y = f(x)$ e $y = f'(x)$ para ver la relación entre ellas. Cuando $f'(x) > 0$, $f$ es creciente; cuando $f'(x) < 0$, $f$ es decreciente, y nótese lo que acontece a $f'(x)$ en los extremos locales de $f$. (Volveremos a este punto en breve).

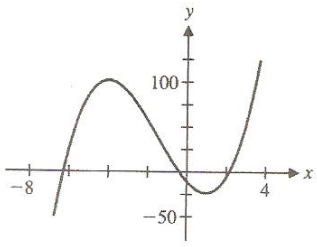



**Figura 3.37a**
$y = 2x^3 + 9x^2 - 24x - 10$.

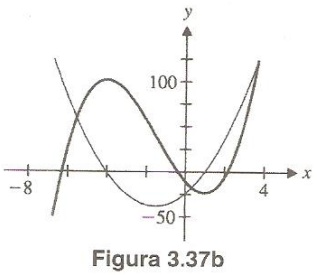



**Figura 3.37b**
$y = f(x)$ e $y = f'(x)$.

Es fácil caer en la tentación de considerar inútil el esfuerzo de esbozar una gráfica dado que la calculadora la proporciona con rapidez y sin esfuerzo alguno por nuestra parte. Eso no es del todo cierto. Podemos representar la función en la calculadora y, jugando el prueba y error con la ventana, obtener una gráfica apropiada. Pero, por desgracia, eso no siempre es suficiente. Así, mientras es obvio que la figura 3.36 era incompleta, la gráfica inicial del ejemplo que sigue tiene aspecto familiar y parece razonable, pero es incorrecta. El Cálculo nos dice qué rasgos esperamos ver en ella. Sin esta información, estamos fiándolo todo a la fortuna.

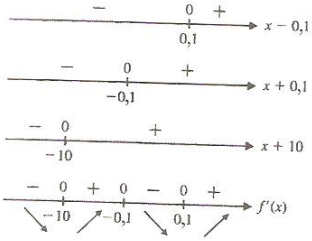
## Ejemplo 4.2 Comportamiento oculto en una gráfica

Representar $f(x) = 3x^4 + 40x^3 - 0{,}06x^2 - 1{,}2x$ mostrando todos sus extremos locales.

**Solución** Nuestro PCS y nuestra calculadora gráfica dan, por defecto, las figuras 3.38a y 3.38b. Se puede conseguir que la figura 3.38b se asemeje más a la 3.38a jugando con la ventana. Pero el Cálculo descubre aspectos de la gráfica que, sin él, permanecerían ocultos.

En primer lugar,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 12x^3 + 120x^2 - 0{,}12x - 1{,}2 \\ &= 12(x^2 - 0{,}01)(x + 10) \\ &= 12(x - 0{,}1)(x + 0{,}1)(x + 10). \end{aligned}$$




Al margen aparecen los signos de los tres factores. Nótese que

$$f'(x) \begin{cases} > 0, \text{ en } (-10, -0{,}1) \cup (0{,}1, \infty) & f \text{ creciente.} \\ < 0, \text{ en } (-\infty, -10) \cup (-0{,}1, 0{,}1). & f \text{ decreciente.} \end{cases}$$

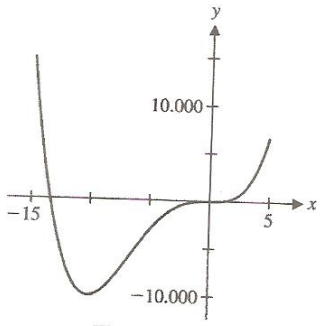



**Figura 3.39a**

El comportamiento global de $f(x) = 3x^4 + 40x^3 - 0{,}06x^2 - 1{,}2x$.

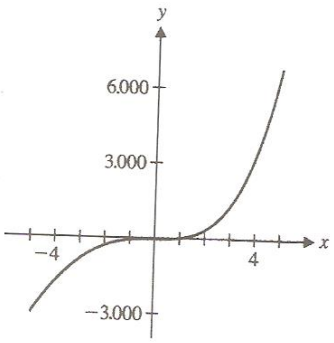



**Figura 3.38a**

Gráfica por defecto en un PCS de $y = 3x^4 + 40x^3 - 0{,}06x^2 - 1{,}2x$.

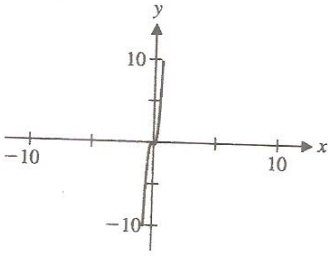



**Figura 3.38b**

Gráfica por defecto en una calculadora de $y = 3x^4 + 40x^3 - 0{,}06x^2 - 1{,}2x$.

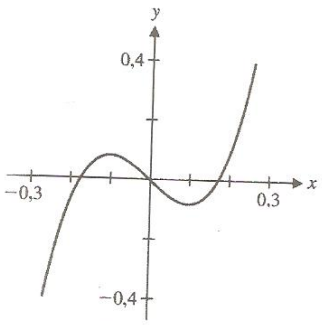



**Figura 3.39b**

Comportamiento local de $f(x) = 3x^4 + 40x^3 - 0{,}06x^2 - 1{,}2x$.

Eso significa que ninguna de las figuras 3.38a o 3.38b es adecuada, ya que no permiten ver el comportamiento en $(-\infty, -10) \cup (-0{,}1, 0{,}1)$. Sin embargo, aumentando el rango de $x$ al intervalo $[-15, 5]$ se obtiene la figura 3.39a, una *gráfica total* donde se refleja ya el comportamiento **global** de la función. En ella vemos el mínimo local en $x = -10$, ausente en las gráficas anteriores, mientras que el comportamiento en un entorno de 0 no está claro. Para verlo es necesaria una gráfica separada, restringida a un pequeño rango de valores $x$, como la figura 3.39b.

En esta figura se aprecia bien el comportamiento para $x$ próximos a cero. En particular, el máximo local en $x = -0{,}1$ y el mínimo local en $x = 0{,}1$ son claramente visibles. Decimos que la figura 3.39b muestra el comportamiento **local** de la función. Las figuras 3.40a y 3.40b muestran el comportamiento global y local de $f$ y $f'$ conjuntamente. Preste especial atención al comportamiento de $f'(x)$ en la vecindad de cada extremo local de $f(x)$.

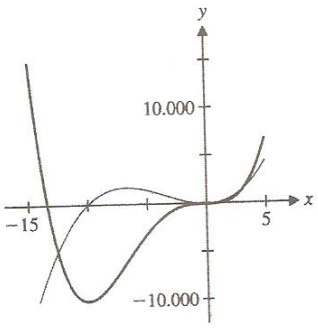



**Figura 3.40a**

$y = f(x)$ e $y = f'(x)$
(comportamiento global)

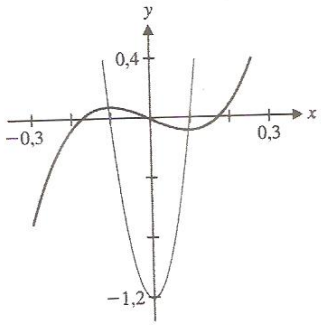



**Figura 3.40b**

$y = f(x)$ e $y = f'(x)$
(comportamiento local)

Quizá haya percibido una conexión entre los extremos locales y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función. El teorema que sigue a continuación lo enuncia formalmente.

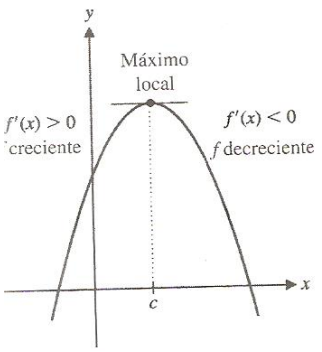



**Figura 3.41a**

Máximo local.

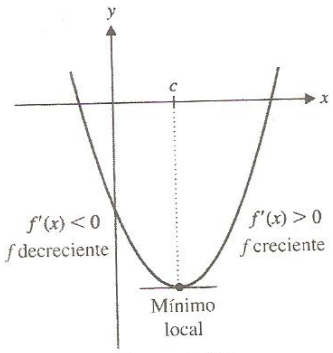



**Figura 3.41b**

Mínimo local.

**Teorema 4.2 (Criterio de la primera derivada)**

Sea $f$ continua en el intervalo $[a, b]$ y sea $c \in (a, b)$ un número crítico de $f$.

(i) Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, c)$ y $f'(x) < 0$ para todo $x \in (c, b)$ (o sea, si $f$ cambia en $c$ de ser creciente a ser decreciente), $f(c)$ es un máximo local.

(ii) Si $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, c)$ y $f'(x) > 0$ para todo $x \in (c, b)$ (o sea, si $f$ cambia en $c$ de ser decreciente a ser creciente), $f(c)$ es un mínimo local.

(iii) Si $f'(x)$ tiene el **mismo** signo en $(a, c)$ que en $(c, b)$, $f(c)$ **no** es un extremo local.

Este resultado se comprende mejor gráficamente. Si $f$ crece a la izquierda de un número crítico $c$ y decrece a su derecha, debe haber un máximo local en $c$ (figura 3.41a). Y si $f$ decrece a la izquierda de $c$ y crece a su derecha, debe haber un mínimo local en $c$ (figura 3.41b). El propio argumento gráfico sugiere la demostración del teorema. Dejamos como ejercicio escribirla en detalle.

**Ejemplo 4.3** **Aplicación del criterio de la primera derivada**

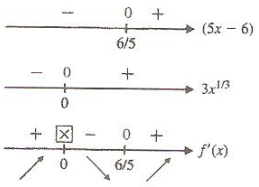
Hallar los extremos locales de la función del ejemplo 4.1, $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 24x - 10$.

**Solución** Vimos en el ejemplo 4.1 que

$$f'(x) \begin{cases} > 0, \text{ en } (-\infty, -4) \cup (1, \infty) & f \text{ creciente.} \\ < 0, \text{ en } (-4, 1). & f \text{ decreciente.} \end{cases}$$

Por el criterio de la primera derivada, $f$ tiene un máximo local en $x = -4$ y un mínimo local en $x = 1$.

El teorema 4.2 es aplicable, asimismo, a funciones con puntos críticos en los que la derivada no está definida.



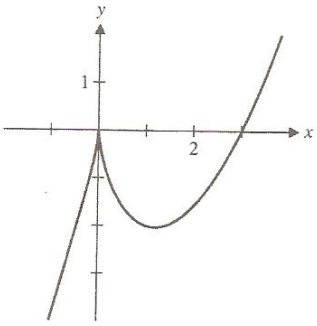




**Figura 3.42**
$y = x^{5/3} - 3x^{2/3}$.

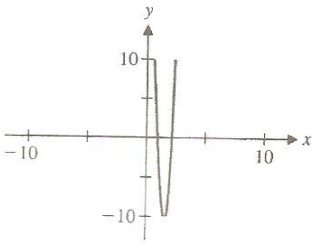



**Figura 3.43**
$f(x) = x^4 + 4x^3 - 5x^2 - 31x + 29$.

### Ejemplo 4.4 Extremos locales de una función con exponentes fraccionarios

Hallar los extremos locales de $f(x) = x^{5/3} - 3x^{2/3}$.

**Solución**

$$f'(x) = \frac{5}{3}x^{2/3} - 3\left(\frac{2}{3}\right)x^{-1/3}$$
$$= \frac{5x - 6}{3x^{1/3}},$$

luego los números críticos son $\frac{6}{5}$ [$f'(\frac{6}{5}) = 0$] y 0 [$f'(0)$ no está definido]. Estudiando los signos de los factores determinamos dónde es $f$ creciente o decreciente. Hemos colocado un ⊠ encima del 0 para indicar que $f'(x)$ no está definida en $x = 0$. Se ve a simple vista que

$$f'(x)\begin{cases} > 0, \text{ en } (-\infty, 0) \cup (\frac{6}{5}, \infty) & f \text{ creciente.} \\ < 0, \text{ en } (0, \frac{6}{5}). & f \text{ decreciente.} \end{cases}$$

En consecuencia, $f$ tiene un máximo local en $x = 0$ y un mínimo local en $x = \frac{6}{5}$. Ambos son claramente visibles en la figura 3.42.

### Ejemplo 4.5 Aproximación de los extremos locales

Hallar los extremos locales de $f(x) = x^4 + 4x^3 - 5x^2 - 31x + 29$ y esbozar su gráfica.

**Solución** La calculadora, con ventana por defecto, da la gráfica de la figura 3.43. Sin análisis suplementario no sabemos si esta figura muestra todos los rasgos significativos de $f$. [Nótese que algunos polinomios de grado 4, $x^4$ por ejemplo, tienen gráficas muy parecidas a la de la figura 3.43]. En esta ocasión, la derivada

$$f'(x) = 4x^3 + 12x^2 - 10x - 31$$

no es fácil de factorizar. Su gráfica (figura 3.44) indica tres ceros, cercanos a –3, –1,5 y 1,5. Como un polinomio cúbico sólo puede tener tres ceros, no hay más. Aplicando a $f'$ el método de Newton o cualquier otro método de hallar raíces, encontramos que sus ceros son aproximadamente $a \approx -2{,}96008$, $b \approx -1{,}63816$ y $c \approx 1{,}59824$. La figura 3.44 muestra que

$$f'(x) > 0, \text{ en } (a, b) \cup (c, \infty) \qquad f \text{ creciente.}$$

y

$$f'(x) < 0, \text{ en } (-\infty, a) \cup (b, c) \qquad f \text{ decreciente.}$$

La conclusión es inmediata: hay un mínimo local en $a \approx -2{,}96008$, un máximo local en $b \approx -1{,}63816$ y un mínimo local en $c \approx 1{,}59824$. Puesto que el único mínimo visible en la figura 3.43 es $x = c$, esa gráfica no es representativa del comportamiento de $f$. Estrechando el rango de $x$ y ensanchando el de $y$, obtenemos la figura 3.45, mucho más útil. Debe convencerse, por el análisis precedente, de que el mínimo **absoluto** está en $x = c \approx 1{,}59824$.

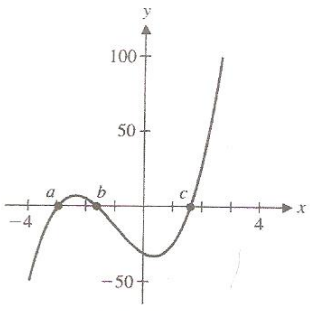



**Figura 3.44**
$f'(x) = 4x^3 + 12x^2 - 10x - 31$.

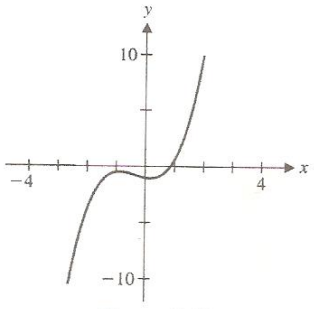


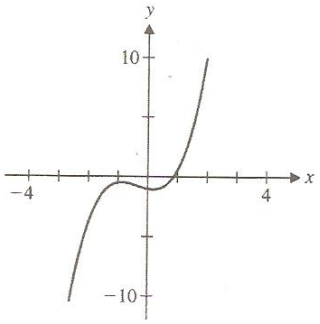

**Figura 3.45**
$f(x) = x^4 + 4x^3 - 5x^2 - 31x + 29$.

# EJERCICIOS 3.4

1. Sea $f(x)$ una función creciente con $f(0) = 2$. Si empezamos a dibujar su gráfica desde el punto (0, 2) hacia la izquierda, ¿hay que subir o bajar con el lápiz? ¿Cómo encaja eso en la definición de creciente?

2. Viajamos por una autopista este-oeste en dirección este. Llegamos al destino, descansamos un rato y regresamos. Explicar el criterio de la primera derivada en términos de las velocidades (positivas y negativas) de ese viaje.

3. Imaginemos que una función derivable $f(x)$ tiene dos números críticos. La calculadora da para ella la gráfica de la figura.




Discutir si esta gráfica es representativa. En otras palabras, ¿hay puntos importantes que no se ven en esa ventana?

4. Supongamos que la función del ejercicio 3 tuviera tres números críticos. Explicar por qué la gráfica no es representativa y cómo habría que cambiar la ventana para que lo fuese.

**En los ejercicios 5-14, hallar (a mano) los intervalos donde la función es creciente o decreciente. Verificar las respuestas representando $f$ y $f'$.**

5. $y = x^3 - 3x + 2$
6. $y = x^3 + 2x^2 + 1$
7. $y = x^4 - 8x^2 + 1$
8. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$
9. $y = (x + 1)^{2/3}$
10. $y = (x - 1)^{1/3}$
11. $y = \operatorname{sen} 3x$
12. $y = \operatorname{sen}^2 x$
13. $y = e^{x^2 - 1}$
14. $y = \ln(x^2 - 1)$

**En los ejercicios 15-34, hallar las coordenadas $x$ de todos los extremos y esbozar una gráfica.**

15. $y = x^3 + 2x^2 - x - 1$
16. $y = x^3 + 4x - 2$
17. $y = x^4 + 2x^2 - x + 2$
18. $y = x^5 + 2x^4 - x^2 + 1$
19. $y = x\sqrt{x^2 + 1}$
20. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$
21. $y = xe^{-2x}$
22. $y = x^2 e^{-x}$
23. $y = \ln x^2$
24. $y = e^{-x^2}$
25. $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$
26. $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$
27. $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$
28. $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$
29. $y = \operatorname{sen} x + \cos x$
30. $y = \cos x - x$
31. $y = \sqrt{x^3 + 3x^2}$
32. $y = 2x^{1/2} - 4x^{-1/2}$
33. $y = x^{2/3} - 2x^{-1/3}$
34. $y = x^{4/3} + 4x^{1/3}$

**En los ejercicios 35-42, hallar las coordenadas $x$ de todos los extremos y esbozar gráficas que muestren los comportamientos local y global de la función.**

35. $y = x^3 - 13x^2 - 10x + 1$
36. $y = x^3 + 15x^2 - 70x + 2$
37. $y = x^4 - 15x^3 - 2x^2 + 40x - 2$
38. $y = x^4 - 16x^3 - 0{,}1x^2 + 0{,}5x - 1$
39. $y = x^5 - 200x^3 + 605x - 2$
40. $y = x^5 - 0{,}5x^3 - 0{,}02x^2 + 0{,}02x + 1$
41. $y = (x^2 + x + 0{,}45)e^{-2x}$
42. $y = x^5 \ln 8x^2$

**En los ejercicios 43-46, esbozar una gráfica de función con las propiedades propuestas.**

43. $f(0) = 1$, $f(2) = 5$, $f'(x) < 0$ para $x < 0$ y $x > 2$, $f'(x) > 0$ para $0 < x < 2$.

44. $f(-1) = 1$, $f(2) = 5$, $f'(x) < 0$ para $x < -1$ y $x > 2$, $f'(x) > 0$ para $-1 < x < 2$, $f'(-1) = 0$, $f'(2)$ no existe.

45. $f(3) = 0$, $f'(x) < 0$ para $x < 0$ y $x > 3$, $f'(x) > 0$ para $0 < x < 3$, $f'(3) = 0$, $f(0)$ y $f'(0)$ no existe.

46. $f(1) = 0$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = 2$, $f'(x) < 0$ para $x < 1$, $f'(x) > 0$ para $x > 1$, $f'(1) = 0$.

47. Un objeto tiene función posición $s(t)$, función velocidad $v(t) = s'(t)$ y función aceleración $a(t) = v'(t)$. Si $a(t) > 0$, la velocidad $v(t)$ es creciente. Dibujar dos gráficas posibles de $v(t)$, una en la que la velocidad se hace menos negativa y otra en la que se hace más positiva. En ambos casos, dibujar las correspondientes gráficas de $s(t)$, que deben ser curvadas. ¿Se parecen más a una parábola abierta hacia arriba o abierta hacia abajo? En la sección 3.5 estudiaremos la curvatura.

48. Repetir el ejercicio 47 con $a(t) < 0$.

49. Demostrar el teorema 4.2 (criterio de la primera derivada).

50. Dar un argumento gráfico para justificar que si $f(a) = g(a)$ y $f'(x) > g'(x)$ para todo $x > a$, entonces $f(x) > g(x)$ para todo $x > a$. Usar el teorema del valor medio para demostrarlo.

**En los ejercicios 51-54, verificar la desigualdad usando el resultado del ejercicio 50.**

51. $2\sqrt{x} > 3 - \dfrac{1}{x}$ para $x > 1$

52. $x > \operatorname{sen} x$ para $x > 0$

53. $e^x > x + 1$ para $x > 0$

54. $x - 1 > \ln x$ para $x > 1$

55. Dar un contraejemplo que demuestre la falsedad de esta afirmación: si $f(0) = 4$ y $f(x)$ es decreciente, la ecuación $f(x) = 0$ tiene exactamente una solución.

56. Discutir si es verdadero o falso este enunciado: si $f(0) = 4$ y $f(x)$ es creciente, la ecuación $f(x) = 0$ carece de soluciones.

57. Las ventas totales de un producto a lo largo de $t$ meses vienen dadas por $s(t) = \sqrt{t + 4}$ (en miles de euros). Calcular e interpretar $s'(t)$.

58. En el ejercicio 57, probar que $s'(t) > 0$ para todo $t > 0$. Explicar, en términos económicos, por qué es imposible $s'(t) < 0$.

59. En este ejercicio usted jugará el papel de profesor y va a elaborar un problema gráfico espinoso. El primer paso consiste en buscar una función con extremos locales tan próximos que sea difícil distinguirlos. Por ejemplo, si se quieren los extremos locales en $x = -0{,}1$ y en $x = 0{,}1$, puede empezar con una función tal que $f'(x) = (x - 0{,}1)(x + 0{,}1) = x^2 - 0{,}01$ (¿ve la razón?). Represente una función con esa derivada para ver si los extremos están «ocultos». A continuación, construya un polinomio de grado 4 con dos extremos muy cercanos a $x = 1$ y otro cerca de $x = 0$.

60. En este ejercicio estudiamos la habilidad de las luciérnagas para sincronizar sus destellos. (Una notable exhibición de esa habilidad puede verse en los vídeos de la serie *Trials of Life*, de David Attenborough). Sea $f(t)$ el ritmo de los destellos de una luciérnaga, de modo que los destellos se producen cuando $f$ toma valores enteros. Sea $e(t)$ el ritmo de otra luciérnaga cercana, cuyos destellos se producen cuando $e(t) = n$ para algún entero $n$. Un modelo de la interacción entre ellas es $f'(t) = \omega + A \operatorname{sen}[e(t) - f(t)]$ con $\omega$ y $A$ constantes. Si las luciérnagas están sincronizadas ($e(t) = f(t)$), entonces $f'(t) = \omega$, de modo que hay un destello cada $1/\omega$ unidades de tiempo. Suponiendo que la diferencia entre $e(t)$ y $f(t)$ es menor que $\pi$, probar que si $f(t) < e(t)$, entonces $f'(t) > \omega$. Explicar por qué eso significa que una luciérnaga está acelerando su ritmo para adaptarlo al de su vecina. Análogamente, discutir qué sucede si $f(t) > e(t)$.

61. El virus HIV ataca células T especializadas en poner en funcionamiento el sistema inmunitario frente a sustancias extrañas. Si $T(t)$ es la población de células T no infectadas tras $t$ días y $V(t)$ la población de HIV en la sangre, un modelo que se ha usado para estudiar el SIDA viene dado por la siguiente **ecuación diferencial** que describe el ritmo de cambio de la población de células T.

$$T'(t) = 10\left[1 + \frac{1}{1 + V(t)}\right] - 0{,}02T(t) + 0{,}01\,\frac{T(t)V(t)}{100 + V(t)} - 0{,}0000024T(t)V(t).$$

Si no hay HIV presentes [esto es, $V(t) = 0$] y $T(t) = 1.000$, probar que $T'(t) = 0$. Explicar por qué eso significa que la población de células T permanece constante en el valor 1.000 (células/mm$^3$). Ahora supongamos que $V(t) = 100$. Demostrar que si $T(t)$ es suficientemente pequeño, $T'(t) > 0$ y la población de células T crecerá. Por otra parte, si $T(t)$ es suficientemente grande, $T'(t) < 0$ y esa población decrecerá. ¿Para qué valor de $T(t)$ es $T'(t) = 0$? Aun cuando esa población permanecería estable, razonar por qué sería una mala noticia para la persona infectada.

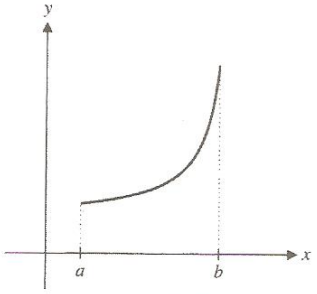



**Figura 3.46a**
Función creciente.

## 3.5 CONCAVIDAD

En la sección 3.4 aprendimos cómo detectar las zonas de crecimiento o decrecimiento de una función. Pero necesitamos afinar más, porque el hecho de saber dónde crece o decrece no basta para conseguir una gráfica precisa. Las figuras 3.46a y 3.46b muestran dos gráficas de funciones crecientes en el mismo intervalo.

Sabiendo sólo que una función es creciente entre $a$ y $b$, ¿cuál de las dos gráficas dibujamos? Sin más información no se puede decidir. Y, sin embargo, es una decisión importante. Por ejemplo, si estamos hablando del estado de su cuenta corriente, aunque ambas gráficas anuncian que está creciendo, el ritmo de crecimiento en la figura 3.46a está aumentando y en la 3.46b está disminuyendo. ¿Cuál preferiría para su cuenta corriente? ¿Por qué?

Las figuras 3.47a y 3.47b son las mismas que las figuras 3.46a y 3.46b, salvo que muestran varias rectas tangentes.

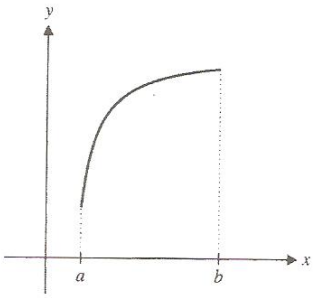



**Figura 3.46b**
Función creciente.

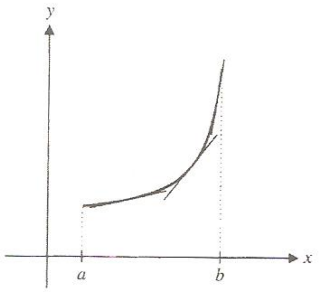



**Figura 3.47a**
Creciente y cóncava hacia arriba

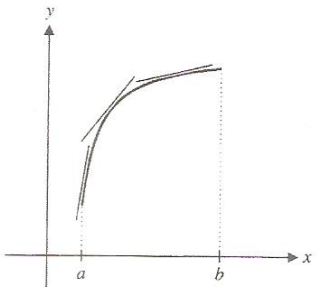



**Figura 3.47b**
Creciente y cóncava hacia abajo

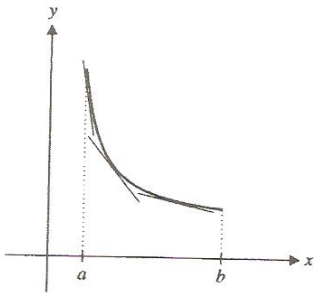



**Figura 3.48a**
Cóncava hacia arriba.

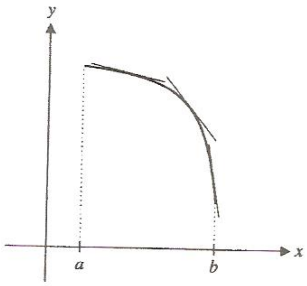



**Figura 3.48b**
Cóncava hacia abajo.

Todas esas rectas tangentes tienen pendientes positivas (porque $f'(x) > 0$), pero mientras sus pendientes crecen en la figura 3.47a, decrecen en la 3.47b. Se dirá que la gráfica de la figura 3.47a es **cóncava hacia arriba** y la de la figura 3.47b **cóncava hacia abajo**.

La situación es similar para funciones decrecientes. Las figuras 3.48a y 3.48b muestran dos formas diferentes de funciones decrecientes. La de la figura 3.48a es cóncava hacia arriba (las pendientes de las rectas tangentes son crecientes) y la de la figura 3.48b es cóncava hacia abajo (las pendientes de las rectas tangentes son decrecientes). Vamos a enunciar la definición precisa de esta idea.

### Definición 5.1

La gráfica de una función $f$, derivable en un intervalo $I$, se dice que es

(i) **cóncava hacia arriba** en $I$ si $f'$ es creciente en $I$.

(ii) **cóncava hacia abajo** en $I$ si $f'$ es decreciente en $I$.

¿Cómo saber si $f'$ es creciente o decreciente? Esa información la da $f''$, la derivada de $f'$. En efecto, del teorema 4.1 se deduce directamente el resultado siguiente.

### Teorema 5.1

Supongamos que $f''$ existe en el intervalo $I$.

(i) Si $f''(x) > 0$ en $I$, la gráfica de $f$ es cóncava hacia arriba en $I$.

(ii) Si $f''(x) < 0$ en $I$, la gráfica de $f$ es cóncava hacia abajo en $I$.

### Ejemplo 5.1 Investigación de la concavidad

Analizar dónde es cóncava hacia arriba y dónde cóncava hacia abajo la gráfica de $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 24x - 10$. Esbozar una gráfica que muestre todos los rasgos significativos del comportamiento de la función.

**Solución** Como

$$f'(x) = 6x^2 + 18x - 24$$

sabemos, por el ejemplo 4.3, que

$$f'(x) \begin{cases} > 0, \text{ en } (-\infty, -4) \cup (1, \infty) & f \text{ creciente.} \\ < 0, \text{ en } (-4, 1) & f \text{ decreciente.} \end{cases}$$

Además,

$$f''(x) = 12x + 18 \begin{cases} > 0, \text{ para } x > -\frac{3}{2} & \text{Cóncava hacia arriba.} \\ < 0, \text{ para } x < -\frac{3}{2} & \text{Cóncava hacia abajo.} \end{cases}$$

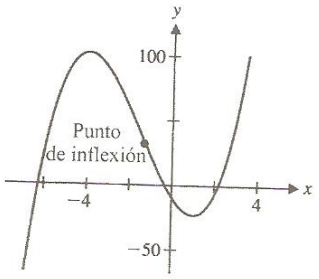
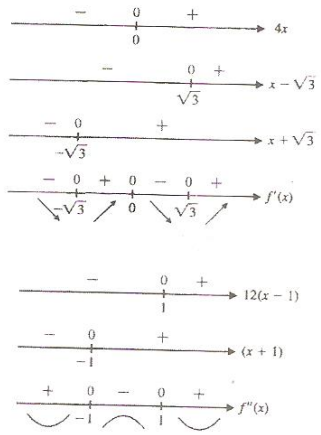



**Figura 3.49**
$y = 2x^3 + 9x^2 - 24x - 10$.

### Advertencia

Si $(c, f(c))$ es un punto de inflexión de $f$, entonces una de dos: o es $f''(c) = 0$ o bien $f''(c)$ no está definido. En consecuencia, los únicos candidatos a puntos de inflexión son los puntos donde $f''$ es cero o no está definida. Pero ¡cuidado! No todos esos puntos son puntos de inflexión.



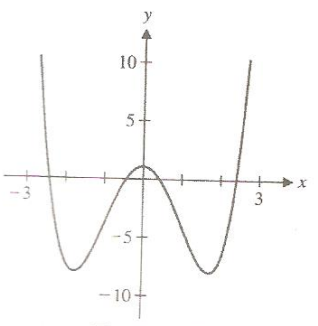




**Figura 3.50**
$y = x^4 - 6x^2 + 1$.

Con toda esta información ya podemos dibujar la gráfica de la figura 3.49. En el punto $(-\frac{3}{2}, f(-\frac{3}{2}))$, la gráfica pasa de ser cóncava hacia abajo a ser cóncava hacia arriba. Tales puntos se llaman **puntos de inflexión**, de acuerdo con la siguiente definición.

### Definición 5.2

Si $f$ es continua en el intervalo $(a, b)$ y su gráfica cambia su concavidad en un punto $c \in (a, b)$ [o sea, es cóncava hacia abajo a un lado de $c$ y hacia arriba al otro lado], se dice que $(c, f(c))$ es un **punto de inflexión** de $f$.

### Ejemplo 5.2 Concavidad y puntos de inflexión

Analizar dónde es cóncava hacia arriba o hacia abajo la gráfica de $f(x) = x^4 - 6x^2 + 1$. Hallar los puntos de inflexión y dibujar una gráfica que capte todos los rasgos significativos de $f$.

**Solución**

$$f'(x) = 4x^3 - 12x = 4x(x^2 - 3)$$
$$= 4x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}).$$

Al margen se indican los signos de los factores de $f'(x)$. Se deduce que

$$f'(x) \begin{cases} > 0, \text{ en } (-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, \infty) & f \text{ creciente.} \\ < 0, \text{ en } (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3}) & f \text{ decreciente.} \end{cases}$$

Además,

$$f''(x) = 12x^2 - 12 = 12(x - 1)(x + 1).$$

De nuevo hemos indicado al margen los signos de los factores, de donde se sigue que

$$f''(x) \begin{cases} > 0, \text{ en } (-\infty, -1) \cup (1, \infty) & \text{Cóncava hacia arriba.} \\ < 0, \text{ en } (-1, 1). & \text{Cóncava hacia abajo.} \end{cases}$$

Para facilitar la interpretación hemos dibujado curvas cóncavas hacia arriba o hacia abajo en cada intervalo. Finalmente, como la gráfica cambia su concavidad en $x = -1$ y en $x = 1$, hay puntos de inflexión en $(-1, -4)$ y en $(1, -4)$. Reuniendo toda esa información se llega a la figura 3.50.

El próximo ejemplo demuestra que $f''(x) = 0$ no garantiza la existencia de un punto de inflexión.

### Ejemplo 5.3 Una gráfica sin puntos de inflexión

Investigar la concavidad de $f(x) = x^4$ y localizar los puntos de inflexión.

**Solución** No hay nada extraño en esta función. Como $f'(x) = 4x^3$, $f$ es creciente para $x > 0$ (donde $f'(x) > 0$) y decreciente en $x < 0$ (donde $f'(x) < 0$). Además, $f''(x) = 12x^2 > 0$ para todo $x \neq 0$ y $f''(0) = 0$. Por tanto, la gráfica es cóncava hacia arriba para todo $x \neq 0$. Aunque $f''(0) = 0$, **no** hay punto de inflexión en $x = 0$. La figura 3.51 muestra la gráfica de la función.

La segunda derivada también guarda relación con los extremos. Supongamos que $f'(c) = 0$ y que la gráfica de $f$ es cóncava hacia abajo en un intervalo abierto que contiene al número $c$. Entonces, la gráfica cerca de $c$ tiene el aspecto de la figura 3.52a, de modo que $f(c)$ es un máximo local.

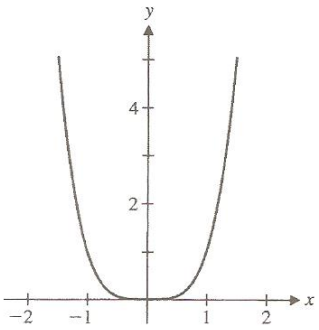



**Figura 3.51**
$y = x^4$.

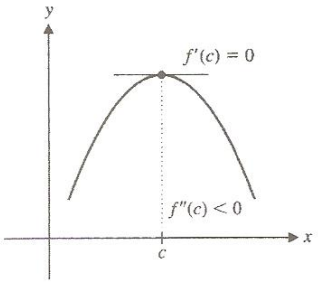



**Figura 3.52a**
Máximo local.

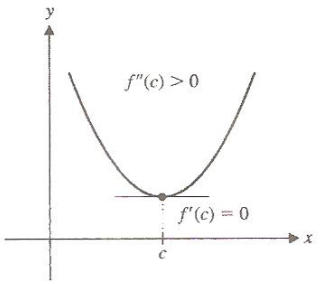



**Figura 3.52b**
Mínimo local.

Análogamente, si $f'(c) = 0$ y la gráfica de $f$ es cóncava hacia arriba en un intervalo abierto que contiene al número $c$, en un entorno de $c$ la gráfica será parecida a la de la figura 3.52b y, por tanto, $f(c)$ es un mínimo local.

En términos más precisos, tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 5.2 (Criterio de la segunda derivada)**

Sea $f$ una función continua en el intervalo $(a, b)$, con $f'(c) = 0$ en algún $c \in (a, b)$.

(i) Si $f''(c) < 0$, $f(c)$ es un máximo local de $f$.

(ii) Si $f''(c) > 0$, $f(c)$ es un mínimo local de $f$.

Dejamos su demostración como ejercicio. Al aplicar este teorema, piense en las figuras 3.52a y 3.52b.

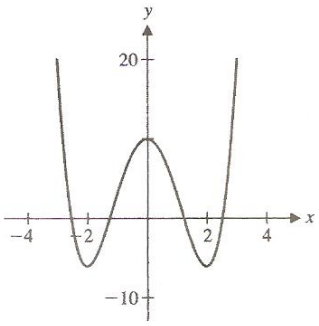



**Figura 3.53**
$y = x^4 - 8x^2 + 10$.

**Ejemplo 5.4** **Aplicación del criterio de la segunda derivada**

Hallar los extremos locales de $f(x) = x^4 - 8x^2 + 10$ aplicando el criterio de la segunda derivada.

**Solución** Puesto que

$$f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 6)$$
$$= 4x(x - 2)(x + 2).$$

Los números críticos son 0, 2 y −2. Vamos a aplicarles el criterio de la segunda derivada. Se tiene

$$f''(x) = 12x^2 - 16,$$

así que

$$f''(0) = -16 < 0,$$
$$f''(-2) = 32 > 0$$

y

$$f''(2) = 32 > 0.$$

Por consiguiente, $f(0)$ es un máximo local, en tanto que $f(-2)$ y $f(2)$ son mínimos locales. La figura 3.53 muestra la gráfica de $y = f(x)$.

**Nota 5.1**

Cuando $f''(c) = 0$ y cuando $f''(c)$ no está definido, el criterio de la segunda derivada no concluye nada. Es decir, $f(c)$ puede ser máximo local, mínimo local o ninguna de ambas cosas. En esas circunstancias hay que utilizar el criterio de la primera derivada, como ilustra el ejemplo 5.5.

**Ejemplo 5.5** **Funciones para las que el criterio de la segunda derivada no concluye nada**

Intentar clasificar los extremos locales de (a) $f(x) = x^3$, (b) $g(x) = x^4$ y (c) $h(x) = -x^4$ mediante el criterio de la segunda derivada.

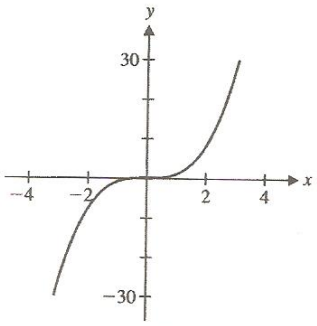



**Figura 3.54a**
$y = x^3$.

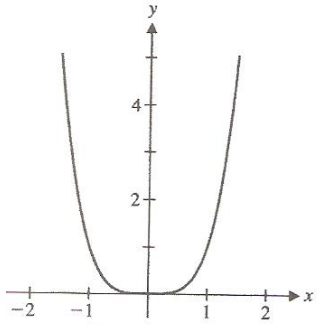



**Figura 3.54b**
$y = x^4$.

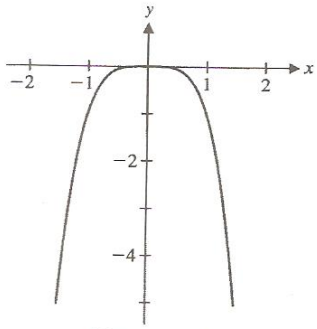



**Figura 3.54c**
$y = -x^4$.

**Solución** (a) Como $f'(x) = 3x^2$ y $f''(x) = 6x$, el único número crítico es $x = 0$, donde $f''(0) = 0$. Dejamos como ejercicio probar que el punto (0, 0) no es un extremo local (figura 3.54a).

(b) Ahora $g'(x) = 4x^3$ y $g''(x) = 12x^2$ y el único número crítico es $x = 0$, con $g''(0) = 0$. Sin embargo, en este caso $g'(x) < 0$ para $x < 0$ y $g'(x) > 0$ para $x > 0$, así que el criterio de la primera derivada asegura que (0, 0) es un mínimo local (figura 3.54b).

(c) Puesto que $h'(x) = -4x^3$ y $h''(x) = -12x^2$, de nuevo el único número crítico es $x = 0$, donde $h''(0) = 0$. Dejamos como ejercicio demostrar que (0, 0) es un máximo local de $h$ (figura 3.54c).

Las derivadas primera y segunda aportan información útil para esbozar la gráfica de una función, como muestra el próximo ejemplo.

## Ejemplo 5.6 Gráfica de una función racional

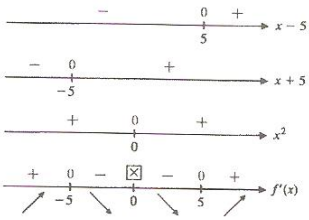
Esbozar una gráfica de $f(x) = x + \dfrac{25}{x}$ que muestre todos sus rasgos significativos.

**Solución** El dominio de $f$ consta de todos los números reales excepto $x = 0$. Además,

$$f'(x) = 1 - \frac{25}{x^2} = \frac{x^2 - 25}{x^2} \qquad \text{Sumar las fracciones.}$$

$$= \frac{(x-5)(x+5)}{x^2}$$

Así, pues, los únicos números críticos son $x = -5$, $x = 5$. (¿Por qué $x = 0$ **no** es número crítico?).




Al margen se han indicado los signos de los tres factores de $f'(x)$. De ahí se sigue que

$$f'(x) \begin{cases} > 0, \text{ en } (-\infty, -5) \cup (5, \infty) & f \text{ creciente.} \\ < 0, \text{ en } (-5, 0) \cup (0, 5). & f \text{ decreciente.} \end{cases}$$

Además,

$$f''(x) = \frac{50}{x^3} \begin{cases} > 0, \text{ en } (0, \infty) & \text{Cóncava hacia arriba.} \\ < 0, \text{ en } (-\infty, 0). & \text{Cóncava hacia abajo.} \end{cases}$$

Hay que tener cuidado en este momento. **No** hay punto de inflexión en $x = 0$, a pesar de que la gráfica es cóncava hacia arriba a un lado de $x = 0$ y cóncava hacia abajo al otro lado. (¿Por qué no?).

Ahora podemos usar el criterio de la primera derivada o el de la segunda para determinar los extremos locales. Por el criterio de la segunda derivada,

$$f''(5) = \frac{50}{125} > 0$$

y

$$f''(-5) = -\frac{50}{125} < 0,$$

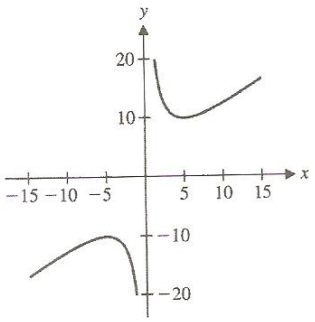



**Figura 3.55**

$y = x + \dfrac{25}{x}$.

de manera que hay un mínimo local en $x = 5$ y un máximo local en $x = -5$. Finalmente, para dibujar una gráfica representativa necesitamos saber qué ocurre cerca de $x = 0$, ya que 0 no pertenece al dominio de $f$. Se tiene

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(x + \frac{25}{x}\right) = \infty$$

y

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \left(x + \frac{25}{x}\right) = -\infty.$$

Por tanto, en $x = 0$ hay una asíntota vertical. Uniendo toda la información anterior se obtiene la gráfica de la figura 3.55.

En el ejemplo 5.6 hemos calculado $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ y $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ para conocer el comportamiento de $f$ en las proximidades de $x = 0$. Era necesario porque $x = 0$ no estaba en el dominio de $f$. En el ejemplo que sigue veremos que $x = -2$ no está en el dominio de $f'$ (aunque sí está en el de $f$), por lo que necesitaremos calcular $\lim_{x \to -2^+} f'(x)$ y $\lim_{x \to -2^-} f'(x)$ con el fin de conocer el comportamiento de las rectas tangentes en el entorno de $x = -2$.

### Ejemplo 5.7 Una función con tangente vertical en un punto de inflexión

Esbozar una gráfica de $f(x) = (x + 2)^{1/5} + 4$ que muestre todos sus rasgos significativos.

**Solución** El dominio de $f$ es toda la recta real. Además,

$$f'(x) = \frac{1}{5}(x + 2)^{-4/5} > 0, \text{ para } x \neq -2.$$

Así, pues, $f$ es creciente en todas partes, excepto en $x = -2$ [es el único número crítico, $f'(-2)$ no está definida]. Concluimos que $f$ no tiene extremos locales. Por otra parte,

$$f''(x) = -\frac{4}{25}(x + 2)^{-9/5} \begin{cases} > 0, \text{ en } (-\infty, -2) & \text{Cóncava hacia arriba.} \\ < 0, \text{ en } (-2, \infty) & \text{Cóncava hacia abajo.} \end{cases}$$

Por tanto, hay un punto de inflexión en $x = -2$. Puesto que $-2$ está en el dominio de $f$, pero no en el de $f'$, consideramos

$$\lim_{x \to -2^-} f'(x) = \lim_{x \to -2^-} \frac{1}{5}(x + 2)^{-4/5} = \infty$$

y

$$\lim_{x \to -2^+} f'(x) = \lim_{x \to -2^+} \frac{1}{5}(x + 2)^{-4/5} = \infty.$$

Eso quiere decir que la recta tangente en $x = -2$ es vertical. Obtenemos la gráfica de la figura 3.56.

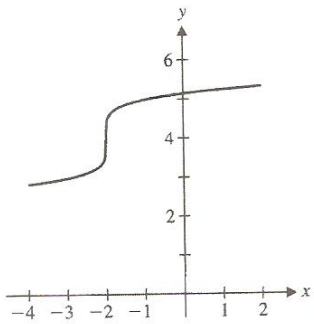



**Figura 3.56**

$y = (x + 2)^{1/5} + 4$.

## EJERCICIOS 3.5

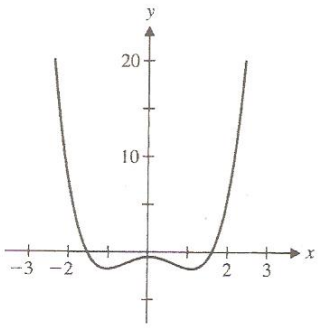
1. Se suele decir que una gráfica es cóncava hacia arriba si puede «contener agua». Eso es cierto, desde luego, para las parábolas $y = x^2$, pero ¿es cierto para gráficas como la de $y = 1/x^2$? Siempre es útil traducir un concepto difícil en lenguaje coloquial, pero se corre el riesgo de simplificar en exceso. ¿Piensa que lo de «contener agua» es útil o más bien crea confusión? Intente describir la concavidad hacia arriba a su manera en lenguaje ordinario. (Ayuda: Una imagen popular se refiere a sonrisas y caras de pocos amigos).

2. Si $f(t)$ representa el montante de su cuenta corriente en el tiempo $t$, explique en términos de gasto y ahorro qué pue-

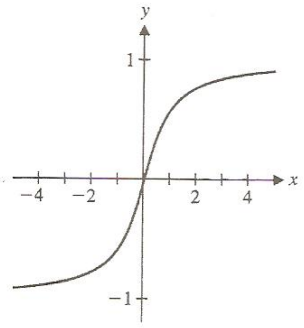
de ocurrir para que $f(t)$ sea (a) decreciente y cóncava hacia abajo, (b) creciente y cóncava hacia arriba y (c) decreciente y cóncava hacia arriba.

**En los ejercicios 3-6, estimar los intervalos donde la función es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo. (Ayuda: Estimar dónde crece o decrece la pendiente).**

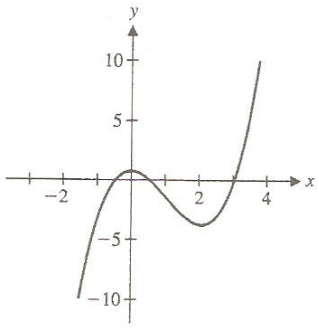
3.



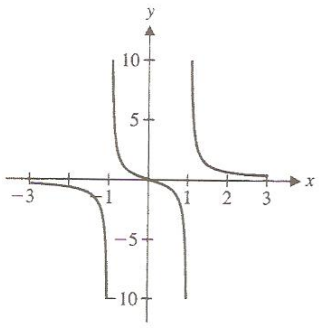

4.




5.




6.




**En los ejercicios 7-38, hallar los intervalos de crecimiento o decrecimiento, los extremos locales, los intervalos de concavidad definida y los puntos de inflexión. Esbozar la gráfica.**

7. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$
8. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 6x$
9. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$
10. $f(x) = x^4 + 4x - 2$
11. $f(x) = x + 1/x$
12. $f(x) = x^2 - 16/x$
13. $f(x) = x^3 - 6x + 1$
14. $f(x) = x^3 + 3x - 1$
15. $f(x) = x^4 + 4x^3 - 1$
16. $f(x) = x^4 + 4x^2 + 1$
17. $f(x) = xe^{-x}$
18. $f(x) = e^{-x^2}$
19. $f(x) = x^2\sqrt{x^2 - 9}$
20. $f(x) = x\sqrt{x^2 - 9}$
21. $f(x) = (x^2 + 1)^{2/3}$
22. $f(x) = x \ln x$
23. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 9}$
24. $f(x) = \dfrac{x}{x + 2}$
25. $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$
26. $f(x) = x + \cos x$
27. $f(x) = e^{-x} \operatorname{sen} x$
28. $f(x) = e^{-2x} \cos x$
29. $f(x) = x^{3/4} - 4x^{1/4}$
30. $f(x) = x^{2/3} - 4x^{1/3}$
31. $f(x) = \sqrt[3]{2x^2 - 1}$
32. $f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$
33. $f(x) = x^4 - 26x^3 + x$
34. $f(x) = 2x^4 - 11x^3 + 17x^2$
35. $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x}$
36. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$
37. $f(x) = x^4 - 16x^3 + 42x^2 - 39{,}6x + 14$
38. $f(x) = x^4 + 32x^3 - 0{,}02x^2 - 0{,}8x$

**En los ejercicios 39-44, esbozar una gráfica con las propiedades requeridas.**

39. $f(0) = 2$, $f'(x) > 0$ para todo $x$, $f'(0) = 1$, $f''(x) > 0$ para $x > 0$, $f''(x) < 0$ para $x < 0$, $f''(0) = 0$

40. $f(0) = 1$, $f'(x) \geq 0$ para todo $x$, $f'(0) = 0$, $f''(x) > 0$ para $x > 0$, $f''(x) < 0$ para $x < 0$, $f''(0) = 0$

41. $f(0) = 0$, $f'(x) > 0$ para $x < -1$ y $-1 < x < 1$, $f'(x) < 0$ para $x > 1$, $f''(x) > 0$ para $x < -1$, $0 < x < 1$ y $x > 1$, $f''(x) < 0$ para $-1 < x < 0$

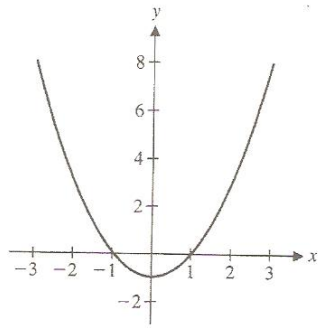
42. $f(0) = 2$, $f'(x) > 0$ para todo $x$, $f'(0) = 1$, $f''(x) > 0$ para $x < 0$, $f''(x) < 0$ para $x > 0$

43. $f(0) = 0$, $f(-1) = -1$, $f(1) = 1$, $f'(x) > 0$ para $x < -1$ y $0 < x < 1$, $f'(x) < 0$ para $-1 < x < 0$ y $x > 1$, $f''(x) < 0$ para $x < 0$ y $x > 0$

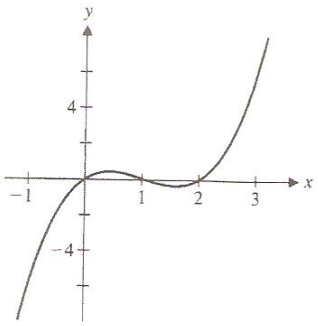
44. $f(1) = 0$, $f'(x) < 0$ para $x < 1$, $f'(x) > 0$ para $x > 1$, $f''(x) < 0$ para $x < 1$ y $x > 1$

**En los ejercicios 45 y 46, estimar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos locales, los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión.**

45.




46.




47. Repetir el ejercicio 45 si la gráfica dada es la de $f'(x)$ en lugar de la de $f(x)$.

48. Repetir el ejercicio 46 si la gráfica dada es la de $f'(x)$ en lugar de la de $f(x)$.

49. Sea $\omega(t)$ la profundidad del agua en un depósito que abastece a una ciudad. ¿Qué noticia sería mejor en el instante $t = 0$, $\omega''(0) = 0{,}05$ o $\omega''(0) = -0{,}05$? ¿O necesitaría conocer el valor de $\omega'(0)$ para decidirlo?

50. Sea $T(t)$ la temperatura de un enfermo en el instante $t$. ¿Qué noticia sería mejor en $t = 0$: $T''(0) = 2$ o $T''(0) = -2$? ¿O necesitaría conocer el valor de $T'(0)$ y de $T(0)$ para decidirlo?

51. Una empresa gasta $x$ euros en publicidad y sus ventas ascienden a $s(x) = -3x^3 + 270x^2 - 3600x + 18.000$ (euros). Hallar el valor de $x$ que hace máximo el ritmo de cambio de las ventas. (Ayuda: ¡Lea atentamente la pregunta!).

52. Para la función de ventas del ejercicio 51, hallar el punto de inflexión y explicar por qué se conoce como el «punto de disminución de rendimientos».

53. A una empresa le cuesta $C(x) = 0{,}01x^2 + 40x + 3.600$ euros manufacturar $x$ unidades de un producto. La **función coste medio** para esa **función de costes** es $\overline{C}(x) = \dfrac{C(x)}{x}$. Calcular el valor de $x$ que minimiza el coste medio.

54. En el ejercicio 53 la función de costes está relacionada con la eficiencia del proceso de producción. Explicar por qué una función de costes cóncava hacia abajo indica mayor eficiencia que una cóncava hacia arriba.

55. Probar que toda función del tipo $f(x) = x^4 + cx^3$, con $c \neq 0$, tiene un punto de inflexión. ¿Qué papel juega la constante $c$ en la gráfica de $f(x)$?

56. Los ejemplos que siguen ponen de manifiesto que no hay ajuste total entre puntos de inflexión y lugares donde $f''(x) = 0$.
(a) Para $f(x) = x^6$, probar que $f''(0) = 0$, pero no hay punto de inflexión en $x = 0$.
(b) Demostrar que $g(x) = x|x|$ tiene un punto de inflexión en $x = 0$, pero $g''(0)$ no existe.

57. Exhibir una función que demuestre la falsedad de la siguiente afirmación: Si la gráfica de $y = f(x)$ es cóncava hacia abajo en todo $x$, la ecuación $f(x) = 0$ tiene al menos una solución.

58. Discutir si este enunciado es verdadero o falso: Si $f(0) = 1$, $f''(x)$ existe para todo $x$ y la gráfica de $y = f(x)$ es cóncava hacia abajo en todo $x$, la ecuación $f(x) = 0$ tiene al menos una solución.

59. Un principio básico de la Física establece que la luz sigue trayectorias de tiempo mínimo. Supuesto que la velocidad de la luz disminuye en la atmósfera terrestre conforme la altitud disminuye, argumentar que la trayectoria de la luz es cóncava hacia abajo. Explicar por qué eso significa que, en el ocaso, el Sol parece estar más alto de lo que realmente está.

60. Demostrar el teorema 5.2 (el criterio de la segunda derivada). (Ayuda: Piense qué dice la definición de $f''(c)$ cuando $f''(c) > 0$ y cuando $f''(c) < 0$).

61. En este ejercicio investigamos un problema básico de Genética. Una especie se reproduce con probabilidades $p_0$ de no tener descendientes, $p_1$ de tener uno, $p_2$ de tener dos, ..., y en general probabilidad $p_n$ de tener $n$, que es el máximo número posible de descendientes.
(a) Explicar por qué, para cada $i$, se tiene $0 \leq p_i \leq 1$ y $p_0 + p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$. Definimos la función $F(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + \cdots + p_nx^n$. La menor solución no negativa de la ecuación $F(x) = x$, con $0 \leq x \leq 1$, representa la probabilidad de que la especie se extinga.
(b) Probar gráficamente que si $p_0 > 0$ y $F'(1) > 1$, hay una solución de $F(x) = x$ con $0 < x < 1$. Por tanto, hay una probabilidad positiva de supervivencia.
(c) Probar que, sin embargo, si $p_0 > 0$ y $F'(1) < 1$, no hay soluciones de $F(x) = x$ con $0 < x < 1$. (Ayuda: Demostrar antes que $f$ es creciente y cóncava hacia arriba).

## 3.6 TRAZADO DE CURVAS

Se estará preguntando a qué fin perder más tiempo en el trazado de curvas dado que ya hemos dibujado unas cuantas y, además, la calculadora las dibuja por sí sola. ¿Por qué empeñarnos en hacerlo a mano? Ni qué decir tiene que las calculadoras son instrumentos poderosos en las aplicaciones de las Matemáticas. Como autores de este libro, así lo reconocemos. Hemos hecho amplio uso de PCS (Maple y Mathematica) en su preparación e incluso en el diseño de ejercicios. Entonces, ¿por qué castigar al lector con gráficas a mano?

Puede que en un debate en televisión los contertulios exhibieran diez razones para un comportamiento tan sádico de los profesores de Matemáticas, pero no. Hay una sola razón: las calculadoras, en realidad, no dibujan gráficas. Lo que hacen es calcular puntos (muchísimos, si se desea), marcarlos y unirlos por una curva suave. Esto funciona bien en general, pero a veces no. El problema es qué ventana se elige y cuántos puntos se calculan. Y esto sólo se puede decidir de forma razonada con ayuda del Cálculo, que nos informa de las propieddaes que debemos mostrar en una gráfica para que sea significativa.

Empezaremos con una lista de pruebas que deben llevarse a cabo con la función $y = f(x)$ que se quiere representar.

- **Dominio:** Antes de nada hay que conocer el dominio de $f$.
- **Asíntotas verticales:** Estudiar el límite de $f$ cuando $x$ tiende a cualquier punto aislado que no pertenezca al dominio para ver si hay en él una asíntota vertical o una discontinuidad de salto o evitable.
- **Información de la primera derivada:** Investigar dónde es creciente o decreciente la función y hallar sus extremos locales.
- **Rectas tangentes verticales:** En todo punto aislado que no pertenezca al dominio de $f'$, pero sí al de $f$, analizar los valores límites de $f'(x)$ para determinar si hay allí una recta tangente vertical.
- **Información de la segunda derivada:** Investigar dónde es cóncava hacia arriba o hacia abajo la gráfica y localizar sus puntos de inflexión.
- **Asíntotas horizontales:** Hallar los límites de $f(x)$ cuando $x \to \infty$ y $x \to -\infty$.
- **Intersecciones con los ejes:** Localizar los puntos de corte de la gráfica con los ejes $x$ e $y$ si los hay. Si no se puede hacer exactamente, aproximarlos (por el método de Newton, por ejemplo).

De momento, vamos a aplicar esto en un caso muy simple.

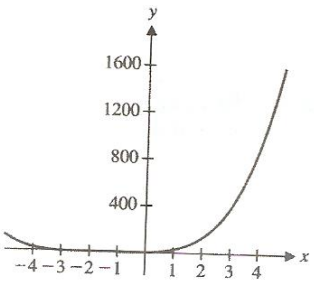



**Figura 3.57a**
$y = x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 8x + 1$
(una posible visualización).

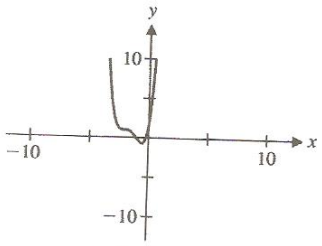



**Figura 3.57b**
$y = x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 8x + 1$
(típica gráfica de calculadora).

### Ejemplo 6.1 Gráfica de un polinomio

Esbozar una gráfica de $f(x) = x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 8x + 1$ que muestre todos sus rasgos significativos.

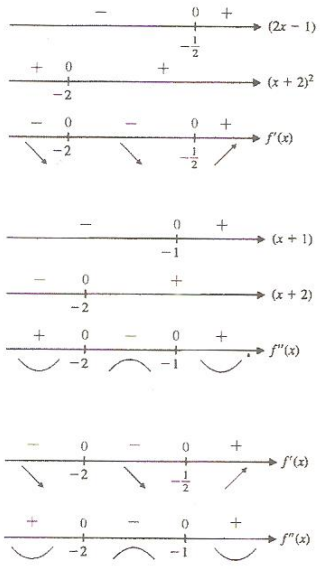
**Solución** ¿Y por qué no usar calculadora? Las calculadoras eligen la ventana gráfica por dos métodos (algunas ofrecen la posibilidad de elección al usuario). En el primero calculan valores de $y$ en un rango estándar de valores de $x$. La ventana se elige de modo que esos valores de $y$ aparezcan en ella. Eso da algo como la figura 3.57a (generada con Maple). En el segundo, toman una ventana prefijada, en muchas de ellas

$$-10 \le x \le 10 \quad \text{y} \quad -10 \le y \le 10.$$

Con esa ventana la gráfica resulta ser la de la figura 3.57b, muy distinta de la anterior. Sin recurrir al Cálculo es difícil decir si alguna de ellas, o ninguna, es representativa el comportamiento de $f$. Un poco de análisis disipará la duda.

En primer lugar, el dominio de $f$ es toda la recta real. Además, al ser un polinomio, no hay asíntotas verticales u horizontales. (¿Por qué?). La primera derivada es

$$f'(x) = 4x^3 + 18x^2 + 24x + 8 = 2(2x + 1)(x + 2)^2.$$




Estudiando los signos de los factores de $f'$ (al margen), se concluye que

$$f'(x)\begin{cases} > 0, \text{ en } (-\frac{1}{2}, -\infty) & f \text{ creciente.} \\ < 0, \text{ en } (-\infty, -2) \cup (-2, -\frac{1}{2}) & f \text{ decreciente.} \end{cases}$$

Por tanto, hay un mínimo local en $x = -\frac{1}{2}$ y no hay máximos locales. La segunda derivada es

$$f''(x) = 12x^2 + 36x + 24 = 12(x + 2)(x + 1).$$

Del análisis de los signos de sus factores se deduce que

$$f''(x) = \begin{cases} > 0, \text{ en } (-\infty, -2) \cup (-1, \infty) & \text{Cóncava hacia arriba.} \\ < 0, \text{ en } (-2, -1) & \text{Cóncava hacia abajo.} \end{cases}$$

Por tanto, hay puntos de inflexión en $x = -2$ y en $x = -1$.

Finalmente, para hallar las $x$-intersecciones resolvemos $f(x) = 0$. Usando el método de Newton o la calculadora, obtenemos dos intersecciones con el eje $x$: $x = -1$ (exacta) y $x \approx -0{,}160713$. Los valores de $x$ significativos que hemos encontrado son $x = -2$, $x = -1$ y $x = -\frac{1}{2}$, que corresponden a la gráfica de $y = f(x)$ a los puntos $(-2, 1)$, $(-1, 0)$ y $(-\frac{1}{2}, -\frac{11}{16})$.

Resumimos toda la información de $f'$ y $f''$ en el margen. La figura 3.58 muestra todos los aspectos significativos en la ventana $-3 \le x \le 1$, $-2 \le y \le 8$.

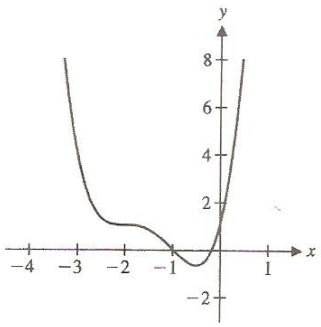



**Figura 3.58**

$y = x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 8x + 1$.

En el ejemplo que sigue examinamos una función que tiene extremos locales, puntos de inflexión y asíntotas horizontales y verticales.

### Ejemplo 6.2 Gráfica de una función racional

Esbozar una gráfica de $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x^3}$ que incluya todos sus rasgos significativos.

**Solución** La figura 3.59a muestra la gráfica generada por defecto con un PCS (Maple) y no es muy útil. La figura 3.59b muestra la gráfica generada por defecto en una calculadora gráfica (con ventana $-10 \le x \le 10$ y $-10 \le y \le 10$). Es mejor que la anterior, pero ¿se ven en ella todas las características interesantes de la función? El Cálculo nos permitirá responder. Seguimos el esquema indicado al comienzo de la sección.

El dominio de $f$ es toda la recta real excepto $x \neq 0$. Como $x = 0$ es un punto aislado que no pertenece al dominio de $f$, investigamos los límites de $f$ cuando $x$ tiende a 0. Se tiene

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\overset{-}{x^2 - 3}}{\underset{+}{x^3}} = -\infty \tag{6.1}$$

y

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{\overset{-}{x^2 - 3}}{\underset{-}{x^3}} = \infty. \tag{6.2}$$

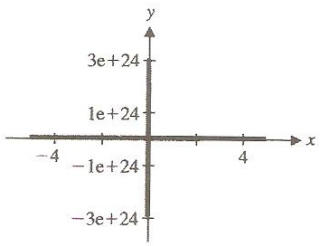



**Figura 3.59a**

$y = \dfrac{x^2 - 3}{x^3}$.

De (6.1) y (6.2) se deduce que la gráfica tiene una asíntota vertical en $x = 0$.

Ahora buscamos la información de la primera derivada.

$$f'(x) = \frac{2x(x^3) - (x^2 - 3)(3x^2)}{(x^3)^2} \qquad \text{Regla del cociente.}$$

$$= \frac{x^2[2x^2 - 3(x^2 - 3)]}{x^6} \qquad \text{Factorizar y cancelar } x^2.$$

$$= \frac{9 - x^2}{x^4}$$

$$= \frac{(3 - x)(3 + x)}{x^4}. \qquad \text{Factorizar el numerador.}$$

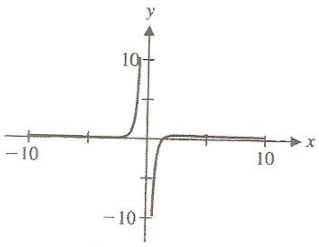



**Figura 3.59b**

$y = \dfrac{x^2 - 3}{x^3}$.

Al margen se indican los signos de los factores de $f'$, de donde se sigue que

$$f'(x)\begin{cases} > 0, \text{ en } (-3, 0) \cup (0, 3) & f \text{ creciente.} \\ < 0, \text{ en } (-\infty, -3) \cup (3, \infty). & f \text{ decreciente.} \end{cases} \tag{6.3}$$

Así, pues, $f$ tiene un mínimo local en $x = -3$ y un máximo local en $x = 3$.

La segunda derivada es

$$f''(x) = \frac{-2x(x^4) - (9 - x^2)(4x^3)}{(x^4)^2} \quad \text{Regla del cociente.}$$

$$= \frac{-2x^3[x^2 + (9 - x^2)(2)]}{x^8} \quad \text{Sacar un factor } -2x^3 \text{ y cancelar } x^3.$$

$$= \frac{-2(18 - x^2)}{x^5}$$

$$= \frac{2(x - \sqrt{18})(x + \sqrt{18})}{x^5}. \quad \text{Factorizar el numerador.}$$

De los signos de sus factores (al margen) se sigue que

$$f''(x)\begin{cases} > 0, \text{ en } (-\sqrt{18}, 0) \cup (\sqrt{18}, \infty) & \text{Cóncava hacia arriba.} \\ < 0, \text{ en } (-\infty, -\sqrt{18}) \cup (0, \sqrt{18}). & \text{Cóncava hacia abajo.} \end{cases} \tag{6.4}$$

Por tanto, hay puntos de inflexión en $x = \pm\sqrt{18}$. (¿Por qué no lo hay en $x = 0$?

Para conocer el comportamiento cuando $x \to \pm\infty$, calculamos

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 3}{x^3}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left( \frac{1}{x} - \frac{3}{x^3} \right) = 0. \tag{6.5}$$

Análogamente,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0. \tag{6.6}$$

Por tanto, la recta $y = 0$ es asíntota horizontal tanto para $x \to \infty$ como para $x \to -\infty$. Finalmente, las $x$-intersecciones son las soluciones de

$$0 = f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^3},$$

o sea, $x = \pm\sqrt{3}$. Nótese que no hay $y$-intersecciones, ya que $x = 0$ no está en el dominio de $f$. Ya tenemos toda la información necesaria para dibujar una gráfica representativa. Probando un poco para dar con la ventana más adecuada, se llega a la figura 3.60. Comprobar que es consistente con la información contenida en (6.1)-(6.6). Aunque la existencia de los puntos de inflexión está indicada con claridad, su localización queda poco clara. Pero los extremos y las asíntotas se ven con absoluta nitidez, algo que no ocurría en las figuras 3.59a y 3.59b.

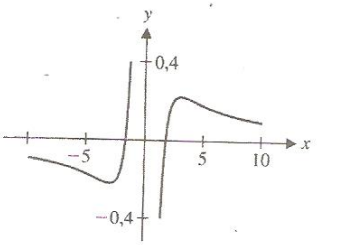



**Figura 3.60**

$y = \dfrac{x^2 - 3}{x^3}$.

En el ejemplo siguiente hay dos asíntotas verticales, un solo extremo local y ningún punto de inflexión.

### Ejemplo 6.3 Una gráfica con dos asíntotas verticales

Dibujar una gráfica de $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$ que incluya todos sus rasgos significativos.

**Solución** Las gráficas por defecto de un PCS y de una calculadora gráfica pueden verse en las figuras 3.61a y 3.61b. El dominio de $f$ es toda la recta real salvo $x = \pm 2$ (porque anulan el denominador). La figura 3.61b sugiere asíntotas verticales en $x = \pm 2$, pero hay que estudiarlo con cuidado.

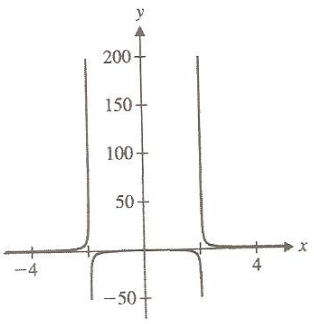



**Figura 3.61a**

$y = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$.

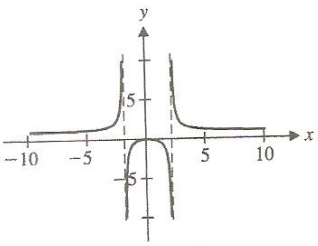
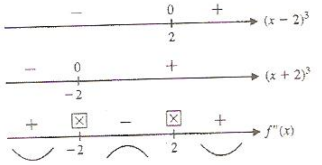
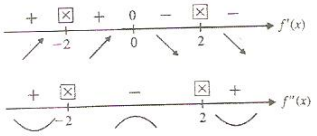



**Figura 3.61b**

$y = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$.



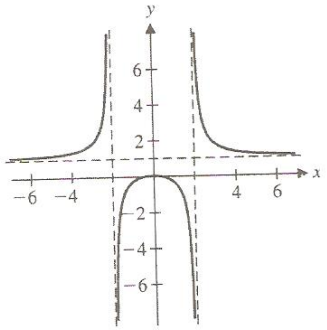




**Figura 3.62**

$y = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$.

Se tiene

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2}{x^2 - 4} = \lim_{x \to 2^+} \frac{\overset{+}{x^2}}{\underset{+}{(x-2)}\underset{+}{(x+2)}} = \infty. \tag{6.7}$$

Análogamente,

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2}{x^2 - 4} = -\infty, \qquad \lim_{x \to -2^+} \frac{x^2}{x^2 - 4} = -\infty \tag{6.8}$$

y

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{x^2}{x^2 - 4} = \infty. \tag{6.9}$$

Por tanto, en efecto, hay asíntotas verticales en $x = \pm 2$. Además,

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 4) - x^2(2x)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-8x}{(x^2 - 4)^2}.$$

Como el denominador es positivo para todo $x \neq \pm 2$, es fácil comprobar que

$$f'(x) \begin{cases} > 0, \text{ en } (-\infty, -2) \cup (-2, 0) & f \text{ creciente.} \\ < 0, \text{ en } (0, 2) \cup (2, \infty). & f \text{ decreciente.} \end{cases} \tag{6.10}$$

En particular, el único número crítico es $x = 0$ (porque $x = -2$ y $x = 2$ no están en el dominio de $f$). Así, pues, el único extremo local es un máximo local en $x = 0$.

Por su parte,

$$f''(x) = \frac{-8(x^2 - 4)^2 + (8x)2(x^2 - 4)^1(2x)}{(x^2 - 4)^4} \qquad \text{Regla del cociente.}$$

$$= \frac{8(x^2 - 4)[-(x^2 - 4) + 4x^2}{(x^2 - 4)^4} \qquad \text{Sacar el factor } 8(x^2 - 4).$$

$$= \frac{8(3x^2 + 4)}{(x^2 - 4)^3} \qquad \text{Hacer operaciones.}$$

$$= \frac{8(3x^2 + 4)}{(x - 2)^3(x + 2)^3}. \qquad \text{Factorizar el numerador.}$$

El numerador es siempre positivo, así que sólo analizamos los signos de los factores del denominador (al margen). De ellos se deduce que

$$f''(x) \begin{cases} > 0, \text{ en } (-\infty, -2) \cup (-2, \infty) & \text{Cóncava hacia arriba.} \\ < 0, \text{ en } (-2, 2) & \text{Cóncava hacia abajo.} \end{cases} \tag{6.11}$$

Ahora bien, dado que $x = -2$ y $x = 2$ no pertenecen al dominio de $f$, no hay puntos de inflexión. Es fácil verificar que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x^2 - 4} = 1 \tag{6.12}$$

y

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x^2 - 4} = 1. \tag{6.13}$$

De acuerdo con (6.12) y (6.13), $y = 1$ es asíntota horizontal tanto para $x \to \infty$ como para $x \to -\infty$. Finalmente, la única $x$-intersección es $x = 0$. Ya podemos combinar toda la información disponible en la gráfica que muestra la figura 3.62.

El próximo ejemplo requiere gráficas generadas con calculadora y un método de cálculo de raíces.

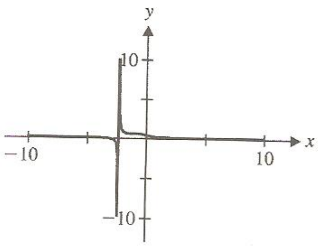



**Figura 3.63**

$$y = \frac{1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 3}.$$

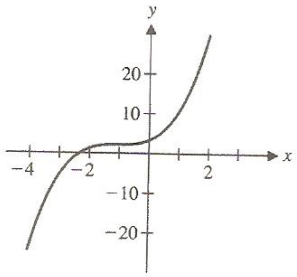



**Figura 3.64**

$y = x^3 + 3x^2 + 3x + 3.$

## Ejemplo 6.4 Una gráfica cuyo dominio y cuyos extremos han de aproximarse

Dibujar una gráfica de $f(x) = \dfrac{1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 3}$ que incluya todos sus rasgos significativos.

**Solución** La gráfica por defecto generada por un PCS da algo como la figura 3.63. Parece revelar mucho más acerca de la función que su análoga del ejemplo 6.3, pero sólo podremos determinar todos sus rasgos característicos mediante el Cálculo.

Como $f$ es racional, está definida en todo $x$ excepto en los que anulen el denominador, es decir,

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 3 = 0.$$

No se ve cómo factorizar la expresión para conocer sus ceros exactamente, así que hay que aproximarlos. Para tener idea de dónde están, dibujamos una gráfica de la cúbica (figura 3.64). No hace falta que sea muy buena; sólo queremos saber cuántos hay y una idea de dónde están. Vemos que hay sólo un cero y está cerca de $x = -2$. En efecto, sólo puede haber un cero, porque la derivada

$$\frac{d}{dx}(x^3 + 3x^2 + 3x + 3) = 3x^2 + 6x + 3 = 3(x + 1)^2 \geq 0$$

nunca es negativa, de modo que la gráfica no puede bajar para cruzar el eje $x$ una segunda vez. Por el método de Newton, o con calculadora, hallamos el cero aproximado $x = a \approx -2{,}25992$. Aunque no conocemos el cero exacto, la figura 3.64 ayuda a calcular los límites

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} \frac{1}{\overset{+}{x^3 + 3x^2 + 3x + 3}} = \infty \tag{6.14}$$

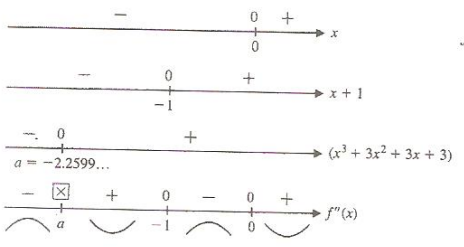
y

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^-} \frac{1}{\overset{+}{x^3 + 3x^2 + 3x + 3}} = -\infty. \tag{6.15}$$

De (6.14) y (6.15) deducimos que hay una asíntota vertical en $x = a$. Vamos ya con la información de la primera derivada.

$$\begin{aligned} f'(x) &= -(x^3 + 3x^2 + 3x + 3)^{-2}(3x^2 + 6x + 3) \\ &= -3\left[\frac{(x + 1)^2}{(x^3 + 3x^2 + 3x + 3)^2}\right] \\ &= -3\left(\frac{x + 1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 3}\right)^2 \\ &< 0, \text{ para } x \neq a. \end{aligned} \tag{6.16}$$

Así, pues, $f$ es decreciente para todo $x \neq a$. El único número crítico es $x = -1$, pero como $f$ es decreciente siempre (excepto en $x = a$) no hay extremos locales. A su vez, la segunda derivada es




$$\begin{aligned} f''(x) &= -6\left(\frac{x + 1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 3}\right)\frac{1(x^3 + 3x^2 + 3x + 3) - (x + 1)(3x^2 + 6x + 3)}{(x^3 + 3x^2 + 3x + 3)^2} \\ &= \frac{-6(x + 1)}{(x^3 + 3x^2 + 3x + 3)^3}(-2x^3 - 6x^2 - 6x) \\ &= \frac{12x(x + 1)(x^2 + 3x + 3)}{(x^3 + 3x^2 + 3x + 3)^3}. \end{aligned}$$

Como $(x^2 + 3x + 3) > 0$ para todo $x$ (¿por qué?), sólo hay que estudiar el signo de los otros factores, indicados en la figura adjunta. De ellos se sigue que

$$f''(x)\begin{cases} > 0, \text{ en } (a, -1) \cup (0, \infty) & \text{Cóncava hacia arriba.} \\ < 0, \text{ en } (-\infty, a) \cup (-1, 0) & \text{Cóncava hacia abajo.} \end{cases} \tag{6.17}$$

Por tanto, hay puntos de inflexión en $x = 0$ y en $x = -1$, Nótese que en la figura 3.63 la concavidad no está muy clara y no resulta fácil discernir los puntos de inflexión.

Obviamente, $f$ no es nunca cero, de modo que no hay $x$-intersecciones. Para terminar,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 3} = 0 \tag{6.18}$$

y

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 3} = 0. \tag{6.19}$$

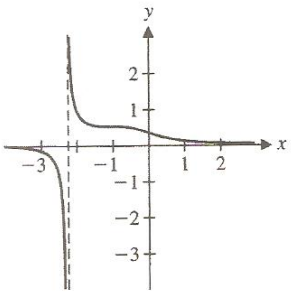



**Figura 3.65**

$y = \dfrac{1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 3}$.

Con toda la información contenida en (6.14)-(6.19) se obtiene la figura 3.65, que pone de relieve con nitidez las asíntotas, los cambios de concavidad y el hecho de que $f$ es decreciente en todo su dominio. Puesto que éstos son todos los rasgos descubiertos con el Cálculo, la gráfica es representativa del comportamniento de la función.

En el ejemplo siguiente analizamos la gráfica de una función trascendente con una asíntota vertical.

### Ejemplo 6.5 Una gráfica con rasgos difíciles de ver

Dibujar una gráfica de $f(x) = e^{1/x}$ que incluya todos sus rasgos significativos.

**Solución** La gráfica generada por defecto por nuestro PCS (figura 3.66a) no es muy útil. La de muchas calculadoras gráficas es mejor (figura 3.66b), pero sin análisis adicional no sabemos a ciencia cierta si es adecuada. El dominio de $f$ es $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, así que consideramos

$$\lim_{x \to 0^+} e^{1/x} = \infty, \tag{6.20}$$

ya que $1/x \to \infty$ cuando $x \to 0^+$. Además, como $1/x \to -\infty$ cuando $x \to 0^-$ (y $e^t \to 0$ cuando $t \to -\infty$),

$$\lim_{x \to 0^-} e^{1/x} = 0. \tag{6.21}$$

En consecuencia, hay una asíntota vertical en $x = 0$, aunque algo inusual, ya que $f(x) \to \infty$ por un lado de 0 y $f(x) \to 0$ por el otro lado. A continuación hallamos

$$f'(x) = e^{1/x} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= e^{1/x}\left(\frac{-1}{x^2}\right) < 0, \text{ para todo } x \neq 0, \tag{6.22}$$

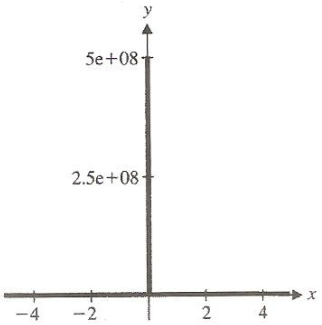



**Figura 3.66a**

$y = e^{1/x}$.

ya que $e^{1/x} > 0$ para todo $x$. Por (6.22) sabemos que $f$ es decreciente para todo $x \neq 0$. Por su parte,

$$f''(x) = e^{1/x}\left(\frac{-1}{x^2}\right)\left(\frac{-1}{x^2}\right) + e^{1/x}\left(\frac{2}{x^3}\right)$$

$$= e^{1/x}\left(\frac{1}{x^4}\right)\left(\frac{2}{x^3}\right) = e^{1/x}\left(\frac{1 + 2x}{x^4}\right)$$

$$\begin{cases} < 0, \text{ en } (-\infty, -\frac{1}{2}) & \text{Cóncava hacia abajo.} \\ > 0, \text{ en } (-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, \infty). & \text{Cóncava hacia arriba.} \end{cases}$$

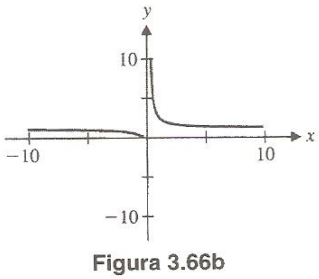



**Figura 3.66b**

$y = e^{1/x}$.

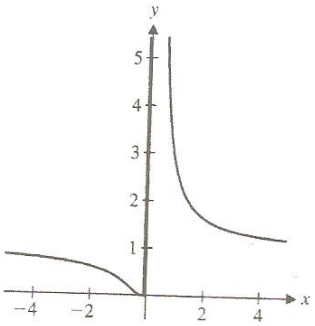



**Figura 3.67**

$y = e^{1/x}$.

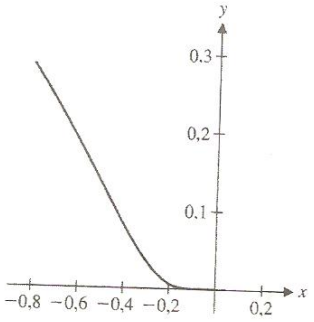



**Figura 3.68**

$y = e^{1/x}$.

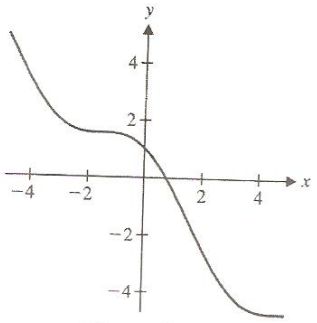



**Figura 3.69a**

$y = \cos x - x$.

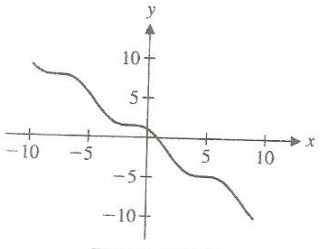



**Figura 3.69b**

$y = \cos x - x$.

Como $x = 0$ no pertenece al dominio de $f$, el único punto de inflexión está en $x = -\frac{1}{2}$. Ahora, calculamos

$$\lim_{x \to \infty} e^{1/x} = 1, \tag{6.24}$$

ya que $1/x \to 0$ cuando $x \to \infty$ y $e^t \to 1$ cuando $t \to 0$. Análogamente,

$$\lim_{x \to -\infty} e^{1/x} = 1. \tag{6.25}$$

Según (6.24) y (6.25), $y = 1$ es asíntota horizontal tanto para $x \to \infty$ como para $x \to -\infty$. Finalmente, al ser

$$e^{1/x} > 0,$$

para todo $x \neq 0$, no hay $x$-intersecciones. Hagamos constar que todos estos rasgos eran apreciables en la figura 3.66b excepto el punto de inflexión en $x = -\frac{1}{2}$. De hecho, en casi todas las gráficas que dibujemos faltan detalles relevantes. Eso se debe a que el punto de inflexión $(-\frac{1}{2}, e^{-2})$, o sea, (–0,5, 0,135335…) está muy cerca del eje $x$. Y como la asíntota horizontal es $y = 1$, es difícil ver a la vez ambos rasgos en una misma gráfica, salvo que se utilice un papel muy grande. La figura 3.67 muestra todos los rasgos importantes salvo el punto de inflexión y la concavidad en el intervalo $(-\frac{1}{2}, 0)$. Para ver el comportamiento en las proximidades del punto de inflexión, dibujamos la figura 3.68 haciendo zoom en esa zona. En ella hemos resuelto los dos defectos apuntados, pero a cambio hemos perdido los detalles globales de la «gráfica grande».

En nuestro ejemplo final consideramos la suma de una función trigonométrica y un polinomio.

### Ejemplo 6.6 Gráfica de la suma de una función trigonométrica y un polinomio

Dibujar una gráfica de $f(x) = \cos x - x$ que incluya todos sus rasgos significativos.

**Solución** Las gráficas por defecto de un PCS y de una calculadora gráfica aparecen en las figuras 3.69a y 3.69b. Como siempre, usaremos el Cálculo para analizar el comportamiento de la función con detalle. El dominio de $f$ es toda la recta, luego no hay asíntotas verticales. La primera derivada es

$$f'(x) = -\operatorname{sen} x - 1 \leq 0, \quad \text{para todo } x. \tag{6.26}$$

Además, $f'(x) = 0$ si, y sólo si, $\operatorname{sen} x = -1$. Así, pues, hay números críticos (aquí corresponden a puntos con tangente horizontal), pero como $f'(x)$ no cambia de signo, no hay extremos locales. A pesar de ello, es interesante localizar los puntos con tangente horizontal. Recordemos que

$$\operatorname{sen} x = -1 \quad \text{para } x = \frac{3\pi}{2}$$

y, más en general, para

$$x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi,$$

donde $n$ es un entero arbitrario. La segunda derivada es

$$f''(x) = -\cos x$$

y en el intervalo $[0, 2\pi]$ se tiene

$$\cos x \begin{cases} > 0, \text{ en } \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right] \\ < 0, \text{ en } \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \end{cases}$$

Por tanto,

$$f''(x) = -\cos x \begin{cases} < 0, \text{ en } \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right] & \text{Cóncava hacia abajo.} \\ > 0, \text{ en } \left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right) & \text{Cóncava hacia arriba.} \end{cases} \tag{6.27}$$

Fuera de $[0, 2\pi]$, $f''(x)$ se repite periódicamente. En particular, eso nos dice que la gráfica tiene infinitos puntos de inflexión localizados en los múltiplos impares de $\pi/2$.

Para determinar el comportamiento en $x \to \pm\infty$, examinamos los límites

$$\lim_{x \to \infty} (\cos x - x) = -\infty \tag{6.28}$$

y

$$\lim_{x \to -\infty} (\cos x - x) = \infty, \tag{6.29}$$

porque $-1 \leq \cos x \leq 1$, para todo $x$ y $\lim_{x \to \infty} x = \infty$.

Finalmente, las $x$-intersecciones son las soluciones de

$$f(x) = \cos x - x = 0.$$

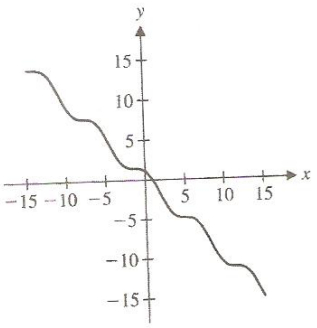
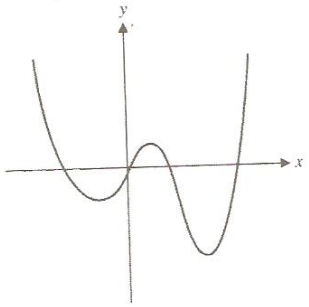



**Figura 3.70**
$y = \cos x - x$.

No sabemos resolverla exactamente. Puesto que $f'(x) \leq 0$ para todo $x$ y las figuras 3.69a y 3.69b muestran un cero cerca de $x = 1$, sólo hay un cero. Por el método de Newton o con la calculadora obtenemos $x \approx 0{,}739085$. Reuniendo toda la información contenida en (6.26)-(6.29) podemos dibujar la gráfica de la figura 3.70. Nótese que la figura 3.69b es igual de clara que la 3.70, pero sobre un rango menor de valores de $x$. Cuál es más representativa queda como objeto de debate.

## EJERCICIOS 3.6

1. Intentamos conseguir una gráfica que incluya todos los rasgos significativos de la función, pero a menudo ese empeño es imposible de alcanzar. Por ejemplo, intente generar en la calculadora una gráfica de esa clase para $x^4 - 25x^3 - 2x^2 + 80x - 3$. Cuando dos extremos locales tienen coordenadas $y$ de valores $-60$ y 50, ¡poder ver un punto con $y = -40.000$ requiere una gráfica muy grande! Ante situaciones como ésta, un esbozo a mano cualitativo, como el adjunto, se hace necesario.




No hay escala indicada porque está distorsionada en un intento de mostrar todos los rasgos interesantes. Discutir las ventajas de una gráfica fiel, pero que no incluye todo lo que debe, y una a mano menos fiel, pero que sí los muestra.

2. Un compañero, preparando el examen, sostiene que una gráfica no puede cortar a una asíntota. Aunque no suele cortarla, no hay nada escrito en contra de que tal cosa ocurra. Explique por qué una gráfica puede cortar a una asíntota horizontal cualquier número de veces (mire la gráfica de $e^{-x}$ sen $x$), pero no puede cortar a una asíntota vertical.

3. Explicar por qué los polinomios nunca tienen asíntotas horizontales o verticales.

4. Explicar la relación de la gráfica de $f(x) = \cos x - x$ (ejemplo 6.6) con las de $y = \cos x$ e $y = -x$. Explicar cómo esbozar la gráfica de $y = \text{sen } x + x$.

**En los ejercicios 5-44, representar la función y discutir su gráfica con el mismo detalle que en el ejemplo 6.2.**

5. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$
6. $f(x) = x^3 - 9x + 1$
7. $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x$
8. $f(x) = x^4 + 8x - 2$
9. $f(x) = x^5 - 2x^3 + 1$
10. $f(x) = x^6 - 10x^5 - 7x^4 + 80x^3 + 12x^2 - 192x$
11. $f(x) = x\sqrt{x^2 - 4}$
12. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}$
13. $f(x) = x + \dfrac{4}{x}$
14. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$

15. $f(x) = \operatorname{sen} x - \cos x$
16. $f(x) = \cos^3 x$
17. $f(x) = e^{-x^2/4}$
18. $f(x) = xe^{-4x}$
19. $f(x) = x \ln x$
20. $f(x) = x \ln x^2$
21. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$
22. $f(x) = \sqrt{2x - 1}$
23. $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{3x^2 - 1}$
24. $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2 + 2}$
25. $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^3 + 1}$
26. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^4 + 1}$
27. $f(x) = \dfrac{4x}{x^2 - x + 1}$
28. $f(x) = \dfrac{4x^2}{x^2 - x + 1}$
29. $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 - x - 2}$
30. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 2x - 3}$
31. $f(x) = x + \operatorname{sen} x$
32. $f(x) = 2x + \operatorname{sen} 2x$
33. $f(x) = x^5 - 5x$
34. $f(x) = x^3 - \dfrac{3}{400}x$
35. $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2 + 2}}$
36. $f(x) = \sqrt{3x^4 + x^3}$
37. $f(x) = x^{1/5}(x + 1)$
38. $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 1}$
39. $f(x) = \operatorname{sen} x - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$
40. $f(x) = \operatorname{sen} x + \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3x$
41. $f(x) = e^{-2/x}$
42. $f(x) = e^{1/x^2}$
43. $f(x) = xe^{-x^2/2}$
44. $f(x) = x^{10}e^{-x}$

**En los ejercicios 45-50, la «familia de funciones» contiene un parámetro $c$ cuyo valor afecta a las propiedades de las funciones. ¿Qué diferencias marca (si hay alguna) el hecho de que $c$ sea positivo, negativo o nulo? ¿Cómo sería la gráfica para valores de $c$ muy positivos o muy negativos?**

45. $f(x) = x^4 + cx^2$
46. $f(x) = x^4 + cx^2 + x$
47. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + c^2}$
48. $f(x) = e^{-x^2/c}$
49. $f(x) = \operatorname{sen}(cx)$
50. $f(x) = x^2\sqrt{c^2 - x^2}$

51. En muchos fenómenos, los investigadores necesitan una gráfica que parta del origen, ascienda hasta un máximo y decrezca después hacia la asíntota horizontal $y = 0$. Por ejemplo, la función densidad de probabilidad de sucesos tales como el tiempo entre concepción y nacimiento de un animal o la supervivencia tras contraer una enfermedad mortal. Probar que la familia de funciones $xe^{-bx}$ tiene las propiedades requeridas para cualquier $b > 0$. ¿Qué efecto tiene $b$ sobre la localización del máximo? ¿Qué significado tiene $b$ en el suceso del nacimiento citado antes? ¿Y en el de la supervivencia?

52. Las siglas FM en la radio significan **frecuencia modulada**, un método de transmitir información codificada en ondas de radio modulando (o variando) su frecuencia. Un ejemplo básico de onda modulada es $f(x) = \operatorname{sen}(x + \cos x)$. Usar gráficas de $f$, $f'$ y $f''$ generadas por calculadora para localizar los extremos relativos de $f(x)$.

53. Una función racional es una función de la forma $\dfrac{p(x)}{q(x)}$, con $p(x)$ y $q(x)$ polinomios. ¿Es cierto que todas las funciones racionales tienen alguna asíntota vertical? ¿Es cierto que todas las funciones racionales tienen alguna asíntota horizontal?

54. Puede ser conveniente identificar asíntotas que no sean horizontales ni verticales. Por ejemplo, la parábola $y = x^2$ es una asíntota de $f(x)$ si $\lim_{x \to \infty} [f(x) - x^2] = 0$ y/o $\lim_{x \to -\infty} [f(x) - x^2] = 0$.

Probar que $y = x^2$ es una asíntota de $f(x) = \dfrac{x^4 - x^2 + 1}{x^2 - 1}$. Representar $y = f(x)$ y hacer zoom hasta que la gráfica aparezca como una parábola. (Nota: El efecto del zoom es poner énfasis en los valores grandes de $x$).

**Se dice que $y = mx + b$ $(m \neq 0)$ es una asíntota oblicua de la función $f(x)$ si $\lim_{x \to \infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$ y/o $\lim_{x \to \infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$.**

**En los ejercicios 55-60, hallar la asíntota oblicua (efectuar la división para reescribir $f$). A continuación, representar la función y su asíntota en unos mismos ejes.**

55. $f(x) = \dfrac{3x^2 - 1}{x}$
56. $f(x) = \dfrac{3x^2 - 1}{x - 1}$
57. $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^2}$
58. $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$
59. $f(x) = \dfrac{x^4}{x^3 + 1}$
60. $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x^3 + x}$

**En los ejercicios 61-64, hallar una función con las asíntotas que se especifican.**

61. $x = 1$, $x = 2$ e $y = 3$
62. $x = -1$, $x = 1$ e $y = 0$
63. $x = -1$, $x = 1$, $y = -2$ e $y = 2$
64. $x = 1$, $y = 2$ y $x = 3$

65. Para cada función, hallar un polinomio $p(x)$ tal que $\lim_{x \to \infty} [f(x) - p(x)] = 0$.

(a) $\dfrac{x^4}{x + 1}$ (b) $\dfrac{x^5 - 1}{x + 1}$ (c) $\dfrac{x^6 - 2}{x + 1}$

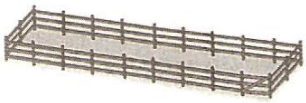
Mostrar con el zoom que $f(x)$ y $p(x)$ son muy parecidas para grandes $x$. El *término dominante* de un polinomio es el término de grado más alto (por ejemplo, en $x^3 - 3x + 1$ es $x^3$). ¿Se puede conseguir con el zoom que la gráfica de $f(x)$ aparezca como la del término dominante de su asíntota polinómica? Enuncie una regla que permita, a la vista de una función racional, dictaminar rápidamente cuál es el término dominante de su asíntota polinómica (si existe).

## 3.7 OPTIMIZACIÓN

¿Es óptimo este diseño? Una cuestión frecuente en la industria actual que, junto con otras similares, estamos ya en condiciones de responder con los instrumentos de Cálculo desarrollados en las últimas seis secciones. Doquiera que se mire, se ve a alguien intentando minimizar esfuerzos y maximizar productividad.

Cierto es que a veces basta aplicar el sentido común y evitar gastos superfluos, pero en general hay que acudir a las Matemáticas para analizar el problema. Tal vez se pregunte si será suficiente leer la respuesta en la calculadora, en un número o en una gráfica. Pues bien, en ocasiones sí. Pero recuerde que el comportamiento de funciones (aun relativamente familiares) puede estar oculto en la gráfica que proporciona la calculadora. Además, el Cálculo permite resolver cuestiones, como la del ejemplo 7.1, imposibles de resolver con sólo la calculadora.

Esta sección ilustra cómo aplicar los métodos del Cálculo a problemas que requieren hallar un máximo o un mínimo. Preste atención a cómo se resuelve el problema. Empezamos indicando una estrategia general (*estrategia*, no *reglas*). No la memorice, pero téngala en cuenta mientras estudia esta sección.



- Si puede dibujar una gráfica, ¡hágalo! No intente imaginar las cosas mentalmente.
- Determinar cuáles son las variables y cómo están relacionadas.
- Decidir qué magnitud se desea hacer máxima o mínima.
- Expresarla en términos de una única variable independiente.
- Calcular los valores máximo y mínimo admisibles (si los hay) de esa variable.
- Resolver el problema. (¡Asegúrese de responder la cuestión planteada!).

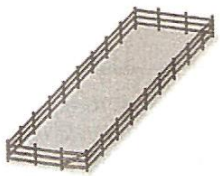


**Figura 3.71**
Formas posibles.

En un primer ejemplo sencillo nos planteamos lo que cada día significa el objetivo del mundo de la empresa: obtener lo máximo a partir de recursos limitados.

### Ejemplo 7.1 Construcción de un jardín de área máxima

Disponemos de 40 metros de valla para cerrar un espacio rectangular destinado a jardín. Hallar el área **máxima** que puede vallarse y las dimensiones del jardín óptimo.

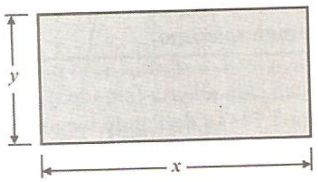



**Figura 3.72**
Forma rectangular.

**Solución** Hay diversas posibilidades, por ejemplo, un jardín muy largo y estrecho o uno ancho, pero no muy largo (figura 3.71). Para decidir la forma óptima, empezamos con un esquema en el que marcamos las magnitudes adecuadas (figura 3.72), la longitud ($x$) y la anchura ($y$).

Queremos hallar las dimensiones que hacen máxima el área

$$A = xy.$$

Esta función tiene dos variables, así que escapa a los métodos que conocemos. Sin embargo, hay otra información a nuestro alcance. Si queremos área máxima hemos de usar toda la valla, luego el perímetro del jardín debe ser 40 metros:

$$40 = \textit{perímetro} = 2x + 2y. \tag{7.1}$$

De aquí se sigue que

$$2y = 40 - 2x,$$

o sea

$$y = 20 - x.$$

Sustituyendo $y$ en la expresión del área, obtenemos

$$A = xy = x(20 - x).$$

Por tanto, nuestro problema es calcular el valor máximo de la función

$$A(x) = x(20 - x).$$

¡Quieto! Seguro que siente la tentación de efectuar el producto. Aunque aquí no importa mucho (por ser un problema muy simple), en la práctica es una mala idea. Es decir, no haga operaciones porque sí. A menos que prevea que eso simplificará la tarea, no toque la función.

Antes de maximizar $A(x)$, ¿hay algún intervalo admisible para $x$? Como $x$ es una distancia, debe ser $0 \le x$. Y como el perímetro es 40, debe ser $x \le 20$ (¿por qué no $x \le 40$?). Así, pues, hemos de maximizar $A(x)$ en el intervalo cerrado $[0, 20]$.

El problema ya es fácil. Una idea de lo que cabe esperar la da una gráfica de $y = A(x)$ en ese intervalo (figura 3.73). El máximo parece estar cerca de $x = 10$. Vamos a analizar el problema con detalle. Se tiene

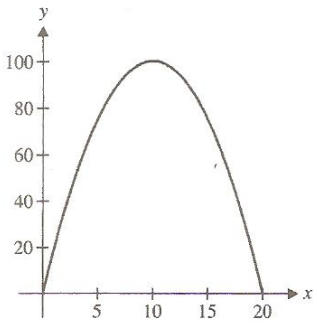



**Figura 3.73**
$y = x(20 - x)$.

$$\begin{aligned} A'(x) &= 1(20 - x) + x(-1) \\ &= 20 - 2x \\ &= 2(10 - x). \end{aligned}$$

Así, pues, el único número crítico es $x = 10$, que pertenece al intervalo en cuestión. Recordemos que los valores máximo y mínimo de una función continua en un intervalo cerrado ocurren en un número crítico o en uno de los extremos del intervalo. Por tanto, debemos comparar los valores

$$A(0) = 0, \quad A(20) = 0 \quad \text{y} \quad A(10) = 100.$$

Vemos que el área máxima que se puede acotar con 40 metros de valla es 100 $m^2$. Más que eso, nos interesan las dimensiones del jardín óptimo. Como $x = 10$,

$$y = 20 - x = 10.$$

Es decir, el rectángulo de perímetro 40 que encierra el área máxima posible (100 $m^2$) es el **cuadrado** de 10 metros de lado.

---

Le será fácil demostrar que, en general, fijado el perímetro de antemano, el rectángulo que encierra área máxima es siempre un cuadrado. Es un argumento casi idéntico al ejemplo 7.1. Conviene advertir que este problema más general no se puede resolver usando sólo una gráfica o una calculadora. Es preciso recurrir al Cálculo.

Las empresas de fabricación toman muchas decisiones que afectan a la eficiencia del proceso de producción. Una decisión sorprendentemente importante es cómo envasar los productos de la forma más económica posible. El próximo ejemplo es una versión simple de ese problema.

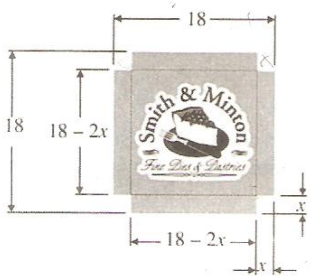



**Figura 3.74a**
Cartulina.

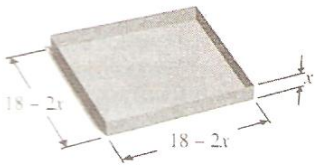



**Figura 3.74b**
Caja rectangular.

### Ejemplo 7.2 Construcción de una caja de volumen máximo

Con una cartulina cuadrada de 18 cm de lado se desea hacer una caja abierta (sin tapa) cortando en ella cuatro pequeños cuadrados de las esquinas (figura 3.74a) y doblando luego por las líneas de puntos (figura 3.74b). Hallar las dimensiones de la caja de volumen máximo.

**Solución** El volumen de la caja (paralelepípedo rectangular) es

$$V = l \times a \times h.$$

En la figura 3.74b vemos que la altura es $h = x$, mientras que la longitud y la anchura son $l = a = 18 - 2x$. Así, pues, podemos expresar el volumen en términos de la única variable $x$ como

$$V = V(x) = (18 - 2x)^2(x) = 4x(9 - x)^2.$$

Otra vez dejamos la expresión tal como está, sin efectuar el producto, contra la costumbre. Como $x$ es una distancia, $x \ge 0$. Además, $x \le 9$ porque cortando cuadrados de 9 cm de lado cortaríamos toda la cartulina. En resumen, tenemos que hallar el máximo absoluto de la función continua

$$V(x) = 4x(9 - x)^2$$

en el intervalo cerrado $0 \le x \le 9$.

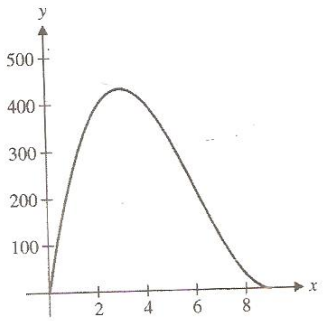



**Figura 3.75**
$y = 4x(9 - x)^2$.

Es un problema fácil. La figura 3.75 muestra la gráfica de $y = V(x)$ en el intervalo $[0, 9]$ y en ella se aprecia que el máximo es aproximadamente 400 y se produce cerca de $x = 3$. Resolvamos el problema analíticamente. Se tiene

$$\begin{aligned} V'(x) &= 4(9-x)^2 + 4x(2)(9-x)(-1) && \text{Regla del producto y regla de la cadena.} \\ &= 4(9-x)[(9-x) - 2x] && \text{Factorizar } 4(9-x). \\ &= 4(9-x)(9-3x). \end{aligned}$$

Por tanto, $V$ tiene dos números críticos, 3 y 9, ambos en el intervalo considerado. Ya sólo hemos de comparar los valores de la función en los números críticos y en los extremos del intervalo:

$$V(0) = 0, \quad V(9) = 0 \quad \text{y} \quad V(3) = 432.$$

El máximo volumen posible es de 432 $cm^3$. Se consigue cortando un cuadrado de 3 cm de lado de cada esquina, compatible con lo que anunciaba la figura 3.75. La caja óptima tiene dimensiones $12 \times 12 \times 3$.

Cuando se construye un edificio, hay que conectarlo a las redes de teléfono, electricidad, agua, alcantarillado, etc. Si los cables o conducciones de esas redes son curvadas, no es obvio cómo conseguir una conexión de mínima longitud, es decir, menos costosa. Los dos próximos ejemplos consideran el problema general de la distancia mínima de un punto a una curva.

### Ejemplo 7.3 El punto más próximo de una parábola

Hallar el punto de la parábola $y = 9 - x^2$ más próximo al punto $(3, 9)$ (figura 3.76).

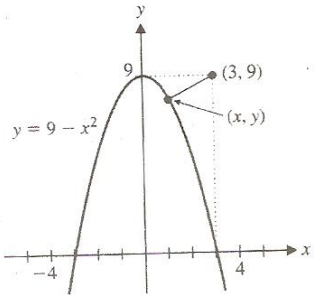



**Figura 3.76**
$y = 9 - x^2$.

**Solución** Por la fórmula de la distancia sabemos que la distancia entre los puntos $(3, 9)$ y $(x, y)$ es

$$d = \sqrt{(x-3)^2 + (y-9)^2}.$$

Si el punto $(x, y)$ está en la parábola, sus coordenadas deben cumplir $y = 9 - x^2$, de modo que podemos expresar la distancia en términos de la variable $x$:

$$\begin{aligned} d(x) &= \sqrt{(x-3)^2} + \sqrt{[(9-x^2) - 9]^2} \\ &= \sqrt{(x-3)^2 + (-x^2)^2} \\ &= \sqrt{(x-3)^2 + x^4}. \end{aligned}$$

Podríamos resolver el problema en su forma actual, pero preferimos simplificar la tarea observando que mimimizar $d(x)$ equivale a minimizar su cuadrado, que es la cantidad que está dentro de la raíz. (Dejamos como ejercicio probar que es cierto). Así, pues, en vez de $d(x)$, vamos a minimizar el **cuadrado** de $d(x)$:

$$f(x) = [d(x)]^2 = (x-3)^2 + x^4.$$

La figura 3.76 muestra que todos los puntos a la izquierda del eje $y$ están más lejos del $(3, 9)$ que el punto $(0, 9)$. Y todos los que están por debajo del eje $x$ están más lejos que el punto $(3, 0)$. Por tanto, basta buscar el punto solución en

$$0 \le x \le 3.$$

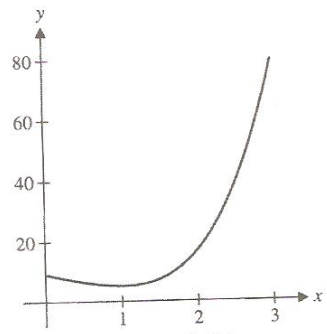



**Figura 3.77**
$y = (x - 3)^2 + x^4$.

Estamos ante un problema familiar: minimizar una función continua en un intervalo cerrado y acotado. La gráfica de $y = f(x)$ en ese intervalo puede verse en la figura 3.77. El valor mínimo de $f$ (el cuadrado de la distancia) parece estar cerca de $x = 1$. Se tiene

$$f'(x) = 2(x-3)^1 + 4x^3 = 4x^3 + 2x - 6.$$

Como salta a la vista que $x = 1$ es un cero de $f'(x)$, dividiendo $f'(x)$ entre $(x - 1)$ se factoriza como

$$f'(x) = 2(x - 1)(2x^2 + 2x + 3).$$

El segundo factor, $(2x^2 + 2x + 3)$, no tiene ceros (¿por qué?), así que el único número crítico es $x = 1$. Ya sólo tenemos que comparar los valores de $f$ en el número crítico y en los extremos del intervalo:

$$f(0) = 9, \quad f(3) = 81 \quad \text{y} \quad f(1) = 5.$$

Por tanto, el valor mínimo de $f(x)$ es 5. Es decir, la distancia mínima del punto (3, 9) a la parábola es $\sqrt{5}$ y el punto más próximo de la parábola es (1, 8). Un resultado compatible con lo que la gráfica sugería.

El siguiente ejemplo es muy parecido al ejemplo 7.3, excepto que ahora tendremos que utilizar métodos aproximados para hallar el número crítico.

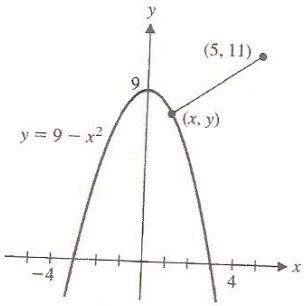



**Figura 3.78**
$y = 9 - x^2$.

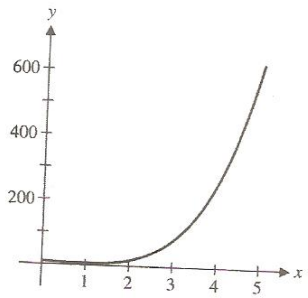



**Figura 3.79**
$y = f(x) = [d(x)]^2$.

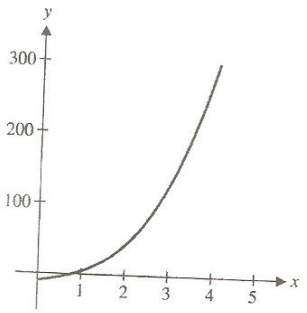



**Figura 3.80**
$y = f'(x)$.

### Ejemplo 7.4 Aproximación de la distancia mínima

Hallar el punto de la parábola $y = 9 - x^2$ más próximo al punto (5, 11) (figura 3.78).

**Solución** De nuevo queremos minimizar la distancia entre un punto fijo, ahora el (5, 11), y un punto genérico $(x, y)$ de la parábola. Por la fórmula de la distancia, la cantidad a minimizar es

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(x - 5)^2 + (y - 11)^2} \\ &= \sqrt{(x - 5)^2 + [(9 - x^2) - 11]^2} \\ &= \sqrt{(x - 5)^2 + (x^2 + 2)^2}. \end{aligned}$$

Igual que en el ejemplo 7.3, es equivalente (y más fácil) minimizar su cuadrado:

$$f(x) = [d(x)]^2 = (x - 5)^2 + (x^2 + 2)^2.$$

Por el mismo argumento de antes, la figura 3.78 enseña que el punto solución está en el primer cuadrante. En consecuencia, nuestro problema consiste en minimizar $f(x)$ en el intervalo $0 \le x \le 5$. La gráfica oportuna puede verse en la figura 3.79. Haciendo zoom se apreciaría que el mínimo de $f$ es 25 aproximadamente y está cerca de $x = 1$. Para precisar más, calculamos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x - 5) + 2(x^2 + 2)(2x) \\ &= 4x^3 + 10x - 10. \end{aligned}$$

A diferencia del ejemplo 7.3, $f'(x)$ no es fácil de factorizar. Sólo nos queda el recurso de aproximar sus ceros. Su gráfica (figura 3.80) indica que el cero está un poco por debajo de $x = 1$. Aplicando el método de Newton a $f'(x)$ con $x_0 = 1$ como estimación inicial, o con calculadora, obtendrá la raíz aproximada $x_c \approx 0{,}79728$. Ahora comparamos los valores

$$f(0) = 29, \quad f(5) = 729 \quad \text{y} \quad f(x_c) \approx 24{,}6.$$

Por tanto, la distancia mínima del punto (5, 11) a la parábola es aproximadamente $\sqrt{24{,}6} \approx 4{,}96$ y el punto más cercano de la parábola es aproximadamente (0,79728, 8,364). Nótese que este ejemplo es casi idéntico al ejemplo 7.3, salvo que aquí el álgebra no ha sido suficiente y hemos recurrido a métodos aproximados.

**Nota 7.1**

Como en los ejemplos anteriores, el deseado máximo o mínimo ocurre siempre en el número crítico. Tal vez esté pensando que cuando sólo hay un número crítico es inútil comparar el valor en él con los valores en los extremos del intervalo. Por desgracia, eso no es siempre cierto. En 1945, dos prestigiosos ingenieros aeronáuticos dedujeron una función como modelo del alcance de un avión. Su intención era usarla para maximizar el alcance. Encontraron un número crítico (correspondiente a repartir todo el peso del avión en las alas) y argumentaron que debía dar el **máximo** alcance. El resultado fue el famoso avión «Flying Wing». Años más tarde se vio que ese número crítico correspondía a un **mínimo** de la función alcance. En defensa de los ingenieros hay que decir que no disponían de las técnicas de cálculo actuales. Curiosamente, ese diseño recuerda mucho al moderno bombardero B-2 Stealth.

Esta historia salió a la luz con motivo de la construcción del B-2 (véase *Science,* 244, pp. 650-651, 12 de mayo de 1989, y el *Monthly* de la Mathematical Association of America de octubre de 1993, pp. 737-738). La moraleja es evidente: compruebe los valores de la función en los números críticos y en los extremos del intervalo. No dé por supuesto, aun cuando haya un solo número crítico, que el número crítico proporciona el máximo o mínimo que está buscando.

En las figuras 3.76 y 3.78 parece que el camino más corto es perpendicular a la recta tangente a la curva en el punto minimizante. Dejamos como ejercicio demostrar que siempre ocurre así, en efecto. Esta observación es un principio geométrico importante aplicable a muchos problemas de esta clase.

Consideremos ahora un problema de optimización que no se puede restringir a un intervalo cerrado. Usaremos el hecho de que, para una función continua, un único extremo local debe ser extremo absoluto (¿por qué?).

**Ejemplo 7.5** **Diseño de una lata de refresco con mínima cantidad de material**

Una lata de refresco debe contener 12 onzas de líquido. Hallar las dimensiones que minimizan la cantidad de aluminio empleada en su construcción, suponiendo que es de grosor uniforme.

**Solución** Una lata típica tiene la forma de un cilindro circular recto (figura 3.81) de altura $h$ y radio $r$. Si el aluminio tiene el mismo grosor en todas partes, minimizar la cantidad de aluminio es lo mismo que minimizar el área de la superficie de la lata. Se tiene

$$\begin{aligned} \textit{área} &= \textit{área de la tapa} + \textit{área de la base} + \textit{área lateral} \\ &= 2\pi r^2 + 2\pi rh. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Podemos eliminar una de las dos variables usando el hecho de que el volumen (1 onza $\approx$ 1,80469 pulg$^3$) debe ser

$$12 \text{ onzas} = 12 \text{ onzas} \times 1{,}80468 \frac{\text{pulg.}^3}{\text{onzas}} = 21{,}65628 \text{ pulg}^3.$$

Además, el volumen del cilindro es

$$vol = \pi r^2 h,$$

así que

$$h = \frac{vol}{\pi r2} = \frac{21{,}65628}{\pi r^2}. \tag{7.3}$$

Así, pues, de acuerdo con (7.2) y (7.3), el área de la lata es

$$A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{21{,}65628}{\pi r^2}$$

$$= 2\pi \left( r^2 + \frac{21{,}65628}{\pi r} \right).$$

Por tanto, nuestro problema es minimizar $A(r)$, pero aquí no hay intervalo cerrado y acotado de valores admisibles. Todo cuanto puede decirse es que $r > 0$, pero $r$ puede ser tan grande o tan pequeño como podamos imaginar, tomando $h$ muy pequeño o muy grande. Esto es, hemos de hallar el mínimo absoluto de $A(r)$ en el intervalo abierto no acotado $(0, \infty)$.

Para tener idea de cuál puede ser la solución, dibujamos la gráfica de $y = A(r)$ (figura 3.82). Parece haber un mínimo local (posiblemente absoluto) entre $r = 1$ y $r = 2$. El valor mínimo es algo menor que 50.

Pues bien, calculemos

$$A'(r) = \frac{d}{dr} \left[ 2\pi \left( r^2 + \frac{21{,}65628}{\pi r} \right) \right]$$

$$= 2\pi \left( 2r - \frac{21{,}65628}{\pi r^2} \right)$$

$$= 2\pi \left( 2\pi r^3 - \frac{21{,}65628}{\pi r^2} \right).$$

**Figura 3.81**
Lata de refresco.

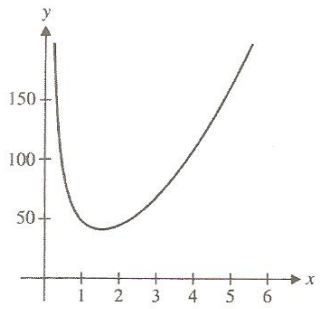



**Figura 3.82**

$y = A(r)$.

Los únicos números críticos serán los que anulen el numerador:

$$0 = 2\pi r^3 - 21{,}65628.$$

Eso ocurre si, y sólo si,

$$r^3 = \frac{21{,}65628}{2\pi},$$

luego el único número crítico es

$$r = r_c = \sqrt[3]{\frac{21{,}65628}{2\pi}} \approx 1{,}510548.$$

Además, para $0 < r < r_c$, $A'(r) < 0$ y para $r_c < r$, $A'(r) > 0$. Es decir, $A(r)$ es decreciente en el intervalo $(0, r_c)$ y creciente en $(r_c, \infty)$. Por tanto, $A(r)$ tiene un mínimo absoluto, no sólo local, en $r = r_c$, lo cual es compatible con la figura 3.82. En consecuencia, la lata óptima tiene radio $r_c \approx 1{,}510548$ y altura

$$h = \frac{21{,}65628}{\pi r_c^2} \approx 3{,}0211.$$

---

Nótese que la lata óptima del ejemplo 7.5 es «cuadrada» en el sentido de que su altura ($h$) es igual a su diámetro ($2r$). Queremos advertir que el ejemplo 7.5 no es del todo realista. Una lata de 12 onzas tiene un radio de 1,156 pulgadas. Revise el ejemplo para ver dónde hemos hecho alguna hipótesis poco realista. Estudiamos de nuevo el problema del diseño de latas de refresco en los ejercicios.

En nuestro ejemplo final consideramos un problema en el que la mayor parte del trabajo hay que hacerlo numérica y gráficamente.

### Ejemplo 7.6 Coste mínimo de construcción de una autopista

El Estado va a construir una autopista para unir un puente con un intercambiador situado 8 km al este y 8 km al sur del puente. Hay que atravesar un terreno pantanoso de 5 km de anchura adyacente al puente (figura 3.83). La construcción de 1 km de autopista cuesta 10 millones de euros sobre terreno pantanoso y 7 millones sobre terreno seco. ¿A cuántos kilómetros al este del puente interesa que salga la autopista del terreno pantanoso?

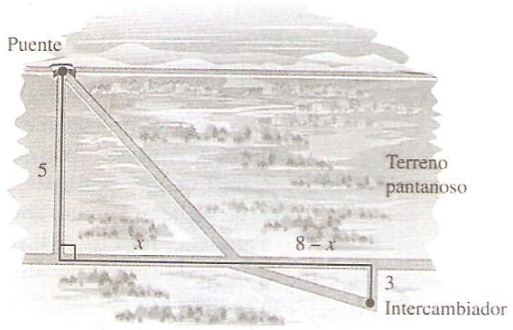



**Figura 3.83**

Una nueva autopista.

**Solución** La primera impresión es que tal vez lo mejor sea cruzar la zona pantanosa por el camino más corto posible. Vamos a analizar la cuestión con ayuda del Cálculo. Sea $x$ la distancia solicitada, de modo que el intercambiador está $(8 - x)$ km al este del punto en el que la autopista sale de la zona pantanosa (figura 3.83). El coste total (en millones de euros es *coste* = 10 (*distancia por zona pantanosa*) + 7 (*distancia por zona seca*).

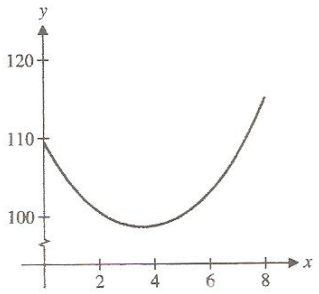



**Figura 3.84**

$y = C(x)$.

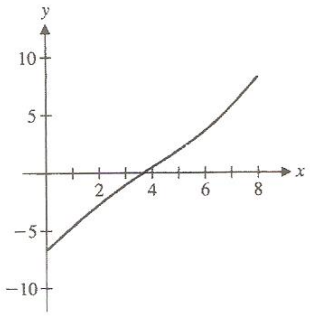



**Figura 3.85**

$y = C'(x)$.

Aplicando el teorema de Pitágoras a los dos triángulos rectángulos de la figura 3.83, obtenemos la función de coste

$$C(x) = 10\sqrt{x^2 + 25} + 7\sqrt{(8 - x)^2 + 9}.$$

En la figura 3.83 vemos que $0 \le x \le 8$ ($x < 0$ significaría **alejarnos** del intercambiador y $x > 8$ pasarnos de largo). Por tanto, estamos ante un problema rutinario: minimizar una función continua $C(x)$ sobre el intervalo $[0, 8]$. ¿Es realmente rutinario? Para tener una idea de lo que cabe esperar, recurrimos a la gráfica adecuada (figura 3.84), donde parece que el mínimo es algo inferior a 100 y se produce cerca de $x = 4$. Para resolver el problema con precisión, necesitamos la derivada

$$\begin{aligned} C'(x) &= \frac{d}{dx}\left[10\sqrt{x^2 + 25} + 7\sqrt{(8 - x)^2 + 9}\right] \\ &= 5(x^2 + 25)^{-1/2}(2x) + \frac{7}{2}[(8 - x)^2 + 9]^{-1/2}(2)(8 - x)^1(-1) \\ &= \frac{10x}{\sqrt{x^2 + 25}} - \frac{7(8 - x)}{\sqrt{(8 - x)^2 + 9}}. \end{aligned}$$

Los únicos números críticos están donde $C'(x) = 0$ (¿por qué?). Sólo sabemos hallarlos aproximadamente. La gráfica de $C'(x)$ (figura 3.85) indica que el único cero de $C'(x)$ en $[0, 8]$ está entre $x = 3$ y $x = 4$. Lo aproximamos numéricamente (por bisección, por ejemplo) y obtenemos el número crítico aproximado

$$x_c \approx 3{,}560052.$$

Ya sólo falta comparar los valores de $C(x)$ en ese número crítico y en los extremos del intervalo:

$$C(0) \approx 109{,}8 \text{ millones de euros}$$
$$C(8) \approx 115{,}3 \text{ millones de euros}$$

y

$$C(x_c) \approx 98{,}9 \text{ millones de euros.}$$

Así, pues, con el Cálculo podemos ahorrar a los contribuyentes más de 10 millones de euros respecto de lo que hubiera costado cruzar directamente la zona pantanosa y más de 16 millones respecto de la opción de cruzarla en diagonal (no es mala recompensa para unos minutos de trabajo).

---

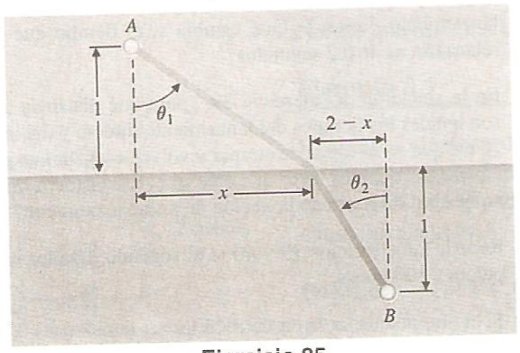
Los ejemplos y ejercicios de esta sección le capacitarán para resolver muchos problemas de optimización. Tómese siempre la molestia de dibujar una gráfica y compruebe que el resultado final es compatible con ella. En caso contrario, vuelva sobre sus pasos para detectar dónde ha cometido un error. Asimismo, conviene asegurarse de que la solución tiene sentido físico cuando sea necesario. Todas estas verificaciones reducen sensiblemente la posibilidad de error.

---

25. Supongamos que la luz viaja de un punto $A$ a otro $B$ como indica la figura. (Recordemos que la luz viaja siempre por la trayectoria de tiempo mínimo). Sea $v_1$ la velocidad de la luz en la región superior y $v_2$ en la inferior. Probar que el tiempo total que tarda en ir desde $A$ hasta $B$ es

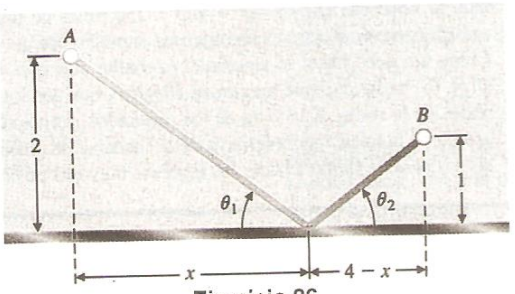
$$T(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{1+(2-x)^2}}{v_2}.$$

Escribir la ecuación $T'(x) = 0$, sustituir las raíces cuadradas usando los senos de los ángulos de la figura y deducir la ley de Snell $\dfrac{\operatorname{sen}\theta_1}{\operatorname{sen}\theta_2} = \dfrac{v_1}{v_2}$.




**Ejercicio 25**

26. La luz se refleja en un espejo para ir desde $A$ hasta $B$, como indica la figura. Suponiendo velocidad constante para la luz, podemos minimizar el tiempo del trayecto haciendo mínima su longitud. Hallar el punto de reflexión en el espejo que minimiza la distancia recorrida. Demostrar que los ángulos de la figura (ángulos de incidencia y de reflexión) son iguales.




**Ejercicio 26**

27. Una lata de refresco debe contener 12 onzas. La tapa y el fondo son de grosor doble que el lateral. Hallar las dimensiones de la lata que requieren la mínima cantidad de material. (Ayuda: No hay que hacer mínima el área, sino el producto del grosor por el área, que es proporcional al coste).

28. Tras el ejemplo 7.5 dijimos que la lata de refresco debía tener un radio aproximado de 1,156 pulgadas. Demostrar que este radio hace mínimo el coste si la tapa y el fondo son 2,23 veces más gruesos que el lateral de la lata.

29. La tos sirve para aumentar el flujo de aire a los pulmones, desalojando cualquier partícula que bloquee la tráquea y cambiando su radio. Supongamos que una tráquea en reposo tiene radio $r_0$. La velocidad del aire en una tráquea de radio $r$ viene dada aproximadamente por $V(r) = cr^2(r_0 - r)$ para cierta constante $c$. Determinar el radio que hace máxima la velocidad del aire en la tráquea. ¿Significa esto que la tráquea se expande o se contrae?

30. Para llevar la sangre a todo el cuerpo, el sistema arterial humano se ramifica repetidas veces. Supongamos que una arteria de radio $r$ se ramifica de una arteria de radio $R$ $(R > r)$ formando con ella un ángulo $\theta$. La energía perdida por rozamiento es aproximadamente

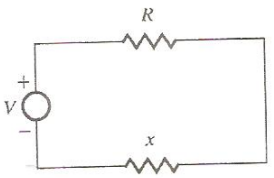
$$E(\theta) = \frac{\operatorname{cosec}\theta}{r^4} + \frac{1-\cot\theta}{R^4}.$$

Hallar el valor de $\theta$ que hace mínima la pérdida de energía.

31. En un aparato electrónico, los circuitos individuales sirven para diversos fines. En ocasiones, la corriente debe ser controlada reduciendo la potencia en lugar de amplificarla. En el circuito de la figura, con resistencia $R$ ohmios y voltaje $V$ voltios, queremos determinar el valor de la resistencia $x$ (ohmios). La potencia absorbida por el circuito es

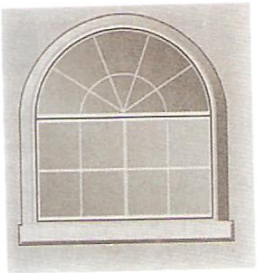
$$p(x) = \frac{V^2 x}{(R+x)^2}.$$

Calcular el valor de $x$ que hace máxima la potencia absorbida.




32. En un circuito de corriente alterna con voltaje $V(t) = v \operatorname{sen} 2\pi ft$, un voltímetro mide en realidad un voltaje medio (la raíz de la media del cuadrado) $v/\sqrt{2}$. Si la frecuencia es $f = 60$ hercios y el registro es de 115 voltios, calcular el voltaje máximo alcanzado. [Ayuda: Es «obvio» si calcula $v$ y piensa en la gráfica de $V(t)$].

33. Una ventana de Norman consta de un semicírculo sobre un rectángulo (véase figura). Disponemos de $8 + \pi$ pies de madera para su marco. ¿Por qué un fabricante desearía maximizar su área? Hallar las dimensiones que hacen máxima el área.



34. Se corta un alambre de 2 metros de largo en dos trozos y se forma un cuadrado con cada uno de ellos. Hallar el tamaño de cada trozo para que la suma de áreas de los dos cuadrados sea máxima.

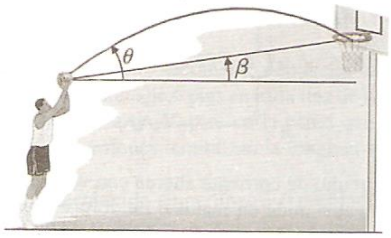
35. Un agricultor dispone de 10 acres para plantar pepinos. Hay un subsidio estatal para los cultivadores de más de 2 acres de pepinos. El importe neto para un cultivador de $A$ acres es de $2A^3 - 33A^2 + 108A - 310$ euros. Determinar la estrategia óptima del agricultor.

36. Un anuncio escrito en una página rectangular tiene márgenes arriba y abajo de 1 cm y de 1,5 cm en los lados. Si el área de la página debe ser 120 $cm^2$, ¿cuáles son las dimensiones que hacen máxima el área de la región escrita?

37. En los deportes donde se golpea o se lanza una pelota, ésta suele llegar a un punto que está a distinta altura que el de salida. Así ocurre en un golpe de golf en un terreno inclinado o en un lanzamiento de baloncesto. En la figura, se lanza una pelota con un ángulo $\theta$ y termina su recorrido con un ángulo $\beta$ sobre la horizontal (en trayectorias de golf cuesta abajo, $\beta < 0$). Despreciando la resistencia del aire y el giro, el alcance horizontal viene dado por

$$R = \frac{2v^2 \cos^2 \theta}{g} (\tan \theta - \tan \beta)$$

donde $v$ es la velocidad inicial y $g$ la aceleración de la gravedad. En los casos siguientes, hallar el valor de $\theta$ que maximiza $R$ (tratar $v$ y $g$ como constantes): (a) $\beta = 10°$, (b) $\beta = 0°$ y (c) $\beta = -10°$. Verificar que $\theta = 45° + \beta°/2$ hace máximo el alcance.




38. Pensando en su deporte favorito, de entre aquellos en que se lanza o se golpea una pelota, y en el lenguaje coloquial de dicho deporte, explique el resultado del ejercicio 37.

39. Se lanza una bola desde $s = b$ hasta $s = a$ (con $a < b$) con velocidad inicial $v_0$. Si la resistencia del aire es proporcional a la velocidad, el tiempo que tarda la bola en llegar a $s = a$ es

$$T = -\frac{1}{c} \ln\left(1 - c\,\frac{b-a}{v_0}\right),$$

donde $c$ es una constante de proporcionalidad. Un jugador de béisbol está a 300 pies de la base y golpea una pelota con velocidad inicial de 125 pies/s. Supuesto que $c = 0{,}1$, ¿cuánto tarda la pelota en llegar a la base? Otro jugador, que está a $x$ pies de la base, tiene la opción de atrapar la pelota y, tras un tiempo de 0,1 segundos, relanzarla hacia la base con velocidad inicial de 125 pies/s. Hallar el valor de $x$ que minimiza el tiempo total que tarda la pelota en llegar a la base. ¿Es más corto el tiempo del lanzamiento directo? ¿Qué cambia si el tiempo que tarda en relanzarla es de 0,2 segundos?

40. En la situación del ejercicio 39, ¿para qué distancia a la base son iguales los tiempos del lanzamiento directo y del indirecto? ¿Cree que sería capaz de atrapar y volver a lanzar una pelota en tan escaso tiempo? ¿Por qué cree que se considera importante en béisbol disponer de la opción de un relanzamiento?

41. Repetir los ejercicios 39 y 40 si el segundo jugador relanza la pelota a 100 pies/s.

42. Si el tiempo que tarda en volver a lanzar la pelota es 0,1 segundos, calcular el valor de la velocidad inicial del segundo jugador que hace iguales los tiempos de los lanzamientos directo e indirecto.

43. Este problema es ficticio, pero contiene el tipo de ambigüedad que convierte en retos difíciles ciertas tareas técnicas. Una fábrica de golosinas decide liquidar 600.000 bolsitas de caramelos. Cada bolsita tiene un coste de 35 céntimos y se vendía a 90 céntimos. Un estudio de mercado indica que a un precio de $p$ céntimos se venderán $Q(p) = -p^2 + 40p + 250$ miles de bolsitas. Su trabajo como consejero es recomendar el precio óptimo de venta. Como tal, debe hacer lo siguiente: (a) hallar el $p$ que maximiza $Q(p)$, (b) hallar el $p$ que maximiza $10pQ(p)$, que son los ingresos reales de la venta. A la vista de los resultados, forme su opinión acerca de la importancia relativa de deshacerse de cuantas bolsitas sea posible frente a hacer los ingresos mayores posibles.

## 3.8 RITMOS DE CAMBIO EN APLICACIONES

En esta sección culminamos la presentación de la derivada con una colección de aplicaciones seleccionadas en campos diversos. Se ha escrito que las Matemáticas son el lenguaje de la Naturaleza. Hoy día, los conceptos del Cálculo se aplican en casi todas las actividades humanas. Las aplicaciones elegidas en esta sección no son sino una pequeña muestra. Ni son todas las aplicaciones de la derivada ni son necesariamente las más relevantes. Sólo intentan dar idea de la amplia gama de aplicaciones de interés.

La derivada de una función da su ritmo de cambio instantáneo, de tal manera que en cuanto vemos la palabra *ritmo* debemos pensar en la *derivada*. Es raro que en un diario no se haga referencia a los ritmos (tasas) de inflación o de interés. Pues bien, deben interpretarse como derivadas. Hay también muchas magnitudes familiares que no suelen reconocerse como ritmos de cambio. Nuestro primer ejemplo es de este tipo.

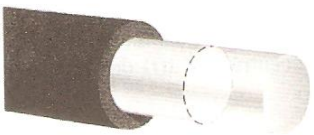


**Figura 3.86**
Un conductor eléctrico.

Si $Q(t)$ es la carga eléctrica en un conductor en el instante $t$, la derivada $Q'(t)$ da la **intensidad de corriente** que fluye por él. En efecto, consideremos la sección del conductor (figura 3.86). Entre los instantes $t_1$ y $t_2$, la carga neta que atraviesa esa sección es $Q(t_2) - Q(t_1)$. La **intensidad de corriente media** (carga por unidad de tiempo) en ese intervalo de tiempo se define como

$$\frac{Q(t_2) - Q(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

La **intensidad de corriente instantánea** $I(t)$ en un instante $t$ se calcula como

$$I(t_1) = \lim_{t \to t_1} \frac{Q(t) - Q(t_1)}{t - t_1}. \tag{8.1}$$

Nótese que (8.1) es la definición alternativa de la derivada (sección 2.2). Por tanto, $I(t) = Q'(t)$.

## Ejemplo 8.1 Modelo para la intensidad de corriente eléctrica

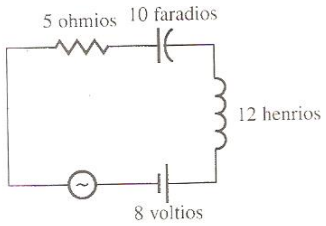



**Figura 3.87**
Un circuito eléctrico simple.

El circuito eléctrico de la figura 3.87 incluye una resistencia de 5 ohmios, una inductancia de 10 faradios y una batería que produce 8 voltios de corriente alterna descrita por la función oscilante 8 sen $2t$, con $t$ en segundos. Calcular la intensidad de corriente en el circuito en cualquier instante $t$.

**Solución** Por las leyes de la Electricidad, la carga en ese circuito viene dada por

$$Q(t) = 12 \operatorname{sen}(4t - \pi/3) + 4 \operatorname{sen} 2t \text{ culombios.}$$

La intensidad de corriente es, por tanto,

$$Q'(t) = 48 \cos(4t - \pi/3) + 8 \cos 2t \text{ amperios (culombios por segundo).}$$

El próximo ejemplo está tomado de la Química. Para los químicos es muy importante tener idea del ritmo de una reacción, ya que ese ritmo proporciona información sobre los enlaces químicos que se forman o se rompen y sobre el tipo de productos que se esperan. Una situación muy simple la representa el esquema

$$A + B \longrightarrow C,$$

que significa que los productos $A$ y $B$ (los reactantes) se combinan para producir $C$ (el producto). Sea $[C](t)$ la concentración (moles/litro) del producto. El ritmo medio de la reacción entre los instantes $t_1$ y $t_2$ es

$$\frac{[C](t_2) - [C](t_1)}{t_2 - t_1}.$$

El ritmo instantáneo de la reacción en cualquier instante $t_1$ es, por tanto,

$$\lim_{t \to t_1} \frac{[C](t) - [C](t_1)}{t - t_1} = \frac{d[C]}{dt}(t_1).$$

Dependiendo de los detalles de la reacción, suele ser posible escribir una relación entre el ritmo de la reacción $\dfrac{d[C]}{dt}$ y la concentración de los reactantes, $[A]$ y $[B]$.

## Ejemplo 8.2 Modelo para el ritmo de una reacción química

En una reacción química **autocatalítica**, el reactante y el producto son el mismo. La reacción continúa hasta que se alcanza un cierto nivel de saturación. Por evidencia experimental se

sabe que el ritmo de la reacción es proporcional, a la vez, a la cantidad de producto presente y a la diferencia entre el nivel de saturación y esa cantidad. Si la concentración inicial es 0 y el nivel de saturación es 1 (correspondiente al 100%), la concentración $x(t)$ del producto satisface la ecuación

$$x'(t) = rx(t)[1 - x(t)],$$

donde $r > 0$ es una constante.

Calcular la concentración para la cual el ritmo de la reacción $x'(t)$ es máximo.

**Solución** Para simplificar la notación escribimos el ritmo de la reacción como

$$f(x) = rx(1 - x).$$

Queremos hallar un $x \geq 0$ que haga máximo el valor de $f(x)$. Como

$$\begin{aligned} f'(x) &= r(1)(1 - x) + rx(-1) \\ &= r(1 - 2x), \end{aligned}$$

el único número crítico es $x = \frac{1}{2}$. La gráfica de $y = f(x)$ (haga un esbozo) es una parábola abierta hacia abajo, así que el número crítico debe corresponder al máximo absoluto.

Aunque el problema matemático ha sido muy fácil de resolver, proporciona al químico una información valiosa. En el instante en que el ritmo de reacción alcanza su máximo, la concentración es exactamente la mitad del nivel de saturación.

---

Cálculo y Física han estado estrechamente unidos desde siempre, por lo que no es sorprendente que la Física ofrezca un amplio abanico de aplicaciones importantes. Ya hemos analizado los conceptos de velocidad y aceleración. Otra noción que hace entrar en juego a la derivada es la densidad en sus múltiples acepciones, tan diversas como la densidad de población (habitantes por unidad de área) o de color (usada en el estudio de radiografías).

Pero el tipo más usual es la **densidad de masa** (masa por unidad de volumen). Es seguro que tiene idea de lo que significa, pero ¿cómo la definiría? Si el objeto en cuestión está constituido por un material homogéneo (es decir, las masas de volúmenes iguales son iguales), entonces la densidad de masa es simplemente

$$\textit{densidad de masa} = \frac{\textit{masa}}{\textit{volumen}}$$

y es constante en todas las partes del objeto. Pero si la masa de un cierto volumen cambia en diferentes partes del objeto, esa fórmula sólo representa la *densidad media* del objeto (inhomogéneo). En el próximo ejemplo calcularemos la densidad de masa en un punto específico de un objeto inhomogéneo.

Sea $f(x)$ la masa (en kg) de los primeros $x$ metros de una varilla fina (figura 3.88).

La masa total de la porción entre las marcas $x$ y $x_1$ $(x > x_1)$ viene dada por $f(x) - f(x_1)$ kg. La **densidad lineal media** (es decir, masa por unidad de longitud) entre $x$ y $x_1$ se define entonces como

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}.$$

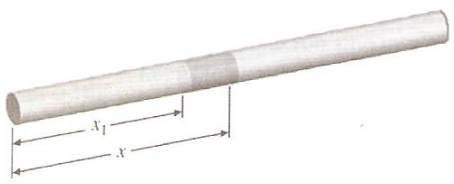



**Figura 3.88**
Una varilla fina.

Finalmente, la **densidad lineal** en $x = x_1$ se define como

$$\rho(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(x_1), \tag{8.2}$$

donde se reconoce de nuevo la definición alternativa de la derivada.

**Ejemplo 8.3** **Densidad de una varilla fina**

La masa de una varilla muy fina viene dada por $f(x) = \sqrt{2x}$. Calcular la densidad lineal en $x = 2$ y en $x = 8$. Comparar las densidades en esos dos puntos.

**Solución** Por (8.2) se tiene

$$\rho(x) = f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x}}(2) = \frac{1}{\sqrt{2x}}.$$

Así, pues, $\rho(2) = 1/\sqrt{4} = 1/2$ y $\rho(8) = 1/\sqrt{16} = 1/4$. Esto significa que la varilla es *inhomogénea* (su densidad de masa no es constante a lo largo de la varilla). De hecho, es menos densa en $x = 8$ que en $x = 2$.

Nuestro próximo ejemplo se refiere a la Medicina (cardiología, para ser precisos). El ritmo de cambio en esta aplicación no es realmente una derivada. No obstante, el ritmo cardíaco es uno de los ritmos de cambio más familiares e importantes de nuestras vidas. El lenguaje y los conceptos del Cálculo ayudan a entender algunas de las apasionantes investigaciones en este campo.

Los cardiólogos han usado gráficas desde mucho tiempo atrás para identificar problemas del corazón. Es muy probable que le suene familiar el término electrocardiograma (ECG o EKG), una gráfica que da cuenta de la actividad eléctrica del corazón. La figura 3.89 muestra un pequeño fragmento de un ECG.

Un cardiólogo experto es capaz de obtener abundante información de un ECG. Cada fragmento que contiene un pico corresponde a una fase primaria de actividad del corazón y su forma particular permite detectar diversas patologías. Vemos que la gráfica es esencialmente periódica (la misma forma se repite una y otra vez). Es fácil medir la longitud de un período entre pico y pico. Cada pico corresponde a una contracción ventricular y la distancia entre ellas da el ritmo cardíaco. Si picos sucesivos ocurren a los $t_1$ y $t_2$ segundos, el ritmo cardíaco es

$$\frac{1 \text{ latido}}{t_2 - t_1 \text{ segundos}} = \frac{60}{t_2 - t_1} \text{ latidos por minuto.}$$

Nótese que el ritmo cardíaco **no** es una derivada. Para que fuese una derivada necesitaríamos tomar el límite cuando $t_2 \to t_1$ de una función del tiempo. Pero esos picos que registra un ECG son sucesos discretos que tienen lugar en tiempos concretos y, por tanto, no podemos calcular un límite. Una vez definido el ritmo cardíaco, ¿qué podemos aprender acerca del cuerpo humano?

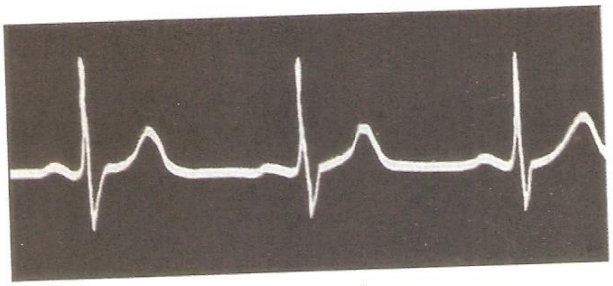
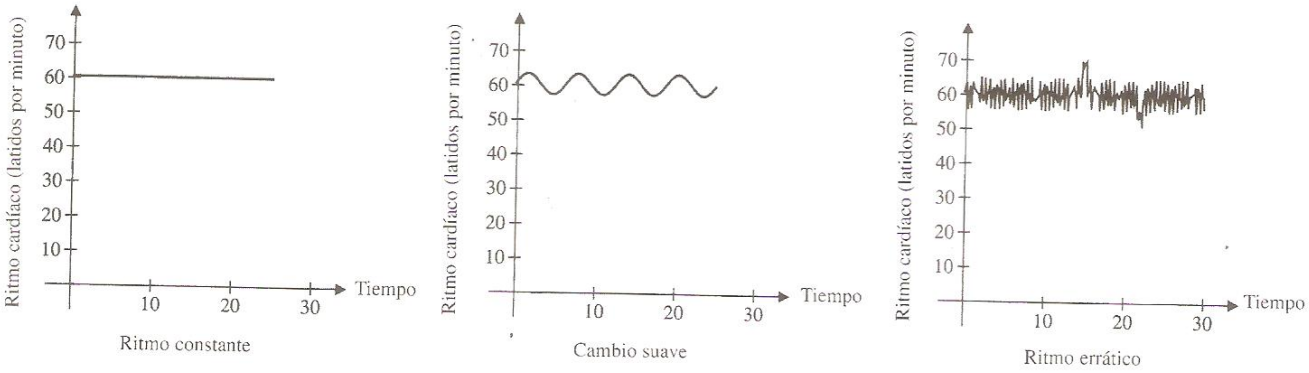


**Figura 3.89**

Un electrocardiograma (ECG) normal.

### Ejemplo 8.4 Ritmo cardíaco y electrocardiogramas

Las gráficas adjuntas representan **ritmos** cardíacos durante un cierto tiempo. ¿Cuál de ellas corresponde al corazón de un individuo sano en reposo?




¡Atención! La primera gráfica representa un ritmo constante de un latido por segundo. No es el «electrocardiograma plano» de un corazón inactivo que ha dejado de latir.

**Solución** Hay que interpretar adecuadamente las gráficas. Las tres corresponden a personas en reposo con unos 60 latidos por minuto en promedio. Las diferencias están en las variaciones respecto del promedio. La primera persona tiene un ritmo constante de exactamente 60 latidos por minuto. La segunda muestra pequeños altibajos en el ritmo cardíaco y la tercera un ritmo algo errático.

¿Cuál cree que va asociado a una persona más sana? Las investigaciones de los cardiólogos en las décadas de 1980 y 1990 parecen indicar que un corazón sano tiene un comportamiento errático, incluso en reposo. (¡Acertó si ha elegido la tercera gráfica!). Los comportamientos muy periódicos, como el de la segunda figura, se han observado en pacientes en reposo antes de un ataque cardíaco. El ritmo constante de la primera figura es típico de una persona que está experimentando uno de esos ataques.

Cabe añadir que las variaciones en la tercera gráfica son demasiado pequeñas para ser detectadas sin instrumentos sofisticados. Estas investigaciones han conducido a un nuevo tipo de monitor que se usa en pacientes de riesgo. Las investigaciones actuales van dirigidas al diseño de marcapasos inteligentes que identifiquen y prevengan las crisis.

El ejemplo siguiente proviene de la Economía. El ritmo de cambio que vamos a discutir tampoco es una derivada exactamente, pero la derivada ha mostrado también su utilidad en los modelos económicos. El adjetivo **marginal** designa en economía un ritmo. Así, el **coste marginal** es la derivada de la función de coste, el **beneficio marginal** es la derivada de la función de beneficios, etc.

### Ejemplo 8.5 Análisis del coste marginal de un producto

El coste total (en euros) de producción de $x$ unidades de un producto es

$$C(x) = 0{,}02x^2 + 2x + 4000$$

Calcular el coste marginal en $x = 100$ y compararlo con el coste real de producción de la unidad número 100.

**Solución** Puede pensar que una función de costes es un punto de partida falaz, ya que sólo se conoce realmente después de la fabricación. Es cierto, pero para llevar a cabo un proyecto nuevo de producción es importante analizar un modelo. En la práctica, se estima el coste de producción y se intenta ajustar alguna función conocida que se analizará con las técnicas del Cálculo. (Es una de las vías por las que el Cálculo entra en juego en problemas de la vida real).

La función de coste marginal es

$$C'(x) = 0{,}04x + 2,$$

de manera que el coste marginal en $x = 100$ es $C'(100) = 4 + 2 = 6$ euros por unidad. Por otra parte, el coste real de producción de la unidad número 100 sería $C(100) - C(99)$. (¿Por qué?). Se tiene

$$\begin{aligned} C(100) - C(99) &= 200 + 200 + 4000 - (196{,}02 + 198 + 4000) \\ &= 4400 - 4394{,}02 = 5{,}98 \text{ euros.} \end{aligned}$$

Nótese que es un valor muy próximo al coste marginal.

Nuestro ejemplo final viene de la Psicología. Tal vez haya oído hablar de «la curva de aprendizaje» para un programa de *software* u otros productos técnicos. El nombre nació en los intentos por cuantificar y comprender la dinámica del aprendizaje de cosas nuevas.

**Ejemplo 8.6** **Análisis de una curva de aprendizaje**

Supongamos que el porcentaje de problemas que una persona contesta correctamente en un test, después de $t$ horas de preparación, es aproximadamente

$$f(t) = \frac{80}{1 + 3e^{-0{,}4t}}.$$

Representar la curva de aprendizaje $y = f(t)$. Calcular e interpretar $f'(2)$ y $f'(10)$.

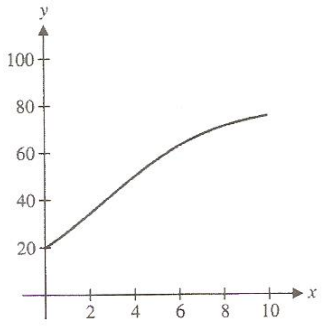



**Figura 3.90**
$y = 80/(1 + 3e^{-0{,}4t})$.

**Solución** La figura 3.90 muestra la gráfica de $y = f(x)$. Vemos que, sin preparación, la persona contesta correctamente el 20% y tras mejorar poco a poco encuentra dificultades en superar el 80%. Para calcular la derivada no necesitamos la regla del cociente, porque el numerador es una constante. Reescribimos la función como

$$f(t) = 80(1 + 3e^{-0{,}4t})^{-1}$$

y obtenemos

$$\begin{aligned} f'(t) &= -80(1 + 3e^{-0{,}4t})^{-2}(-1{,}2e^{-0{,}4t}) \\ &= 96e^{-0{,}4t}(1 + 3e^{-0{,}4t})^{-2}. \end{aligned}$$

Al cabo de 2 horas,

$$f'(2) = 96e^{-0{,}8}(1 + 3e^{-0{,}8})^{-2} \approx 7{,}8243\% \text{ por hora.}$$

Es decir, tras 2 horas se espera que la persona aumente su registro en un 7,8% por una hora extra de estudio. A las 10 horas,

$$f'(10) = 96e^{-4}(1 + 3e^{-4})^{-2} \approx 1{,}5799\% \text{ por hora.}$$

Por tanto, la siguiente hora de estudio sólo hará crecer el registro en 1,6 puntos.

Hemos discutido seis ejemplos de ritmos de cambio de procedencia diversa. Junto con los de las secciones precedentes (velocidad, crecimiento de poblaciones...) constituyen una lista impresionante de aplicaciones de la derivada. Aun así, no hemos hecho más que dar una idea de su alcance. En cualquier disciplina donde se cuantifiquen y se analicen propiedades de funciones, el Cálculo y la derivada serán instrumentos poderosos. La lista engloba a casi todos los campos de interés científico. El estudio del Cálculo pondrá en sus manos la posibilidad de leer y comprender estudios técnicos en multitud de disciplinas y de apreciar, como en esta sección, la unidad que aportan las Matemáticas al esfuerzo humano.

# EJERCICIOS 3.8

1. Una variable definida sólo en puntos aislados se llama **discreta**. Por ejemplo, el número de alumnos en un aula es una variable discreta, ya que debe ser un número entero. Una variable que toma todos los valores de un intervalo se llama **continua**. De las seis aplicaciones discutidas en esta sección, ¿en cuáles era discreta la variable? ¿Qué funciones eran discretas y cuáles continuas? De los seis ejemplos expuestos, ¿en cuáles el ritmo de cambio era una derivada? Explicar esta respuesta en términos de variables discretas y continuas.

2. Un modelo importante de crecimiento de poblaciones es la **ecuación logística** $x'(t) = x(t)[1 - x(t)]$, donde $x(t)$ no es el tamaño de la población, sino la proporción respecto del nivel de saturación. Por ejemplo, $x(t) = 0{,}5$ significa que la población es la mitad de lo que los recursos del entorno pueden soportar y $x(t) = 1{,}1$ significa que hay un 10% más de lo soportable. Es la misma ecuación utilizada para describir una reacción autocatalítica. La ecuación contiene dos tendencias antagónicas que contribuyen al ritmo de cambio $x'(t)$. El término $x(t)$ significa que a mayor $x(t)$, más deprisa crece la población (o la concentración del producto de la reacción). En su contra actúa el término $1 - x(t)$, que indica que cuanto más cercano a 1 sea el valor de $x(t)$, más lento es el crecimiento. Con los dos términos en competencia, el modelo tiene la propiedad de que, para $x(t)$ pequeños, mayor $x(t)$ implica mayor crecimiento, mientras que, cuando $x(t)$ se aproxima a 1, el crecimiento disminuye. Explicar, en términos de crecimiento de poblaciones y de concentración en una reacción, por qué el modelo es razonable.

3. Déficit y deuda pública aparecen con frecuencia en los medios de comunicación, pero se confunden muchas veces. Por ejemplo, si una empresa termina el año fiscal debiendo 5.000 euros, ésta es su **deuda**. Si el año siguiente ingresa 106.000 euros y gasta 109.000 euros, su **déficit** en ese año es de 3.000 euros, con lo que su deuda ha aumentado hasta 8.000 euros. Explicar brevemente por qué el déficit es la derivada de la deuda.

4. Mucha gente se sorprende ante el ejemplo 8.4 relativo al corazón. Para hacerlo más creíble, explicar cómo afectan al ritmo cardíaco nuestro nivel de actividad, el ritmo respiratorio y el estado emocional. A la vista de estos y otros factores, discutir si cabe esperar que el ritmo cardíaco sea exactamente constante.

5. Hallar la intensidad de corriente de un circuito eléctrico cuya carga viene dada por $Q(t) = e^{-2t}(\cos 3t - 2 \operatorname{sen} 3t)$ culombios.

6. Hallar la intensidad de corriente de un circuito eléctrico cuya carga viene dada por $Q(t) = e^{t}(3 \cos 2t + \operatorname{sen} 2t)$ culombios.

7. La carga de un circuito eléctrico es $Q(t) = e^{-3t} \cos 2t + 4 \operatorname{sen} 3t$ culombios. ¿Qué le ocurre a esta función cuando $t \to \infty$? Explicar por qué se llama **transitorio** al término $e^{-3t} \cos 2t$ y **permanente** (o **asintótico**) al término $4 \operatorname{sen} 3t$. Hallar los valores transitorio y permanente de la función de intensidad de corriente.

8. Hallar el régimen transitorio y el permanente de la función intensidad de corriente (ejercicio 7) si la función de carga es $Q(t) = e^{-2t}(\cos t - 2 \operatorname{sen} t) + te^{-3t} + 2 \cos 4t$.

9. Si la concentración de un producto químico cambia de acuerdo con la ecuación $x'(t) = 2x(t)[4 - x(t)]$, hallar la concentración $x(t)$ para la que el ritmo de la reacción es máximo.

10. Si la concentración de un producto químico cambia de acuerdo con la ecuación $x'(t) = 0{,}5x(t)[5 - x(t)]$, hallar la concentración $x(t)$ para la que el ritmo de la reacción es máximo.

11. Probar que, en el ejercicio 9, la concentración máxima es 4 si $0 < x(0) < 4$. Calcular la concentración máxima en el ejercicio 10.

12. Hallar la ecuación de una reacción autocatalítica en la que la máxima concentración es $x(t) = 16$ y el ritmo de la reacción es 12 cuando $x(t) = 8$.

13. Los matemáticos estudian muchas veces ecuaciones de la forma $x'(t) = rx(t)[1 - x(t)]$ en lugar de $x'(t) = cx(t)[K - x(t)]$, más complicada. Justifican esa simplificación alegando que la segunda ecuación «se reduce» a la primera. Partiendo de $y'(t) = cy(t)[K - y(t)]$, sustituir $y(t) = Kx(t)$ y probar que la ecuación se reduce a la forma $x'(t) = rx(t)[1 - x(t)]$. ¿Cómo está relacionada la constante $r$ con las constantes $c$ y $K$?

14. Una reacción química se rige por la ecuación $x'(t) = cx(t)[K - x(t)]$. En el instante $t = 4$, la concentración es $x(4) = 2$ y el ritmo de la reacción es $x'(4) = 3$. En el instante $t = 6$, es $x(6) = 4$ y $x'(6) = 4$. Hallar los valores de $c$ y $K$ para esta reacción.

15. En una **reacción química de segundo orden**, los **reactantes** $A$ y $B$ se combinan para formar el **producto** $C$. Si las concentraciones iniciales de $A$ y $B$ son $a$ y $b$, respectivamente, la concentración $x(t)$ del producto satisface la ecuación $x'(t) = [a - x(t)][b - x(t)]$.
¿Cuál es el ritmo de cambio del producto cuando $x(t) = a$? En este valor, la concentración del producto ¿crece, decrece o está estable? Suponiendo $a < b$ y que no hay producto cuando la reacción comienza, explicar por qué la concentración máxima del producto es $x(t) = a$.

16. Para la reacción de segundo orden del ejercicio 15, hallar el valor (matemático) de $x(t)$ que hace mínimo el ritmo de la reacción. Probar que el ritmo de la reacción para ese valor de $x(t)$ es negativo. Explicar por qué la concentración $x(t)$ nunca alcanzará ese valor, de manera que la solución matemática no es relevante desde la perspectiva química. Explicar por qué $x(t)$ debe mantenerse entre 0 y $a$ y calcular los ritmos máximo y mínimo de reacción en ese intervalo cerrado.

17. Puede demostrarse que la ecuación $x'(t) = [a - x(t)][b - x(t)]$ tiene una solución dada por

$$x(t) = \frac{a[1 - e^{-(b-a)t}]}{1 - (a/b)e^{-(b-a)t}}.$$

Calcular $x(0)$, la concentración inicial, y $\lim_{t \to \infty} x(t)$, la concentración límite (suponemos $a < b$). Representar $x(t)$ en el intervalo $[0, \infty)$ y describir en palabras cómo cambia la concentración con el tiempo.

18. Para la solución del ejercicio 17, hallar y representar $x'(t)$. Calcular $\lim_{t \to \infty} x'(t)$ y describir cómo cambia el ritmo de la reacción con el tiempo.

**En los ejercicios 19-22, la masa de los primeros $x$ metros de una varilla fina viene dada por la función $m(x)$ en el intervalo indicado. Hallar la función densidad lineal de la varilla. Describir, a la vista de la respuesta, la composición de esa varilla.**

19. $m(x) = 4x - \text{sen } x$ gramos en $0 \le x \le 6$

20. $m(x) = (x-1)^3 + 6x$ gramos en $0 \le x \le 2$

21. $m(x) = 4x$ gramos en $0 \le x \le 2$

22. $m(x) = 4x^2$ gramos en $0 \le x \le 2$

**En los ejercicios 23-26 se dan los tiempos (en segundos) en los que ocurren los picos de un ECG. Analizar el ritmo de ese corazón y diagnosticar si el paciente está en riesgo de un ataque o no.**

23. 0,0, 0,99, 2,12, 3,19, 4,12, 5,17, 6,08, 6,95, 8,16, 9,26, 10,24, 11,28, 12,22, 13,14, 14,21, 15,18

24. 0,0, 0,99, 2,02, 3,01, 4,02, 5,03, 6,01, 6,99, 8,01, 9,02, 10,02, 11,02, 12,02, 13,01, 14,01, 15,02

25. 0,0, 0,98, 1,96, 2,90, 3,80, 4,74, 5,72, 6,70, 7,70, 8,72, 9,74, 10,80, 11,90, 13,06, 14,08, 15,10

26. 0,0, 0,98, 1,96, 3,02, 3,98, 5,04, 6,22, 7,17, 8,15, 9,17, 10,13, 11,08, 12,11, 13,06, 14,08, 15,10

27. Si el coste de fabricación de $x$ unidades es $C(x) = x^3 + 20x^2 + 90x + 15$, calcular la función coste marginal y comparar el coste marginal en $x = 50$ con el coste real de fabricación de la unidad número 50.

28. Si el coste de fabricación de $x$ unidades es $C(x) = x^4 + 14x^2 + 60x + 35$, calcular la función coste marginal y comparar el coste marginal en $x = 50$ con el coste real de fabricación de la unidad número 50.

29. Si el coste de fabricación de $x$ unidades es $C(x) = x^3 + 21x^2 + 110x + 20$, calcular la función coste marginal y comparar el coste marginal en $x = 100$ con el coste real de fabricación de la unidad número 100.

30. Si el coste de fabricación de $x$ unidades es $C(x) = x^3 + 11x^2 + 40x + 10$, calcular la función coste marginal y comparar el coste marginal en $x = 100$ con el coste real de fabricación de la unidad número 100.

31. El coste de fabricación de $x$ unidades es $C(x) = x^3 - 30x^2 + 300x + 100$ euros. Localizar el punto de inflexión y discutir el significado de su valor en términos de costes de fabricación.

32. El propietario de un club de baloncesto estima que si vende las entradas a 10 euros, asisten por partido unas 27.000 personas y a 8 euros unas 33.000. Un modelo lineal daría como estimación que a 9 euros asistirán unas 30.000. Discutir si es razonable utilizar aquí un modelo lineal. Usarlo para determinar a qué precio se hacen máximos los ingresos.

33. En el ejemplo 8.6 discutimos la curva de aprendizaje $f(t) = 80/(1 + 3e^{-0,4t})$. Demostrar que $\lim_{t \to \infty} f(t) = 80$ y que $f(t)$ es una función creciente en $t > 0$. Comentar si ambos resultados son propiedades razonables de una curva de aprendizaje.

34. Supongamos que la calificación máxima que es capaz de obtener una persona en un test es 90 y que tras 2 horas de preparación obtiene 60. Hallar una curva de aprendizaje de la forma $f(t) = a/(1 + 3e^{-bt})$ para esa persona en ese test.

35. Al cabo de $t$ horas de estudio, una persona obtiene $f(t) = 180/(2 + 4e^{-0,2t})$ puntos en un examen. ¿Cuántos puntos obtiene tras 3 horas de estudio? Calcular $f'(3)$ y estimar cuántos puntos adicionales conseguirá con una cuarta hora de estudio. Calcular $f'(10)$ y estimar cuántos puntos adicionales conseguirá con una undécima hora de estudio.

36. Al cabo de $t$ horas de estudio, una persona obtiene $f(t) = 10/(1 + 4e^{-0,5t})$ puntos. ¿Cuántos puntos obtiene tras 4 horas de estudio? Calcular $f'(4)$ y estimar cuántos puntos adicionales conseguirá con una quinta hora de estudio. Calcular $f'(10)$ y estimar cuántos puntos adicionales conseguirá con una undécima hora de estudio.

37. La función $f(t) = a/(1 + 3e^{-bt})$ se ha utilizado como modelo para la propagación de un rumor. Supongamos $a = 70$ y $b = 0,2$. Calcular $f(2)$, el porcentaje de la población que ha oído el rumor a las 2 horas. Calcular $f'(2)$ y describir qué representa. Calcular $\lim_{t \to \infty} f(t)$ y describir qué representa.

38. Después de una inyección, la concentración de un fármaco en el músculo es una función $f(t)$ del tiempo. Supongamos que $f(t) = e^{-0,02t} - e^{-0,42t}$, con $t$ medido en horas. Determinar en qué momento es máxima esa concentración.

39. Sea $f(x)$ el tamaño (en mm) de la pupila de un animal, donde $x$ es la intensidad de la luz que recibe. Si

$$f(x) = \frac{160x^{-0,4} + 90}{4x^{-0,4} + 15},$$

probar que $f(x)$ es una función decreciente. Interpretar ese resultado en el contexto del problema.

40. La temperatura de un enfermo, 1 hora después de serle suministrados $x$ mg de un fármaco, viene dada por

$$T(x) = 102 - \frac{1}{6}x^2(1 - x/9), \text{ con } 0 \le x \le 6.$$

El valor absoluto de la derivada, $|T'(x)|$, se define como la **sensibilidad** del cuerpo a la dosis recibida. Calcular la dosis que hace máxima la sensitividad.

41. Sea $C(x)$ el coste de fabricación de $x$ unidades de un producto y $\overline{C}(x) = C(x)/x$ la función de coste medio. Si $C(x) = 0,01x^2 + 40x + 3600$, probar que $C'(100) < \overline{C}(100)$ y que al aumentar en 1 la producción el coste medio disminuirá.

42. Para la función de costes del ejercicio 41, probar que $C'(1000) > \overline{C}(1000)$ y que al aumentar en 1 la producción el coste medio crecerá.

43. Para la función de costes del ejercicio 41, probar que el coste medio es mínimo en el valor de $x$ para el cual $C'(x) = \overline{C}(x)$.

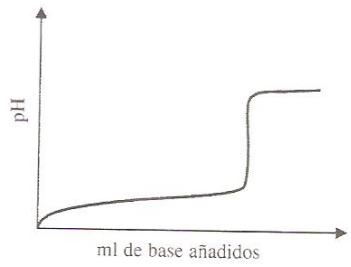
44. Si la función de costes es lineal, $C(x) = a + bx$, con $a$ y $b$ positivos, demostrar que no hay coste medio mínimo y que $C'(x) \neq \overline{C}(x)$ para todo $x$.

45. Sean $R(x)$ los ingresos y $C(x)$ el coste de fabricación de $x$ unidades de un producto. Probar que en el valor de $x$ que maximiza los **beneficios**, definidos como $P(x) = R(x) - C(x)$, el ingreso marginal es igual al coste marginal.

46. Hallar el máximo de la función de beneficios si $R(x) = 10x - 0{,}001x^2$ y $C(x) = 2x + 5.000$, ambas en euros.

47. En la valoración de un ácido débil y una base fuerte, el pH viene dado por $c + \ln \dfrac{f}{1-f}$, donde $c$ es una constante (relacionada con la **constante de disociación del ácido**) y $f$ es la fracción $(0 < f < 1)$ de ácido transformada (véase *Quantitative Chemical Analysis*, de Harris, para más detalles). Hallar el valor de $f$ en el cual el ritmo de cambio del pH es mínimo. ¿Qué ocurre cuando $f$ tiende a 1?

48. En el ejercicio 47 ha encontrado el significado de un punto de inflexión de una curva de valoración. Un segundo punto de inflexión, llamado **punto de equivalencia**, corresponde a $f = 1$. En la curva de valoración generalizada adjunta, identificar en la gráfica los dos puntos de inflexión y explicar brevemente por qué los químicos prefieren medir el punto de equivalencia a medir el del ejercicio 47. (Nota: el eje horizontal de una curva de valoración indica la cantidad de base añadida a la mezcla. Es directamente proporcional a la cantidad de ácido transformada en la región donde $0 < f < 1$).




# EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO

**En los ejercicios 1 y 2, hallar la aproximación lineal a $f(x)$ en $x_0$.**

1. $f(x) = e^{3x}$, $x_0 = 0$
2. $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$, $x_0 = 1$

**En los ejercicios 3 y 4, usar aproximación lineal para estimar la cantidad.**

3. $\sqrt[3]{7{,}96}$
4. sen 3

**En los ejercicios 5 y 6, usar el método de Newton para calcular una raíz aproximada.**

5. $x^3 + 5x - 1 = 0$
6. $x^3 = e^{-x}$

7. Explicar por qué el método de Newton falla para $x^3 - 3x + 2 = 0$ con $x_0 = 1$.

8. Probar que la aproximación $\dfrac{1}{(1-x)} \approx 1 + x$ es válida para $x$ «pequeños».

**En los ejercicios 9-18, hacer lo que sigue a mano: (a) Hallar los números críticos. (b) Identificar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento. (c) Determinar si los números críticos corresponden a máximos locales, a mínimos locales o a ninguna de ambas cosas. (d) Hallar los intervalos de concavidad definida. (e) Hallar los puntos de inflexión.**

9. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$
10. $f(x) = x^4 - 4x + 1$
11. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 2$
12. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x$
13. $f(x) = xe^{-4x}$
14. $f(x) = x^2 \ln x$
15. $f(x) = x\sqrt{x^2 - 4}$
16. $f(x) = (x^2 - 1)^{2/3}$
17. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 4}$
18. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}$

**En los ejercicios 19-22, hallar los extremos absolutos de la función en el intervalo.**

19. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$ en $[0, 4]$
20. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$ en $[-4, 0]$
21. $f(x) = x^{4/5}$ en $[-2, 3]$
22. $f(x) = x^2e^{-x}$ en $[-1, 4]$

**En los ejercicios 23-26, hallar las coordenadas $x$ de los extremos locales.**

23. $f(x) = x^3 + 4x^2 + 2x$
24. $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x$
25. $f(x) = x^5 - 2x^2 + x$
26. $f(x) = x^5 + 4x^2 - 4x$

27. Esbozar la gráfica de una función con $f(-1) = 2$, $f(1) = -2$, $f'(x) < 0$ para $-2 < x < 2$, $f'(x) > 0$ para $x < -2$ y $x > 2$.

28. Esbozar la gráfica de una función con $f'(x) > 0$ para $x \neq 0$, $f'(0)$ no está definido, $f''(x) > 0$ para $x < 0$ y $f''(x) < 0$ para $x > 0$.

**En los ejercicios 29-38, esbozar y discutir con detalle la gráfica de la función.**

29. $f(x) = x^4 + 4x^3$
30. $f(x) = x^4 + 4x^2$

31. $f(x) = x^4 + 4x$

32. $f(x) = x^4 - 4x^2$

33. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

34. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

35. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$

36. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$

37. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

38. $f(x) = \dfrac{4}{x^2 - 1}$

39. Hallar el punto de la gráfica de $y = 2x^2$ más próximo al punto $(2, 1)$.

40. Demostrar que la recta que une los dos puntos del ejercicio 39 es perpendicular a la recta tangente a la gráfica de $y = 2x^2$ en $(2, 1)$.

41. Se va a construir una autopista desde un punto $A$ hasta otro $B$ que está 4 millas al este y 6 millas al sur de $A$. Las primeras 4 millas al sur de $A$ son de terreno pantanoso y el coste es en él de 6 millones (de euros) por milla. En terreno seco el coste por milla es de 2 millones. Hallar el punto de separación entre ambos tipos de terreno al que debe dirigirse la autopista para minimizar su coste.

42. Repetir el ejercicio 41 si el coste en terreno pantanoso es de 16 millones de euros por milla. Explicar por qué el punto óptimo está al oeste del encontrado en el ejercicio 41.

43. Una lata cilíndrica de soda debe contener 16 onzas. Hallar las dimensiones que hacen mínima el área de su superficie.

44. Sea $C(x) = 0{,}02x^2 + 4x + 1200$ el coste de fabricación de $x$ unidades de un producto. Probar que $C'(x) > 0$ y explicar en términos empresariales por qué eso significa que el proceso de producción no es muy eficiente.

45. La carga en un circuito eléctrico en el tiempo $t$ es $Q(t) = e^{-3t}$ sen $2t$ culombios. Hallar la intensidad de la corriente.

46. La concentración $x(t)$ de un producto en una reacción química cambia de acuerdo con la ecuación $x'(t) = 0{,}3x(t)[4 - x(t)]$. Calcular la concentración que hace máximo el ritmo de la reacción.

47. La masa de los $x$ primeros metros de una fina varilla viene dada por $m(x) = 20 + x^2$ en $0 \le x \le 4$. Calcular la densidad lineal de la varilla y describir su composición.

48. Una persona obtiene $f(t) = 90/(1 + 4e^{-0{,}4t})$ puntos en un examen si se prepara durante $t$ horas. ¿Cuántos puntos obtendría sin estudiar nada? Calcular $f'(0)$ y estimar cuántos puntos más obtendría con una hora de estudio.

49. El coste de producción de $x$ unidades de un producto es $C(x) = 0{,}02x^2 + 20x + 1800$. Hallar la función de coste marginal. Comparar el coste marginal en $x = 20$ con el coste real de producción de la vigésima unidad.

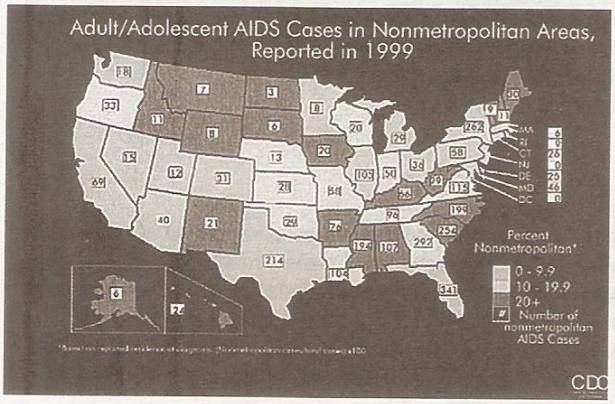
50. Para la función de costes del ejercicio 49, hallar el valor de $x$ que hace mínimo el coste medio $\overline{C}(x) = C(x)/x$.

51. Sea $n(t)$ el número de fotones en un campo láser. Un modelo de la acción de un láser es $n'(t) = an(t) - b[n(t)]^2$, con $a$ y $b$ constantes positivas.
Si $n(0) = a/b$, ¿qué es $n'(0)$? De acuerdo con ese cálculo, $n(t)$, ¿crece, decrece o ninguna de ambas cosas?
Si $n(0) > a/b$, ¿$n'(0)$ es positiva o negativa? Según este resultado, $n(t)$ ¿crece, decrece o ninguna de ambas cosas?
Si $n(0) < a/b$, ¿$n'(0)$ es positiva o negativa? Según este resultado, $n(t)$ ¿crece, decrece o ninguna de ambas cosas?
Reuniendo toda esta información, conjeture el límite de $n(t)$ cuando $t \to \infty$.
Repita este análisis para el caso $a < 0$. [Por definición, $n(t)$ es positivo, así que olvide los valores negativos de $n(t)$].

# CAPÍTULO 4

# INTEGRACIÓN

Las enfermedades infecciosas producidas por bacterias están muy controladas gracias a los antibióticos. Por el contrario, muchos virus (incluso los asociados a un simple catarro) escapan al alcance de la medicina. De ahí que la aparición, en la década de 1980, de un virus mortal como el HIV (figura de arriba), causante del SIDA, provocara una gran alarma médica y social. En sus intentos por desvelar el misterio del SIDA, los epidemiólogos han recurrido a sofisticados métodos matemáticos con el fin de predecir la gravedad de un brote. Muchas de las magnitudes matemáticas usadas por esos investigadores se desarrollan en este capítulo.




Al analizar la difusión de una enfermedad, es esencial conocer el número de casos registrados en un período de tiempo dado. Un análisis de esos datos indica el ritmo de crecimiento, que se usa para predecir el número de casos en el futuro. En términos matemáticos, la idea consiste en usar el ritmo de cambio (o sea, la derivada) de una función desconocida para determinar propiedades de la función misma. Un aspecto de este problema, lo que podríamos llamar **antiderivación**, se introduce en la sección 4.1.

El estudio del SIDA es muy complicado debido a que el tiempo que transcurre desde que una persona queda infectada por el HIV («HIV positiva») hasta que aparecen los síntomas del SIDA es muy variable. De modo que un modelo realista debe incluir no sólo el conocimiento del número de personas infectadas, sino además una variable «período de incubación». Un ejemplo sencillo servirá para ilustrar esta dificultad.

Supongamos, por fijar ideas, que los ritmos de infección de una enfermedad contagiosa en un período de 4 meses son los que recoge la tabla.

| Mes | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Número de nuevos infectados | 20 | 40 | 40 | 30 |

Supongamos, además, que los datos sobre el período de incubación son los siguientes:

| Meses transcurridos desde la infección | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Porcentaje que ha desarrollado los síntomas | 20 | 50 | 20 | 10 |

Vamos a hacer una predicción sobre cuántos individuos desarrollarán los síntomas en el cuarto y quinto mes.

Quienes desarrollan los síntomas en el cuarto mes pertenecen a tres categorías: infectados el primer mes con un período de incubación de 3 meses, infectados en el segundo mes con un período de incubación de 2 meses e infectados en el tercer mes con un período de incubación de 1 mes. Los números de personas nuevas que desarrollan síntomas en cada categoría son el 20% de 20, el 50% de 40 y el 20% de 40, o sea,

$$0{,}2(20) + 0{,}5(40) + 0{,}2(40) = 4 + 20 + 8 = 32.$$

Un cálculo análogo da como predicción para el número de nuevos casos en el quinto mes:

$$0{,}1(20) + 0{,}2(40) + 0{,}5(40) + 0{,}2(30) = 36.$$

Nótese que, aunque el ritmo de la infección disminuye en el cuarto mes, el número de casos nuevos crecerá el quinto mes.

Sumas como éstas son el centro de atención de la sección 4.2. Las usaremos para calcular el área bajo una curva (sección 4.3) y generalizar el método en la definición de **integral definida** (sección 4.4). En ese momento estaremos en disposición de presentar uno de los resultados más importantes de las Matemáticas: el teorema fundamental del Cálculo, que revela la conexión entre las derivadas y las integrales definidas.

## 4.1 PRIMITIVAS

**Nota**

En un modelo realista de un sistema tan complejo como un transbordador espacial, hay que considerar mucho más que los conceptos simples discutidos aquí. Una presentación muy interesante de este problema puede verse en el artículo de Long y Weiss en *The American Mathematical Monthly* (febrero 1999).

El Cálculo pone en nuestras manos instrumentos poderosos para comprender el mundo que nos rodea. Cuando los ingenieros de la NASA diseñaron el transbordador espacial, lo equiparon con motores de avión para su vuelo de regreso a través de la atmósfera. Con el fin de reducir costes, al final se desecharon, de modo que el transbordador era un planeador. Con ello se perdió la posibilidad de elegir el lugar de aterrizaje. Más aún, los astronautas debían realizar la maniobra con éxito al primer intento. Sin motores **no** habría una segunda oportunidad.

Es obvio que la trayectoria de vuelo debía ser elegida (y controlada) con la mayor precisión posible. Los ingenieros de la NASA usaron el Cálculo para dar respuesta a estos problemas de importancia vital. No estamos en condiciones de analizar los intrincados detalles de un vuelo espacial, pero podemos considerar un modelo idealizado.

Claro está que si pensamos en el vuelo del transbordador, no vemos ecuaciones en un primer momento. Para resolver problemas de la vida real se empieza por los principios físicos y de ellos surge un *modelo matemático* del sistema físico.

Transbordador espacial *Endeavor*.

Empezamos considerando el movimiento vertical del transbordador hacia la Tierra. Le afectan tres fuerzas: la gravedad, la resistencia del aire y la fuerza de ascenso sobre las alas y el fuselaje. El principio físico aplicable es la segunda ley del movimiento de Newton:

$$\text{Fuerza} = \text{masa} \times \text{aceleración}, \quad \text{es decir,} \quad F = ma.$$

Así, pues, la suma de las fuerzas que actúan es igual al producto de la masa por la aceleración (que es la derivada de la velocidad, o sea, la segunda derivada de la posición).

Nuestra tarea se reduce a identificar las fuerzas, usar la segunda ley de Newton para escribir una ecuación que relacione todas las fuerzas y deducir de ella la posición del objeto. Por desgracia, cada uno de estos pasos puede ser muy complicado.

Por ejemplo, ¿cómo expresar la fuerza de rozamiento o la de ascenso? Los conductores de automóviles saben que a mayor velocidad, mayor resistencia del aire. Los ingenieros aeronáuticos han probado experimentalmente que la fuerza de rozamiento con el aire, $F_r$, es proporcional al cuadrado de la velocidad. En nuestro caso,

$$F_r = kv^2,$$

para alguna constante $k > 0$.

La fuerza de la gravedad es fácil de describir: es el peso del objeto, esencialmente constante en nuestro caso (al menos a altitudes no muy grandes). El peso está relacionado con la masa por $W = -mg$, donde $g$, la aceleración de la gravedad, es aproximadamente 32 pies/s$^2$. El signo negativo indica que la fuerza de la gravedad actúa hacia abajo. Por la segunda ley de Newton,

$$F = ma = -mg + kv^2$$

Recordando que $a = v'(t)$, queda

$$mv'(t) = -mg + kv^2(t) \tag{1.1}$$

Se dice que (1.1) es una **ecuación diferencial** porque relaciona $v(t)$ con su derivada $v'(t)$. No tenemos instrumental suficiente para resolverla, así que vamos a simplificarla (la simplificación es un paso esencial en los modelos matemáticos). Si suponemos que la única fuerza actuante es la de la gravedad (despreciamos la acción del aire), podemos tomar $k = 0$ en (1.1), con lo que se reduce a

$$mv'(t) = -mg, \quad \text{o sea,} \quad v'(t) = -g.$$

Sea $y(t)$ la función que da la posición del transbordador (en pies) $t$ segundos después de su entrada en la atmósfera. Como la aceleración es la segunda derivada de la posición, se tiene

$$y''(t) = -32.$$

Ya tenemos experiencia en hallar derivadas, pero la tarea que tenemos ante nosotros más bien parece una adivinanza: sabiendo que la segunda derivada $y''(t)$ es $-32$, ¿cuál es la función $y(t)$? Necesitamos *deshacer* la derivación. En otras palabras, dada una función $f(x)$ queremos encontrar otra función $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$. Se dice que $F$ es una **primitiva** (o **antiderivada**) de $f$.

### Ejemplo 1.1 Varias primitivas de una función

Hallar una primitiva de $f(x) = x^2$.

**Solución** La función $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ es una primitiva de $f$, ya que

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^3\right) = x^2.$$

Además, también

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^3 + 5\right) = x^2,$$

así que $G(x) = \frac{1}{3}x^3 + 5$ es otra primitiva de $f$. De hecho, para cualquier valor de la constante $c$,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^3 + c\right) = x^2.$$

Por tanto, $H(x) = \frac{1}{3}x^3 + c$ es también una primitiva de $f$, sea cual sea la constante $c$.

En general, si $F$ es una primitiva concrecta de $f$ y $c$ es cualquier constante, se cumple

$$\frac{d}{dx}[F(x) + c] = F'(x) + 0 = f(x).$$

Así, pues, $F(x) + c$ es primitiva de $f(x)$ para cualquier valor de $c$. En este momento surge una pregunta natural: ¿hay más primitivas de $f(x)$ aparte de las de la forma $F(x) + c$? No, según demuestra el próximo teorema.

**Advertencia**

El teorema 1.1 dice que dada una primitiva **cualquiera** $F$ de $f$, **toda** posible primitiva de $f$ se puede expresar como $F(x) + c$ para alguna constante $c$. Esta «primitiva general» o «familia completa de primitivas» recibe un nombre especial en la definición 1.1: integral indefinida de $f$.

**Teorema 1.1**

Si $F$ y $G$ son primitivas de $f$ en un intervalo $[a, b]$, entonces

$$G(x) = F(x) + c$$

para alguna constante $c$.

**Demostración**

Puesto que $F$ y $G$ son ambas primitivas de $f$, se tiene $G'(x) = F'(x)$. El corolario 9.1 de la sección 2.9 completa la demostración.

**Definición 1.1**

Sea $F$ una primitiva cualquiera de $f$. La **integral indefinida** de $f(x)$ (con respecto a $x$) se define como

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c,$$

donde $c$ es una constante arbitraria (la **constante de integración**).

El proceso de hallar una integral se llama **integración**. Se dice que $f(x)$ es el **integrando** y el término $dx$ identifica a $x$ como la **variable de integración**.

**Ejemplo 1.2** **Una integral indefinida**

Hallar $\int 3x^2\,dx$.

**Solución** Reconocemos a simple vista que $3x^2$ es la derivada de $x^3$, así que

$$\int 3x^2\,dx = x^3 + c.$$

**Ejemplo 1.3** **Cálculo del coeficiente en una integral indefinida**

Hallar $\int t^5\,dt$.

**Solución** Sabemos que $\frac{d}{dt}t^6 = 6t^5$, así que $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{6}t^6\right) = t^5$. Por tanto,

$$\int t^5\,dt = \frac{1}{6}t^6 + c.$$

Cada regla de derivación da lugar a una regla de integración asociada. Por ejemplo, para todo exponente racional $r$ la regla de las potencias afirma que $\frac{d}{dx} x^r = rx^{r-1}$. Análogamente, es cierto que

$$\frac{d}{dx} x^{r+1} = (r+1)x^r.$$

Esto demuestra la siguiente regla de integración.

**Nota 1.1**

El teorema 1.2 dice que para integrar una potencia de $x$ (salvo $x^{-1}$) basta aumentar el exponente en 1 y dividir entre la nueva potencia. Obviamente, esta regla no es válida para $r = -1$, ya que produciría una división entre 0. Más adelante, en esta misma sección, resolveremos este caso.

**Teorema 1.2 (Regla de las potencias)**
Para cualquier exponente racional $r \neq -1$,

$$\int x^r \, dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c. \tag{1.2}$$

**Ejemplo 1.4** **Aplicación de la regla de las potencias**

Hallar $\int x^{17} \, dx$.

**Solución** Por la regla de las potencias,

$$\int x^{17} \, dx = \frac{x^{17+1}}{17+1} + c = \frac{x^{18}}{18} + c.$$

**Ejemplo 1.5** **La regla de las potencias con exponente negativo**

Hallar $\int \frac{1}{x^3} \, dx$.

**Solución** Podemos usar la regla de las potencias si reescribimos antes el integrando.

$$\int \frac{1}{x^3} \, dx = \int x^{-3} \, dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + c = -\frac{1}{2} x^{-2} + c.$$

**Ejemplo 1.6** **La regla de las potencias con exponente racional**

Hallar (a) $\int \sqrt{x} \, dx$ y (b) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \, dx$.

**Solución** (a) Como en el ejemplo 1.5, primero reescribimos el integrando y después aplicamos la regla de las potencias.

$$\int \sqrt{x} \, dx = \int x^{1/2} \, dx = \frac{x^{1/2+1}}{1/2+1} + c = \frac{x^{3/2}}{3/2} + c = \frac{2}{3} x^{3/2} + c.$$

Nótese que la fracción $\frac{2}{3}$ del resultado final es exactamente la que hace falta para cancelar el exponente 3/2 (que bajaría al efectuar la derivada).

(b) Análogamente,

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \, dx = \int x^{-1/3} \, dx = \frac{x^{-1/3+1}}{-1/3+1} + c$$

$$= \frac{x^{2/3}}{2/3} + c = \frac{3}{2} x^{2/3} + c.$$

Puesto que $\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x$, se tiene

$$\boxed{\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + c.}$$

Una vez más, invirtiendo una fórmula de derivación, obtenemos la correspondiente fórmula de integración. La tabla presenta varias fórmulas de integración importantes, cuyas demostraciones se dejan como ejercicios, inmediatos, pero muy aconsejables. Nótese que todavía no disponemos de fórmulas de integración para varias funciones familiares: $\frac{1}{x}$, $\ln x$, $\tan x$, $\cot x$ y otras.

| | |
|---|---|
| $\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + c$ | $\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + c$ |
| $\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + c$ | $\int \operatorname{cosec} x \cot x\, dx = -\operatorname{cosec} x + c$ |
| $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + c$ | $\int e^x\, dx = e^x + c$ |
| $\int \operatorname{cosec}^2 x\, dx = -\cot x + c$ | $\int e^{-x}\, dx = -e^{-x} + c$ |

Por el momento, nos estamos limitando a invertir fórmulas de derivación conocidas. Más tarde desarrollaremos métodos de integración más sofisticados. Antes de nada, necesitamos una regla que nos permita combinar varias de la reglas básicas de integración.

**Teorema 1.3**

Supongamos que $f(x)$ y $g(x)$ tienen primitivas. Entonces, con $a$ y $b$ constantes arbitrarias,

$$\int [af(x) + bg(x)]\, dx = a \int f(x)\, dx + b \int g(x)\, dx. \tag{1.3}$$

**Demostración**

De $\frac{d}{dx}\int f(x)\, dx = f(x)$ y $\frac{d}{dx}\int g(x)\, dx = g(x)$ se sigue que

$$\frac{d}{dx}\left[a \int f(x)\, dx + b \int g(x)\, dx\right] = af(x) + bg(x),$$

que es lo que queríamos demostrar.

Gracias a este teorema, nos será fácil integrar sumas, diferencias y múltiplos constantes de funciones. Por ejemplo, la integral de una suma es igual a la suma de las integrales. Sin embargo, veremos que, en general, la integral de un producto (o de un cociente) no es igual al producto (o cociente) de las integrales.

**Ejemplo 1.7** **Integral indefinida de una suma**

Hallar $\int (3 \cos x + 4x^8)\, dx$.

**Solución**

$$\begin{aligned}\int (3 \cos x + 4x^8)\, dx &= 3 \int \cos x\, dx + 4 \int x^8\, dx \qquad \text{Usar (1.3).}\\ &= 3 \operatorname{sen} x + 4\left(\frac{1}{9}\right)x^9 + c\\ &= 3 \operatorname{sen} x + \frac{4}{9}x^9 + c.\end{aligned}$$

**Ejemplo 1.8** **Integral indefinida de una diferencia**

Hallar $\int (3e^x - 2\sec^2 x)\,dx$.

**Solución**

$$\int (3e^x - 2\sec^2 x)\,dx = 3\int e^x\,dx - 2\int \sec^2 x\,dx = 3e^x - 2\tan x + c.$$

Si conocemos la integral de una función y cambiamos en la función $x$ por $ax$, con $a$ constante, la nueva integral también es fácil de hallar. Para ver cómo, consideremos la derivada

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} 2x = 2\cos 2x,$$

donde el factor 2 proviene de la regla de la cadena. Igual que cualquier otra fórmula de derivación, ésta conduce a una regla de integración asociada, a saber:

$$\int \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + c,$$

ya que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + c\right) = \cos 2x.$$

La regla general se enuncia a continuación.

**Teorema 1.4**

Si $\int f(x)\,dx = F(x) + c$, entonces, para toda constante $a \neq 0$,

$$\int f(ax)\,dx = \frac{1}{a}F(ax) + c.$$

**Demostración**

De $\int f(x)\,dx = F(x) + c$, se sigue que $F'(x) = f(x)$. Por la regla de la cadena,

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{a}F(ax)\right] = \frac{1}{a}\frac{d}{dx}[F(ax)] = \frac{1}{a}aF'(ax) = F'(ax) = f(ax).$$

Así, pues, $\frac{1}{a}F(ax)$ es una primitiva de $f(ax)$.

Con algo más de práctica, integrales como las propuestas en el próximo ejemplo serán inmediatas.

**Ejemplo 1.9** **Integrales indefinidas de funciones de la forma $f(ax)$**

Hallar (a) $\int \operatorname{sen} 3x\,dx$, (b) $\int 5e^{4x}\,dx$ y (c) $\int 8\sec^2 5x\,dx$.

**Solución**

(a) Como $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + c$,

$$\int \operatorname{sen} 3x\,dx = -\frac{1}{3}\cos 3x + c.$$

(b) Como $\int e^x\,dx = e^x + c$,

$$\int 5e^{4x}\,dx = 5\int e^{4x}\,dx = \frac{5}{4}\,e^{4x} + c.$$

(c) Como $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$,

$$\int 8\sec^2 5x\,dx = 8\int \sec^2 5x\,dx = \frac{8}{5}\tan 5x + c.$$

---

Por la regla de las potencias sabemos cómo hallar $\int x^r\,dx$ para todo exponente racional **excepto** para $r = -1$. Para resolver este caso excepcional, recordemos de la sección 2.6 que si $x > 0$,

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}.$$

Ahora bien, $\ln|x|$ está definida para $x \neq 0$. Si $x > 0$, $\ln|x| = \ln x$, de modo que

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}.$$

Si $x < 0$, entonces $\ln|x| = \ln(-x)$, y, por tanto,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\ln|x| &= \frac{d}{dx}\ln(-x)\\ &= \frac{1}{-x}\,\frac{d}{dx}(-x) \qquad \text{Regla de la cadena,}\\ &= \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}.\end{aligned}$$

Observamos que hemos obtenido la misma derivada las dos veces. Eso demuestra el siguiente teorema.

---

**Teorema 1.5**

Para $x \neq 0$, $\dfrac{d}{dx}\ln|x| = \dfrac{1}{x}$.

---

**Ejemplo 1.10** **Derivada del logaritmo de un valor absoluto**

Para todos los $x$ tales que $\tan x \neq 0$, hallar $\dfrac{d}{dx}\ln|\tan x|$.

**Solución** Por el teorema 1.5 y la regla de la cadena,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\ln|\tan x| &= \frac{1}{\tan x}\,\frac{d}{dx}\tan x\\ &= \frac{1}{\tan x}\sec^2 x.\end{aligned}$$

---

Naturalmente, la nueva regla de derivación del teorema 1.5 lleva asociada una nueva regla de integración.

**Corolario 1.1**

Para $x \neq 0$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c.$$

Más en general, si $f(x) \neq 0$ y $f$ es derivable, de la regla de la cadena se deduce que

$$\frac{d}{dx}\ln|f(x)| = \frac{1}{f(x)}f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Esto demuestra la siguiente regla de integración.

**Corolario 1.2**

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c, \tag{1.4}$$

supuesto $f(x) \neq 0$.

**Ejemplo 1.11** **Integral indefinida de una fracción de la forma $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$**

Hallar $\displaystyle\int \frac{\sec^2 x}{\tan x}\,dx$.

**Solución** Nótese que el numerador ($\sec^2 x$) es la derivada del denominador ($\tan x$). Por (1.4),

$$\int \frac{\sec^2 x}{\tan x}\,dx = \ln|\tan x| + c.$$

Antes de cerrar la sección volviendo al transbordador espacial, queremos dejar claro que hemos desarrollado sólo unas pocas reglas de integración. Es más, a diferencia de lo ocurrido con la derivación, nunca llegaremos a disponer de reglas suficientes para todas las funciones que nos son familiares. Así, pues, será importante saber reconocer cuándo *no somos capaces* de hallar una primitiva.

**Ejemplo 1.12** **Identificación de integrales que no podemos hallar todavía**

¿Cuáles de las siguientes integrales se pueden hallar con las reglas de integración estudiadas en esta sección?

$$\text{(a)} \int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx, \quad \text{(b)} \int \sec x\,dx, \quad \text{(c)} \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx,$$

$$\text{(d)} \int \frac{x^3+1}{x}\,dx, \quad \text{(e)} \int (x+1)(x-1)\,dx \quad \text{y} \quad \text{(f)} \int x \operatorname{sen} 2x\,dx.$$

**Solución** En primer lugar, observemos que estos integrandos son algo distintos de los que hemos sabido identificar hasta ahora (es lo que ocurre las más de las veces). No obstante, los integrandos de (a), (c), (d) y (e) se pueden reescribir de manera que podamos identificar sus primitivas. Así, para (a),

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = \int x^{-2/3}\,dx = \frac{x^{-2/3+1}}{-\frac{2}{3}+1} + c = 3x^{1/3} + c.$$

En (c), se tiene $\dfrac{d}{dx}(x^2+1) = 2x$ (el numerador). Por (1.4),

$$\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \ln|x^2+1| + c = \ln(x^2+1) + c,$$

donde hemos suprimido el signo de valor absoluto porque $x^2 + 1 > 0$ para todo $x$.

En (d), efectuando la división, se obtiene

$$\int \frac{x^3 + 1}{x}\, dx = \int (x^2 + x^{-1})\, dx = \frac{1}{3}x^3 + \ln|x| + c.$$

Finalmente, en (e), si efectuamos el producto, resulta

$$\int (x + 1)(x - 1)\, dx = \int (x^2 + 1)\, dx = \frac{1}{3}x^3 - x + c.$$

Los apartados (b) y (f) requieren encontrar funciones cuyas derivadas sean sec $x$ y $x$ sen $2x$. Por el momento, no sabemos hallarlas.

Ahora que ya sabemos integrar un cierto número de funciones, regresamos al problema del transbordador que abría esta sección.

**Ejemplo 1.13** **Posición de un objeto en caída con aceleración conocida**

Si la aceleración de caída de un transbordador viene dada por $y''(t) = -32$ pies/s$^2$, hallar su función de posición $y(t)$. Suponemos que la velocidad inicial del transbordador es $y'(0) = -100$ pies/s y su posición inicial $y(0) = 100.000$ pies.

**Solución** Tenemos que deshacer dos derivadas, así que hemos de encontrar dos primitivas. En primer lugar, se tiene

$$y'(t) = \int y''(t)\, dt = \int (-32)\, dt = -32t + c.$$

Recordemos que $y'(t)$ es la velocidad, en pies/s. La constante $c$ se puede evaluar utilizando el dato de la velocidad inicial. Como

$$v(t) = y'(t) = -32t + c$$

y $v(0) = -100$, ha de ser

$$-100 = v(0) = -32(0) + c = c,$$

de modo que $c = -100$. Así, pues, la velocidad es $y'(t) = -32t - 100$. Por su parte,

$$y(t) = \int y'(t)\, dt = \int (-32t - 100)\, dt = -32\left(\frac{1}{2}t^2\right) - 100t + c$$
$$= -16t^2 - 100t + c.$$

Recordemos que $y(t)$ es la altura (en pies) a la que se encuentra el transbordador. Usando el dato de la posición inicial, se tiene

$$100.000 = y(0) = -16(0) - 100(0) + c = c.$$

Por tanto, $c = 100.000$, así que

$$y(t) = -16t^2 - 100t + 100.000.$$

No hay que olvidar que este modelo considera que la única fuerza que actúa sobre el transbordador es la gravedad (se desprecian la resistencia al aire y las fuerzas de ascenso). Por eso el resultado es desastroso (y afortunadamente, no realista). Calcule la velocidad en el momento del aterrizaje para comprender por qué.

# EJERCICIOS 4.1

1. En el texto hemos insistido en que la integral indefinida consta de *todas* las primitivas de una función dada. Para ver por qué eso es importante, suponga que conoce la fuerza $F(t)$ que actúa sobre un objeto. La segunda ley de Newton, $F = ma$, se traduce para la función posición $s(t)$ en que $a(t) = s''(t) = F(t)/m$. Para conocer $s(t)$ hay que hallar una primitiva de la función $F(t)/m$ y después una primitiva de esa primera primitiva. Pero suponga que no fuera capaz de hallar *todas* las primitivas. ¿Cómo sabría si ha encontrado la primitiva que corresponde a la función de posición? Explicar, en términos físicos, por qué es razonable esperar que haya una única primitiva que satisfaga un conjunto de condiciones iniciales dado.

2. Hemos presentado en esta sección un modelo para el vuelo de un transbordador, ignorando algunas fuerzas con el fin de simplificar la ecuación resultante. Cabe poner en cuestión este procedimiento. Sopesar las ventajas y desventajas de tener un problema realista, pero irresoluble, o resolver un modelo que es sólo parcialmente fiel. Recuerde que cuando tira un papel a la papelera no tiene en cuenta la curvatura de la Tierra.

3. Verificar que $\int xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + c$ y $\int xe^x\,dx = xe^x - e^x + c$ calculando las derivadas de las primitivas propuestas. ¿Qué reglas de derivación ha usado? ¿Por qué eso pone en duda que podamos dar con una regla general para $\int f(x)g(x)\,dx$, la primitiva de un producto?

4. Hemos advertido en el texto que todavía no disponemos de fórmulas para las primitivas de algunas funciones elementales, como $\ln x$, $\sec x$ o $\operatorname{cosec} x$. Dada una función $f(x)$, explicar qué determina que tengamos o no una fórmula sencilla para $\int f(x)\,dx$. Por ejemplo, ¿por qué la hay para $\int \sec x \tan x\,dx$ y no para $\int \sec x\,dx$?

**En los ejercicios 5-40, hallar la primitiva general.**

5. $\int 3x^4\,dx$
6. $\int 5x^2\,dx$
7. $\int (3x^4 - 3x)\,dx$
8. $\int (x^3 - 2)\,dx$
9. $\int 3\sqrt{x}\,dx$
10. $\int (4x - 2\sqrt{x})\,dx$
11. $\int \left(3 - \frac{1}{x^4}\right) dx$
12. $\int \left(2x^{-2} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$
13. $\int \frac{x^{1/3} - 3}{x^{2/3}}\,dx$
14. $\int \frac{x + 2x^{3/4}}{x^{5/4}}\,dx$
15. $\int (2 \operatorname{sen} x + \cos x)\,dx$
16. $\int (3 \cos x - \operatorname{sen} x)\,dx$
17. $\int 2 \sec x \tan x\,dx$
18. $\int 4 \operatorname{cosec}^2 x\,dx$
19. $\int 5 \sec^2 x\,dx$
20. $\int 4 \operatorname{cosec} x \cot x\,dx$
21. $\int (3e^x - 2)\,dx$
22. $\int (4x - 2e^x)\,dx$
23. $\int (3 \cos x - 1/x)\,dx$
24. $\int (2x^{-1} + \operatorname{sen} x)\,dx$
25. $\int \frac{4x}{x^2 + 4}\,dx$
26. $\int \frac{2x^3}{x^4 + 1}\,dx$
27. $\int \left(5x - \frac{3}{e^x}\right) dx$
28. $\int (2 \cos x - \sqrt{e^x})\,dx$
29. $\int 5 \operatorname{sen} 2x\,dx$
30. $\int 4 \cos 5x\,dx$
31. $\int (e^{3x} - x)\,dx$
32. $\int (4 \operatorname{sen} 3x - 1)\,dx$
33. $\int 3 \sec 2x \tan 2x\,dx$
34. $\int 3 \sec^2 3x\,dx$
35. $\int \frac{e^x}{e^x + 3}\,dx$
36. $\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\,dx$
37. $\int \frac{e^x + 3}{e^x}\,dx$
38. $\int \frac{(e^x)^2 - 2}{e^{2x}}\,dx$
39. $\int x^{1/4}(x^{5/4} - 4)\,dx$
40. $\int x^{2/3}(x^{-4/3} - 3)\,dx$

**En los ejercicios 41-52, 6 de las 12 primitivas se pueden hallar usando álgebra básica y reglas de derivación conocidas. Identificar esas seis y hallar sus primitivas.**

41. $\int \sqrt{x^3 + 4}\,dx$
42. $\int (\sqrt{x^3} + 4)\,dx$
43. $\int \frac{3x^2 - 4}{x^2}\,dx$
44. $\int \frac{x^2}{3x^2 - 4}\,dx$
45. $\int 2 \sec x\,dx$
46. $\int \sec^2 x\,dx$
47. $\int 2 \operatorname{sen} 4x\,dx$
48. $\int 2 \operatorname{sen}^4 x\,dx$
49. $\int e^{x^2}\,dx$
50. $\int (e^x)^2\,dx$
51. $\int \left(\frac{1}{x^2} - 1\right) dx$
52. $\int \frac{1}{x^2 - 1}\,dx$

53. En el ejemplo 1.12, usar un PCS para hallar las primitivas en los apartados (b) y (f). Comprobar que son correctas, calculando sus derivadas.

54. Para cada una de las integrales de los ejercicios 41-52 que no ha podido resolver, intente hallar una primitiva utilizando un PCS. Cuando sea posible, compruebe que la primitiva es correcta, calculando su derivada.

**En los ejercicios 55-60, hallar la función $f(x)$ que satisface las condiciones impuestas.**

55. $f'(x) = 4x^2 - 1, f(0) = 2$
56. $f'(x) = 4 \cos x, f(0) = 3$
57. $f'(x) = 3e^x + x, f(0) = 4$

58. $f'(x) = 3 \operatorname{sen} 2x, f(0) = 1$

59. $f''(x) = 12, f(0) = 2, f(0) = 3$

60. $f''(x) = 2x, f'(0) = -3, f(0) = 2$

**En los ejercicios 61-64, hallar todas las funciones que satisfacen las condiciones indicadas.**

61. $f''(x) = 3 \operatorname{sen} x + 4x^2$

62. $f''(x) = \sqrt{x} - 2 \cos x$

63. $f'''(x) = 4 - 2/x^3$

64. $f'''(x) = \operatorname{sen} 2x - e^x$

65. Determinar la función posición si la función velocidad es $v(t) = 3 - 12t$ y la posición inicial $s(0) = 3$.

66. Determinar la función posición si la función velocidad es $v(t) = 3e^{-t} - 2$ y la posición inicial $s(0) = 0$.

67. Hallar la función posición si la función acelerción es $a(t) = 3 \operatorname{sen} t + 1$, la velocidad inicial $v(0) = 0$ y la posición inicial $s(0) = 4$.

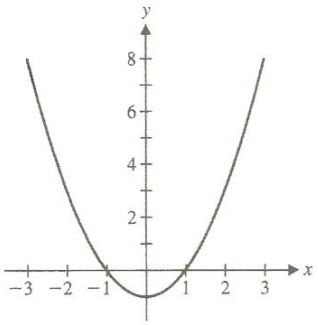
68. Hallar la función posición si la función aceleración es $a(t) = t^2 + 1$, la velocidad inicial $v(0) = 4$ y la posición inicial $s(0) = 0$.

69. Un automóvil acelera, con aceleración constante, de 30 mph a 50 mph en 4 segundos. Calcular la aceleración y la distancia recorrida en esos 4 segundos.

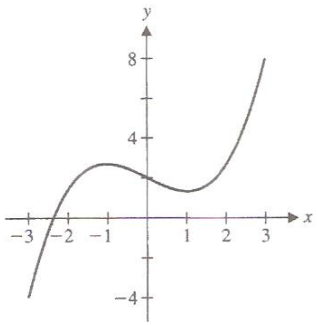
70. Un automóvil frena, con aceleración constante, de 60 mph al reposo en 3 segundos. Calcular la aceleración y la distancia recorrida en esos 3 segundos (la distancia de frenado).

**En los ejercicios 71 y 72, esbozar la gráfica de una función $f(x)$ que tenga como gráfica de su derivada $y = f'(x)$ la gráfica dada.**

71.




72.




73. Esbozar las gráficas de tres funciones, cada una de las cuales tenga la derivada dada en el ejercicio 71.

74. Repetir el ejercicio 71 suponiendo ahora que la gráfica dada es la de $f''(x)$.

75. Para el transbordador del ejemplo 1.13, calcular el instante en que toca tierra y su velocidad en ese momento. ¿Por qué dijimos que sería desastroso?

76. Deducir las fórmulas $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + c$ y $\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + c$.

77. Deducir las fórmulas $\int e^x\, dx = e^x + c$ y $\int e^{-x}\, dx = -e^{-x} + c$.

78. Calcular las derivadas de $e^{\operatorname{sen} x}$ y $e^{x^2}$ y, con ellas, hallar las integrales indefinidas $\int \cos x\, e^{\operatorname{sen} x}\, dx$ y $\int x\, e^{x^2}\, dx$. A continuación, hallar $\int x\, e^{x^2} dx$. (Ayuda: $\int x\, e^{x^2}\, dx = \frac{1}{2} \int 2x\, e^{x^2}\, dx$). Análogamente, hallar $\int x^2 e^{x^3}\, dx$ y en general

$$\int f'(x) e^{f(x)}\, dx.$$

Ahora, hallar $\int e^x \cos(e^x)\, dx$, $\int 2x \cos(x^2)\, dx$ y la más general

$$\int f'(x) \cos(f(x))\, dx.$$

Como ya hemos dicho, no hay regla general para $\int f(x) g(x)\, dx$, la primitiva de un producto. En su defecto, muchos casos particulares se pueden resolver, pero caso a caso.

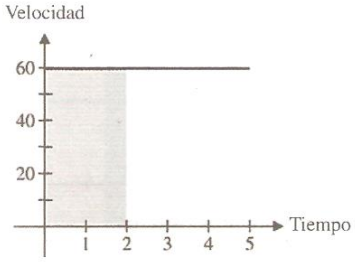



**Figura 4.1**

$y = v(t)$ en $[0, 2]$.

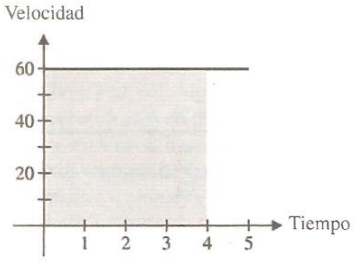



**Figura 4.2**

$y = v(t)$ en $[0, 4]$.

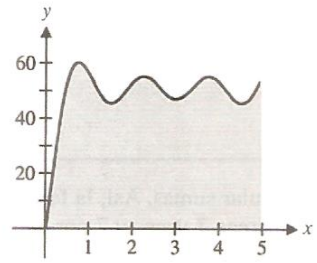



**Figura 4.3**

Velocidad no constante.

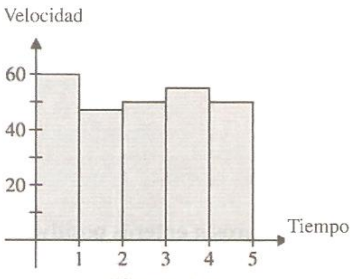



**Figura 4.4**

Área aproximada.

## 4.2 SUMAS Y NOTACION SIGMA

En la sección 4.1 hemos visto cómo reconstruir la función posición de un objeto a partir de su función aceleración. Ahora estamos interesados en estudiar ese mismo proceso gráficamente. Para facilitar esa nueva interpretación es conveniente familiarizarse con la notación que introducimos en esta sección.

Si viajamos por una autopista a 60 mph, en 2 horas habremos recorrido 120 millas y en 4 horas 240 millas. Nada sorprendente, pero vamos a interpretarlo mirando varias gráficas de la función velocidad (constante) $v(t) = 60$. En la figura 4.1 hemos sombreado el área bajo la gráfica entre $t = 0$ y $t = 2$. Esa área es 120, la distancia recorrida en ese intervalo de tiempo. En la figura 4.2, la región sombreada entre $t = 0$ y $t = 4$ tiene área 240, igual a la distancia recorrida.

Así, pues, parece que la distancia recorrida en un cierto intervalo de tiempo es igual al área de la región comprendida entre la gráfica de $y = v(t)$ y el eje $t$ sobre ese intervalo. En este caso de velocidad constante era de esperar, ya que

$$d = r \times t = \text{velocidad} \times \text{tiempo}.$$

Pero ¿cómo podríamos calcular el área bajo la curva (igual a la distancia recorrida) si la función velocidad no fuera constante, como la de la figura 4.3, en el intervalo de tiempo $[0, 5]$?

En esta sección preparamos el terreno para una técnica potente que permitirá calcular tales áreas. Para dar idea de hacia dónde nos dirigimos, cambiemos la figura 4.3 por la aproximación que muestra la figura 4.4, donde la velocidad se toma constante a intervalos de una hora.

El área entre $t = 0$ y $t = 5$ viene aproximada, en tal supuesto, por la suma de las áreas de los cinco rectángulos:

$$A \approx 60 + 45 + 50 + 55 + 50 = 260 \text{ millas}.$$

Ciertamente, esto es una aproximación grosera del área de la figura 4.3, pero nótese que irá mejorando si usamos más rectángulos cada vez más estrechos. No hay problema alguno en sumar las áreas de cinco rectángulos, pero pensando en cuando haya 5.000, es deseable tener alguna forma de simplificar la escritura y automatizar el proceso. A este fin dedicamos el resto de la sección.

Comenzamos la simplificación introduciendo una nueva notación. Supongamos que queremos sumar los cuadrados de los primeros 20 enteros positivos:

$$1 + 4 + 9 + \cdots + 400 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 20^2.$$

El esquema es claro: cada sumando es de la forma $i^2$, con $i = 1, 2, 3, \ldots, 20$. Para no escribir tanto, usamos la letra griega sigma mayúscula, $\Sigma$, como símbolo de suma y escribimos lo anterior en **notación sigma** como

$$\sum_{i=1}^{20} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 20^2,$$

para indicar que sumamos términos de la forma $i^2$, empezando con $i = 1$ y terminando en $i = 20$. La variable $i$ se llama **índice de suma**.

En general, para cualesquiera números reales $a_1, a_2, \cdots, a_n$, se tiene

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1, a_2 + \cdots + a_n.$$

### Ejemplo 2.1 Notación sigma

Expresar en notación sigma: $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{10}$ y $3^3 + 4^3 + 5^3 + \cdots + 45^3$.

**Solución** La primera es la suma de las raíces cuadradas de los enteros desde 1 hasta 10:

$$\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{10} = \sum_{i=1}^{10} \sqrt{i}$$

La segunda es la suma de los cubos de los enteros desde 3 hasta 45:

$$3^3 + 4^3 + 5^3 + \cdots + 45^3 = \sum_{i=3}^{45} i^3.$$

### Advertencia

El índice de suma es una **variable muda** que sólo se usa para etiquetar y contar los términos. El valor de la suma no depende de qué letra se utilice como índice. Por esa razón podemos usar cualquier letra. Por tradición, las más usadas son $i$, $j$, $k$, $m$ y $n$, pero cualquier otra es igualmente válida. Por ejemplo,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

### Ejemplo 2.2 Notación sigma para una suma de enteros impares

Escribir en notación sigma la suma de los primeros 200 enteros impares positivos.

**Solución** Para todo entero $i$, el entero $2i$ es par, mientras que $(2i - 1)$ y $(2i + 1)$ son impares. Por tanto,

$$1 + 3 + 5 + \cdots + 399 = \sum_{i=1}^{200} (2i - 1).$$

Alternativamente, podríamos escribir esa misma suma en la forma equivalente $\sum_{i=0}^{199} (2i + 1)$.

### Ejemplo 2.3 Cálculo de sumas dadas en notación sigma

Escribir todos los términos y calcular las sumas $\sum_{i=1}^{8} (2i + 1)$, $\sum_{i=2}^{6} \text{sen}(2\pi i)$ y $\sum_{i=4}^{10} 5$.

**Solución** Se tiene

$$\sum_{i=1}^{8} (2i + 1) = 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 = 80$$

y

$$\sum_{i=2}^{6} \text{sen}(2\pi i) = \text{sen } 4\pi + \text{sen } 6\pi + \text{sen } 8\pi + \text{sen } 10\pi + \text{sen } 12\pi = 0.$$

(Nótese que la suma empezaba en $i = 2$). Finalmente,

$$\sum_{i=4}^{10} 5 = 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 35.$$

El ejemplo 2.3 sugiere que, en ocasiones, hay atajos para calcular sumas. Así, la forma más simple de evaluar la tercera suma es darse cuenta de que 5 aparece 7 veces y 7 por 5 es 35. A continuación enunciamos esta fórmula y otras dos útiles también.

### Teorema 2.1

Si $n$ es cualquier entero positivo y $c$ cualquier constante, entonces

(i) $\sum_{i=1}^{n} c = cn$ **(suma de constantes iguales)**

(ii) $\sum_{i=1}^{n} i = \dfrac{n(n+1)}{2}$ **(suma de los primeros $n$ enteros positivos)**

(iii) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ **(suma de los cuadrados de los primeros $n$ enteros positivos)**

### Demostración

(i) $\sum_{i=1}^{n} c$ indica que estamos sumando $n$ veces la misma constante $c$, así que la suma es $n$ por $c$.

**Notas históricas**

**Carl Friedrich Gauss (1777-1855).** Matemático alemán, considerado el mejor matemático de todos los tiempos. Fue un prodigio capaz de demostrar importantes teoremas a los 14 años y llegó a dominar con maestría casi todas las ramas de las Matemáticas. Demostró el teorema fundamental del Álgebra y numerosos resultados en teoría de números y en Física matemática. Abrió nuevos campos de investigación en Análisis complejo, Estadística, Cálculo vectorial y Geometrías no euclidianas. Gauss fue en verdad el «Príncipe de las Matemáticas».

(ii) La ingeniosa demostración que sigue se atribuye a Karl Friedrich Gauss cuando tenía sólo 10 años. Puesto que en la suma

$$\sum_{i=1}^{n} i = \underbrace{1 + 2 + 3 + \ldots + (n-2) + (n-1) + n}_{n \text{ términos}} \tag{2.1}$$

el orden de los sumandos no altera el resultado, la escribimos en orden inverso:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \underbrace{n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 3 + 2 + 1}_{\text{los mismos } n \text{ términos (hacia atrás)}}. \tag{2.2}$$

Sumando las ecuaciones 2.1 y 2.2, término a término, se obtiene

$$\begin{aligned} 2\sum_{i=1}^{n} i &= (1+n) + (2+n-1) + (3+n-2) + \cdots + (n-1+2) + (n+1) \\ &= \underbrace{(n+1) + (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1) + (n+1)}_{n \text{ términos}} \\ &= n(n+1), \qquad \text{Sumar } n \text{ veces } (n+1) \end{aligned}$$

ya que $(n + 1)$ aparece $n$ veces en esa suma. Dividiendo ambos lados entre 2 se obtiene la igualdad anunciada:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2},$$

La demostración de (iii) requiere inducción y la postergamos al final de la sección.

Asimismo, es válida la siguiente regla para desarrollar sumas, cuya demostración dejamos como ejercicio.

**Teorema 2.2**

Si $c$ y $d$ son constantes arbitrarias,

$$\sum_{i=1}^{n} (ca_i + db_i) = c\sum_{i=1}^{n} a_i + d\sum_{i=1}^{n} b_i.$$

Gracias a los teoremas 2.1 y 2.2, es fácil calcular algunas sumas simples. Conviene hacer notar que nos va a costar el mismo trabajo sumar 8 términos que 800.

**Ejemplo 2.4** **Cálculo de sumas mediante los teoremas 2.1 y 2.2**

Calcular $\sum_{i=1}^{8} (2i + 1)$ y $\sum_{i=1}^{800} (2i + 1)$.

**Solución** Por los teoremas 2.1 y 2.2,

$$\sum_{i=1}^{8} (2i+1) = 2\sum_{i=1}^{8} i + \sum_{i=1}^{8} 1 = 2\,\frac{8(9)}{2} + (1)(8) = 72 + 8 = 80.$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{800} (2i+1) &= 2\sum_{i=1}^{800} i + \sum_{i=1}^{800} 1 = 2\,\frac{800(801)}{2} + (1)(800) \\ &= 640.800 + 800 = 641.600. \end{aligned}$$

**Ejemplo 2.5** **Cálculo de sumas mediante los teoremas 2.1 y 2.2**

Calcular $\sum_{i=1}^{20} i^2$ y $\sum_{i=1}^{20} \left(\frac{i}{20}\right)^2$.

**Solución** Por los teoremas 2.1 y 2.2,

$$\sum_{i=1}^{20} i^2 = \frac{20(21)(41)}{6} = 2.870$$

y

$$\sum_{i=1}^{20} \left(\frac{i}{20}\right)^2 = \frac{1}{20^2} \sum_{i=1}^{20} i^2 = \frac{1}{400} \frac{20(21)(41)}{6} = \frac{1}{400} 2.870 = 7,175.$$

Volveremos al estudio de sumas generales en el capítulo 8. Recordemos que nuestra motivación inicial para estudiar sumas era calcular la distancia recorrida a partir de la velocidad. Al comienzo de esta sección hemos aproximado la distancia sumando varios valores de la función velocidad. En la sección 4.3 analizaremos en profundidad estas sumas para evaluar áreas exactamente.

**Ejemplo 2.6** **Suma de valores de una función**

Sumar los valores de $f(x) = x^2 + 3$ evaluados en $x = 0,1$, $x = 0,2$, ..., $x = 1,0$.

**Solución** Vamos a escribir eso en notación sigma para aplicar las reglas introducidas antes. Hemos de sumar los términos $a_1 = f(0,1) = 0,1^2 + 3$, $a_2 = f(0,2) = 0,2^2 + 3$, etc. Como los valores de $x$ son múltiplos de 0,1, podemos expresarlos como $0,1i$, con $i = 1, 2, ..., 10$. En general,

$$a_i = f(0,1i) = (0,1i)^2 + 3, \text{ para } i = 1, 2, \ldots, 10.$$

Por el teorema 2.1 (i) y (iii), se tiene

$$\sum_{i=1}^{10} a_i = \sum_{i=1}^{10} f(0,1i) = \sum_{i=1}^{10} [(0,1i)^2 + 3] = 0,1^2 \sum_{i=1}^{10} i^2 + \sum_{i=1}^{10} 3$$

$$= 0,01 \frac{10(11)(21)}{6} + (3)(10) = 3,85 + 30 = 33,85.$$

**Ejemplo 2.7** **Suma de valores de una función en puntos espaciados uniformemente**

Sumar los valores de $f(x) = 3x^2 - 4x + 2$ en $x = 1,05$, $x = 1,15$, $x = 1,25$, ..., $x = 2,95$.

**Solución** Mirando atentamente los valores de $x$ vemos que la diferencia entre cada dos sucesivos es 0,1 y hay 20 valores. (Cuéntelos). Podemos expresar esos valores de $x$ como $0,95 + 0,1i$, con $i = 1, 2, ..., 20$. (Como siempre, hay otras formas de expresarlos, por ejemplo $1,05 + 0,1i$, para i = 0,1, ..., 19).

Por tanto,

$$\sum_{i=1}^{20} f(0,95 + 0,1i) = \sum_{i=1}^{20} [3(0,95 + 0,1i)^2 - 4(0,95 + 0,1i) + 2]$$

$$= \sum_{i=1}^{20} (0,03i^2 + 0,17i + 0,9075) \qquad \text{Efectuar las operaciones.}$$

$$= 0,03 \sum_{i=1}^{20} i^2 + 0,17 \sum_{i=1}^{20} i + \sum_{i=1}^{20} 0,9075 \qquad \text{Usar el teorema 2.2.}$$

$$= 0,03 \frac{20(21)(41)}{6} + 0,17 \frac{20(21)}{2} + 0,9075(20) \qquad \text{Usar el teorema 2.1 (i), (ii) y (iii).}$$

$$= 139,95.$$

En las próximas secciones, sumas del tipo de las propuestas en los ejemplos 2.6 y 2.7 jugarán un papel crucial. Terminamos esta sección con un principio matemático muy eficaz.

## Principio de inducción matemática

Para demostrar una proposición relativa a los enteros $n$ positivos, primero probamos que es cierta para un valor concreto $n = n_0$. Después **suponemos** que es verdadera para un valor $n = k \geq n_0$ no especificado (es lo que se llama **hipótesis de inducción**). Si podemos demostrar que de ahí se sigue que la proposición es cierta para $n = k + 1$, habremos demostrado la proposición para todo entero $n \geq n_0$.

Vamos a usar inducción para demostrar la última parte del teorema 2.1, a saber: que para todo entero $n$ positivo, $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Piense por qué este principio debe ser cierto. (Ayuda: Si $P_1$ es verdadera y sabemos que la veracidad de $P_k$ implica necesariamente la de $P_{k+1}$, entonces el hecho de ser cierta $P_1$ implica que lo es $P_2$, ésta a su vez implica que $P_3$ lo es y así sucesivamente).

### Demostración del teorema 2.1 (iii)

Para $n = 1$, se tiene

$$1 = \sum_{i=1}^{1} i^2 = \frac{1(2)(3)}{6},$$

como queríamos demostrar. Así, pues, la proposición es verdadera para $n = 1$. A continuación **suponemos** que

$$\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}, \qquad \text{Hipótesis de inducción.} \qquad (2.3)$$

para algún entero $k \geq 1$.

En este caso, teniendo en cuenta la hipótesis de inducción, se tiene

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} i^2 = \sum_{i=1}^{k+1} i^2 &= \sum_{i=1}^{k} i^2 + \sum_{i=k+1}^{k+1} i^2 && \text{Separar el último término.}\\
&= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 && \text{Por (2.3).}\\
&= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} && \text{Sumar las fracciones.}\\
&= \frac{(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]}{6} && \text{Factorizar } (k+1).\\
&= \frac{(k+1)[2k^2 + 7k + 6]}{6} && \text{Agrupar términos.}\\
&= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3}{6} && \text{Factorizar.}\\
&= \frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6} && \text{Reescribir los términos.}\\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, && \text{Ya que } n = k+1.
\end{aligned}$$

lo que termina la demostración.

# EJERCICIOS 4.2

1. En el texto se ha menciondo que una de las ventajas de la notación sigma es que simplifica los cálculos. Para entender mejor esa afirmación, escriba en palabras qué significa $\sum_{i=1}^{40}(2i^2 - 4i + 11)$.

2. Siguiendo con el ejercicio 1, calcule la suma $\sum_{i=1}^{40}(2i^2-4i+11)$ y describa, a su manera, cómo lo ha hecho. Detalle la descripción en palabras de cada fórmula utilizada y de su uso.

**En los ejercicios 3-6 se describe un cálculo en palabras. Traducirlo en notación sigma y calcular entonces el valor de la suma.**

3. La suma de los cuadrados de los primeros 50 enteros positivos.

4. El cuadrado de la suma de los primeros 50 enteros positivos.

5. La suma de las raíces cuadradas de los primeros 10 enteros positivos.

6. La raíz cuadrada de la suma de los primeros 10 enteros positivos.

**En los ejercicios 7-14, escribir todos los términos y calcular la suma.**

7. $\sum_{i=1}^{6} 3i^2$

8. $\sum_{i=1}^{5} (2i - 1)$

9. $\sum_{i=3}^{7} (i^2 + i)$

10. $\sum_{i=6}^{10} (4i + 2)$

11. $\sum_{i=0}^{7} (3i - 1)$

12. $\sum_{i=-1}^{5} 2i^3$

13. $\sum_{i=2}^{5} (\sqrt{i} + i)$

14. $\sum_{i=6}^{6} (i^2 + 2)$

**En los ejercicios 15-26, calcular la suma usando las reglas de suma para la notación sigma.**

15. $\sum_{i=1}^{70} (3i - 1)$

16. $\sum_{i=1}^{45} (3i - 4)$

17. $\sum_{i=1}^{40} (4 - i^2)$

18. $\sum_{i=1}^{50} (8 - i)$

19. $\sum_{i=1}^{100} (i^2 - 3i + 2)$

20. $\sum_{i=1}^{140} (i^2 + 2i - 4)$

21. $\sum_{i=1}^{200} (4 - 3i - i^2)$

22. $\sum_{i=1}^{250} (i^2 + 8)$

23. $\sum_{i=1}^{n} (i^2 - 3)$

24. $\sum_{i=1}^{n} (i^2 + 5)$

25. $\sum_{i=1}^{n} (4i^2 - i)$

26. $\sum_{i=1}^{n} (i^2 + 4i)$

**En los ejercicios 27-30, calcular la suma y el límite de la suma cuando $n \to \infty$.**

27. $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left[\left(\frac{i}{n}\right)^2 + 2\left(\frac{i}{n}\right)\right]$

28. $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left[\left(\frac{i}{n}\right)^2 - 5\left(\frac{i}{n}\right)\right]$

29. $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left[4\left(\frac{2i}{n}\right)^2 - \left(\frac{2i}{n}\right)\right]$

30. $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left[\left(\frac{2i}{n}\right)^2 + 4\left(\frac{i}{n}\right)\right]$

**En los ejercicios 31-34, calcular sumas de la forma $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ para la función dada evaluada en los valores de $x$ que se especifica, siendo $\Delta x$ la diferencia entre $x$ sucesivos.**

31. $f(x) = x^2 + 4x$; $x = 0{,}2,\ 0{,}4,\ 0{,}6,\ 0{,}8,\ 1{,}0$

32. $f(x) = 3x + 5$; $x = 0{,}4,\ 0{,}8,\ 1{,}2,\ 1{,}6,\ 2{,}0$

33. $f(x) = 4x^2 - 2$; $x = 2{,}1,\ 2{,}2,\ 2{,}3,\ 2{,}4,\ \ldots,\ 3{,}0$

34. $f(x) = x^3 + 4$; $x = 2{,}05,\ 2{,}15,\ 2{,}25,\ 2{,}35,\ \ldots,\ 2{,}95$

35. Un automóvil viaja 2 horas a 50 mph, 1 hora a 60 mph, 30 minutos a 70 mph y 3 horas a 60 mph. Calcular la distancia recorrida.

36. Un automóvil viaja 1 hora a 50 km/h, 1 hora a 40 km/h, 30 minutos a 60 km/h y 3 horas a 55 km/h. Calcular la distancia recorrida.

37. Un atleta corre 20 minutos a 15 mph, 30 minutos a 18 mph, 10 minutos a 16 mph y 40 minutos a 12 mph. Calcular la distancia recorrida.

38. Un atleta corre 20 minutos a 12 mph, 30 minutos a 14 mph, 10 minutos a 18 mph y 40 minutos a 15 mph. Calcular la distancia recorrida.

39. Probar, por inducción, que $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ para todo entero $n \geq 1$.

40. Demostrar, por inducción, que $\sum_{i=1}^{n} i^5 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$ para todo entero $n \geq 1$.

**En los ejercicios 41-44, usar las fórmulas de los ejercicios 39 y 40 para evaluar las sumas.**

41. $\sum_{i=1}^{10} (i^3 - 3i + 1)$

42. $\sum_{i=1}^{20} (i^3 + 2i)$

43. $\sum_{i=1}^{100} (i^5 - 2i^2)$

44. $\sum_{i=1}^{100} (2i^5 + 2i + 1)$

45. Demostrar el teorema 2.2.

46. En este ejercicio nos asomamos a una generalización de las sumas: las **series** (sumas infinitas). Supongamos una pelota con **coeficiente de restitución** 0,6, lo cual significa que si golpea el suelo con velocidad $v$ pies/s, rebota con velocidad $0{,}6v$. Despreciando la resistencia del aire, una pelota lanzada contra el suelo con velocidad $v$ permanecerá en el aire $v/16$ segundos antes de volver al suelo. Si una pelota se lanza contra el suelo a 60 pies/s, explicar por qué el tiempo total que pasa en el aire es $60/16 + (0{,}6)(60)/16 + (0{,}6)(0{,}6)(60)/16 + \ldots$ Parece que la pelota sigue botando un tiempo infinito. Calcule sumas de ésas con más y más términos y después calcule el límite de esas sumas. Este límite es el número de segundos que la bola está botando.

## 4.3 ÁREA

En este capítulo hemos investigado cómo hallar la distancia recorrida por un móvil cuya función velocidad es conocida. Lo hicimos en la sección 4.1 en términos de primitivas y en la 4.2 con interpretación de área. Ya es hora de ocuparnos en detalle del problema general de cálculo de áreas.

Conoce, sin duda, las fórmulas del área para rectángulos, triángulos y círculos. A fuerza de usarlas durante años, tendrá una buena intuición de qué es el área: una medida del tamaño de una región plana. Pero ¿cómo se calcula el área de una región que no sea un rectángulo, un triángulo o un círculo? Y decimos *calcular* porque, para la mayoría de las regiones, el área no se mide, sino que se calcula usando ciertas medidas de longitud y una fórmula.

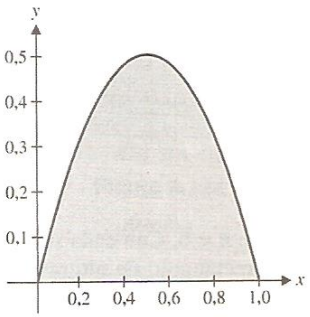



**Figura 4.5**
Área bajo $2x - 2x^2$.

El problema del cálculo de áreas es más importante de lo que puede parecer. Ejemplos obvios son el área de un campo de cultivo (¿cuánta simiente se necesita para sembrarlo?) o de un salón (¿cuánta moqueta se necesita para cubrirlo?). En la sección 4.2 vimos que también hay que calcular áreas para conocer la distancia recorrida. E interpretaremos más adelante el área como la probabilidad de un suceso aleatorio o el volumen de petróleo que fluye por un oleoducto.

Necesitamos una descripción general del área válida para calcular el área de casi cualquier región plana imaginable. Es lo que haremos en esta sección. Resulta que este proceso (que desembocará en la sección 4.4 en la noción general de *integral definida*) tiene un alcance mucho mayor que el cálculo de áreas y se convertirá en un instrumento fundamental del Cálculo, con innumerables aplicaciones.

Comenzamos la investigación del concepto de área con un ejemplo simple: vamos a intentar hallar el área comprendida entre la gráfica de $y = 2x - 2x^2$ y el eje $x$. Como $2x - 2x^2 = 0$ para $x = 0$ y $x = 1$, la región que nos interesa se extiende desde $x = 0$ hasta $x = 1$ (figura 4.5).

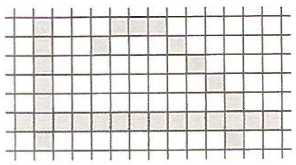


**Figura 4.6**
Gráfica de $y = 2x - x^2$ en una calculadora.

No es rectangular, triangular ni circular, así que no disponemos de fórmula para ella. Por tanto, vamos a aproximar su valor aprovechando lo que sabemos acerca del área. Después indicaremos el método para mejorar sistemáticamente la aproximación.

Solemos pensar que las calculadoras dibujan gráficas, pero en realidad lo que hacen es marcar puntos en los *píxeles* de la pantalla. Si mira la gráfica de $y = 2x - 2x^2$ en su pantalla, verá algo como la figura 4.6. (Los ordenadores tienen una resolución tan fina que los píxeles son indistinguibles a simpe vista). En la figura 4.6, cada píxel representa un cuadrado de lado 0,1. Para estimar el área, por tanto, contamos los píxeles de la región y multiplicamos por 0,01, el área de cada píxel. Intente ahora esto: cuente los píxeles que forman la curva y los de debajo de ella, pero excluyendo los del eje $x$. Contará 33, lo que da un área aproximada de 0,33.

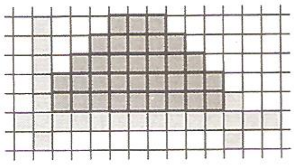


**Figura 4.7**
Contado de píxeles para aproximar el área.

Se puede simplificar el recuento revisando el problema. En la figura 4.7 hemos organizado en columnas los píxeles que nos interesan: la primera columna tiene 2 píxeles, la segunda 3, etc. El área indicada en la figura 4.5 se puede aproximar por la suma de las áreas de los rectángulos (columnas) de la figura 4.7. Cada rectángulo tiene anchura 0,1 (un píxel), pero alturas distintas. ¿Qué determina la altura de cada rectángulo? Como el píxel de más arriba representa la gráfica de $y = f(x)$, las alturas vienen dadas por los valores de la función. Por ejemplo, $f(0{,}1) = 0{,}18$ y 0,18 por redondeo da 0,2, es decir 2 píxeles, de modo que la primera columna tiene 2 píxeles de altura. Análogamente, $f(0{,}2) = 0{,}32$, así que la segunda

columna tiene 3 píxeles de altura. Salvo redondeo, cada rectángulo tiene anchura 0,1 y altura $f(x)$ para algún $x$.

El área total es, pues,

$$A = 0{,}1\,f(0{,}1) + 0{,}1\,f(0{,}2) + 0{,}1\,f(0{,}3) + \cdots + 0{,}1\,f(0{,}9) + 0{,}1\,f(1{,}0).$$

Sacando como factor común la anchura 0,1 y evaluando la función, se tiene

$$A = (0{,}18 + 0{,}32 + 0{,}42 + 0{,}48 + 0{,}5 + 0{,}48 + 0{,}42 + 0{,}32 + 0{,}18 + 0)(0{,}1) = 0{,}33.$$

Veremos más tarde que el área exacta es 1/3, de modo que la aproximación es muy buena.

¿Cómo podemos mejorar la aproximación? Gráficamente, es claro que cuanto menor sea el tamaño de los píxeles, mayor es la resolución de la gráfica. Lo mismo es cierto desde el punto de vista computacional. En general, cuantos más rectángulos se usen, mejor será la aproximación del área. En consecuencia, tiene sentido pensar que el área real es el límite de esas aproximaciones cuando el número de rectángulos tiende a infinito. Las definiciones que siguen precisan esta idea.

El problema general es estimar el área comprendida entre la gráfica de $y = f(x)$ y el eje $x$, en $a \le x \le b$. De momento suponemos $f(x) \ge 0$ y $f$ continua en el intervalo $[a, b]$, como indica la figura 4.8.

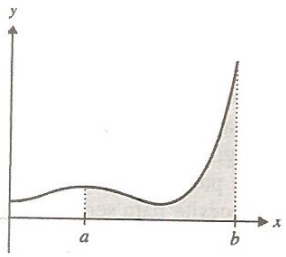



**Figura 4.8**

Área bajo $y = f(x)$.

Empezamos partiendo el intervalo $[a, b]$ en $n$ trozos iguales. (Es lo que se llama una **partición regular** de $[a, b]$ y equivale a marcar las cotas de los píxeles). La anchura de cada subintervalo, que es $\dfrac{b-a}{n}$, la denotamos por $\Delta x$ (interpretable como un pequeño cambio en $x$). Los puntos de la partición se denotan por $x_0 = a$, $x_1 = x_0 + \Delta x$, $x_2 = x_1 + \Delta x$, y así sucesivamente. En general,

$$x_i = x_0 + i\,\Delta x, \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n.$$

(Piense en esto un momento). La figura 4.9 ilustra una partición con $n = 6$. Con cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ para $i = 1, 2, \ldots, n$) como base construimos un rectángulo de altura $f(x_i)$ (el valor de $f$ en el extremo derecho del subintervalo), como ilustra la figura 4.10 para el caso $n = 4$.

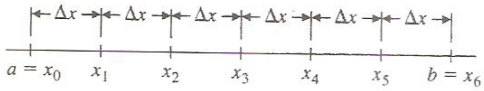



**Figura 4.9**

Partición regular de $[a, b]$.

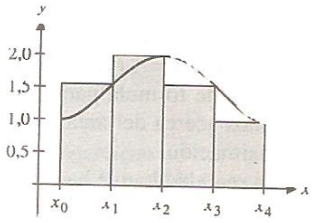



**Figura 4.10**

$A \approx A_4$.

Es claro que el área $A$ bajo la curva es aproximadamente igual a la suma de las áreas de los cuatro rectángulos:

$$A \approx f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + f(x_3)\,\Delta x + f(x_4)\,\Delta x = A_4.$$

En particular, aunque dos de los rectángulos contienen un área mayor que la curva y otros dos menor, la suma total da una aproximación razonable del área bajo la curva. Más en general, si construimos $n$ rectángulos de igual anchura en el intervalo $[a, b]$, entonces

$$\begin{aligned} A &\approx f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \ldots + f(x_n)\,\Delta x \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = A_n. \end{aligned} \tag{3.1}$$

### Ejemplo 3.1 Aproximación del área por rectángulos

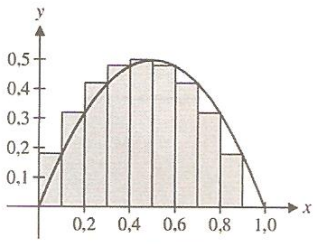



**Figura 4.11**

$A \approx A_{10}$.

Aproximar el área bajo la curva $y = f(x) = 2x - 2x^2$ en el intervalo [0, 1], usando 10 rectángulos.

**Solución** La partición divide el intervalo en 10 subintervalos de anchura $\Delta x = 0{,}1$, a saber: [0, 0,1], [0,1, 0,2], ..., [0,9, 1.0]. La figura 4.11 muestra un rectángulo de altura $f(x_i)$ sobre cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, para $i = 1, 2, ..., 10$. La suma de las áreas de esos 10 rectángulos proporciona una aproximación del área de la región bajo la curva, es decir,

$$\begin{aligned} A \approx A_{10} &= \sum_{i=1}^{10} f(x_i)\,\Delta x \\ &= [f(0{,}1) + f(0{,}2) + \cdots + f(1{,}0)](0{,}1) \\ &= (0{,}18 + 0{,}32 + 0{,}42 + 0{,}48 + 0{,}5 + 0{,}48 + 0{,}42 + 0{,}32 + 0{,}18 + 0)(0{,}1) \\ &= 0{,}33. \end{aligned}$$

Esto ya suena familiar, porque es la misma estimación del área de la figura 4.5 que obtuvimos antes.

### Ejemplo 3.2 Mejor aproximación usando más rectángulos

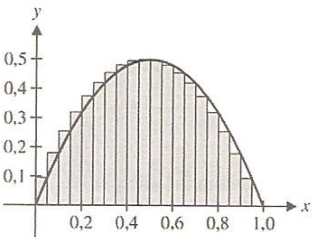



**Figura 4.12a**

$A \approx A_{20}$.

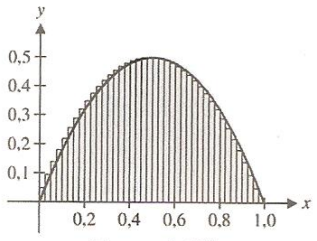



**Figura 4.12b**

$A \approx A_{40}$.

| $n$ | $A_n$ |
|---|---|
| 10 | 0,33 |
| 20 | 0,3325 |
| 30 | 0,332963 |
| 40 | 0,333125 |
| 50 | 0,3332 |
| 60 | 0,333241 |
| 70 | 0,333265 |
| 80 | 0,333281 |
| 90 | 0,333292 |
| 100 | 0,3333 |

Repetir el ejemplo 3.1 con $n = 20$.

**Solución** Ahora partimos el intervalo [0, 1] en 20 subintervalos, cada uno de ellos de anchura

$$\Delta x = \frac{1 - 0}{20} = \frac{1}{20} = 0{,}05.$$

Por tanto, $x_0 = 0$, $x_1 = 0 + \Delta x = 0{,}05$, $x_2 = x_1 + \Delta x = 2(0{,}05)$, y así sucesivamente, de modo que $x_i = (0{,}05)i$, con $i = 0, 1, 2, ..., 20$. Por (3.1), el área es aproximadamente

$$\begin{aligned} A \approx \sum_{i=1}^{20} f(x_i)\,\Delta x &= \sum_{i=1}^{20} (2x_i - 2x_i^2)\,\Delta x \\ &= \sum_{i=1}^{20} 2[0{,}05i - (0{,}05i)^2](0{,}05) = 0{,}3325, \end{aligned}$$

donde los detalles del cálculo se dejan al cuidado del lector. Las figuras 4.12 muestran aproximaciones con 20 y 40 rectángulos, respectivamente.

Las figuras 4.11, 4.12a y 4.12b sugieren que cuanto mayor sea $n$, mejor es la aproximación $A_n$ del área. La faceta negativa de este procedimiento es lo costoso que se va haciendo el cálculo de $A_n$ para $n$ muy grande. Ahora bien, un PCS o una calculadora programable evalúan esas sumas con toda rapidez. La tabla del margen muestra varios valores de $A_n$.

Observamos que al crecer $n$, el valor de $A_n$ parece tender a $\frac{1}{3}$.

Los ejemplos 3.1 y 3.2 ofrecen fuerte evidencia de que un número mayor de rectángulos en la partición mejora la aproximación del área. Esta idea conduce a la siguiente definición.

### Definición 3.1

Sea $f$ una función definida y continua en el intervalo $[a, b]$, con $f(x) \geq 0$ para todo $x$ en $[a, b]$. El **área $A$ bajo la curva** $y = f(x)$ en $[a, b]$ se define como

$$A = \lim_{x \to \infty} A_n = \lim_{x \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x. \qquad (3.2)$$

En el ejemplo que sigue utilizamos la definición (3.2), en términos de límites, para calcular el área exacta bajo la curva de los ejemplos 3.1 y 3.2.

### Ejemplo 3.3 Cálculo exacto de un área

Calcular el área bajo la curva $y = f(x) = 2x - 2x^2$ en el intervalo $[0, 1]$.

**Solución** Con una partición en $n$ subintervalos se tiene

$$\Delta x = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$$

y, por tanto, $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{n}$, $x_2 = x_1 + \Delta x = \frac{2}{n}$, y así sucesivamente. Es decir, $x_i = \frac{i}{n}$, con $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Por (3.1), el área es aproximadamente

$$A \approx A_n = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n} \left[2\frac{i}{n} - 2\left(\frac{i}{n}\right)^2\right]\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[2\left(\frac{i}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right)\right] - \sum_{i=1}^{n} \left[2\left(\frac{i^2}{n^2}\right)\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$= \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i - \frac{2}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$= \frac{2}{n^2}\,\frac{n(n+1)}{2} - \frac{2}{n^3}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \text{Usar el teorema 2.1 (ii) y (iii).}$$

$$= \frac{n+1}{n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{3n^2}$$

$$= \frac{(n+1)(n-1)}{3n^2}.$$

(Complete los detalles algebraicos del último paso). Como hemos encontrado una fórmula general para $A_n$, nos resulta fácil hallar valores de $A_n$. Así,

$$A_{200} = \frac{(201)(199)}{3(40.000)} = 0{,}333325,$$

$$A_{500} = \frac{(501)(499)}{3(250.000)} = 0{,}333332$$

Finalmente, calculamos el límite de $A_n$ cuando $n \to \infty$:

$$\lim_{x\to\infty} A_n = \lim_{x\to\infty} \frac{n^2-1}{3n^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - 1/n^2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Concluimos que el área exacta sombreada en la figura 4.5 es 1/3, como ya sospechábamos.

### Ejemplo 3.4 Estimación del área bajo una curva

Hallar el área bajo la curva $y = f(x) = \sqrt{x+1}$ en el intervalo $[1, 3]$.

**Solución** En este caso,

$$\Delta x = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}$$

y $x_0 = 1$, luego

$$x_1 = x_0 + \Delta x = 1 + \frac{2}{n},$$

$$x_2 = 1 + 2\left(\frac{2}{n}\right),$$

y así sucesivamente, es decir,

$$x_i = 1 + \frac{2i}{n}, \text{ para } i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Así, pues, de (3.1) se sigue que

$$A \approx A_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i + 1}\,\Delta x$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left(1 + \frac{2i}{n}\right) + 1}\left(\frac{2}{n}\right)$$

$$= \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{2 + \frac{2i}{n}}$$

| $n$ | $A_n$ |
|---|---|
| 10 | 3,50595 |
| 50 | 3,45942 |
| 100 | 3,45357 |
| 500 | 3,44888 |
| 1.000 | 3,44830 |
| 5.000 | 3,44783 |

En seguida nos damos cuenta de que no disponemos de fórmulas análogas a las del teorema 2.1 para simplificar esta suma (a diferencia de lo ocurrido en el ejemplo 3.3). Sólo nos queda la posibilidad de calcular $A_n$ para unos cuantos valores de $n$. Con un PCS o una calculadora programable es fácil obtener la tabla del margen. Aunque no podemos calcular el área exacta (todavía), es razonable dar como valor aproximado 3,4478.

Hacemos un alto para definir algunos de los términos matemáticos que van apareciendo.

**Definición 3.2**

Sea $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición regular del intervalo $[a, b]$ con $x_i - x_{i-1} = \Delta x = \dfrac{b-a}{n}$, para todo $i$. Tomemos puntos $c_1, c_2, \ldots, c_n$, donde $c_i$ es cualquier punto del subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, para $i = 1, 2, \ldots, n$. (Estos puntos se llaman **puntos de evaluación**). La **suma de Riemann** para esa partición y esos puntos de evaluación es

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x.$$

Antes hemos definido el área bajo la gráfica de $y = f(x)$, donde $f$ es una función continua y no negativa, como el límite de las sumas de Riemann:

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x, \tag{3.3}$$

donde $c_i = x_i$, para $i = 1, 2, \ldots, n$. Sorprendentemente, para una función continua $f$, el límite en (3.3) tiene el mismo valor para **cualquier elección** de los puntos de evaluación $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ (aunque la demostración cae fuera del nivel de este curso). En los ejemplos 3.3 y 3.4 tomamos como puntos de evaluación $c_i = x_i$ para cada $i$ (los extremos de la derecha de cada subintervalo). Suele ser la elección más conveniente para calcular a mano, pero **no** siempre produce aproximaciones particularmente buenas.

**Nota 3.1**

Por lo general, no podemos calcular, al menos directamente, el límite de sumas de Riemann de (3.3). Ahora bien, siempre podemos hallar una buena aproximación del área calculando valores de las sumas

**Notas históricas**

**Bernhard Riemann (1826-1866).** Matemático alemán que generalizó el concepto de integral. Murió todavía joven y sin haber publicado apenas, pero cada uno de sus trabajos ha ejercido una influencia extraordinaria. Su contribución a la integración formaba parte de un trabajo sobre las series de Fourier. Presionado por Gauss para dar una conferencia sobre Geometría, desarrolló su propia Geometría, que generaliza tanto la euclidiana como las no euclidianas. En su obra estableció frecuentes nexos entre el Análisis y la Geometría.

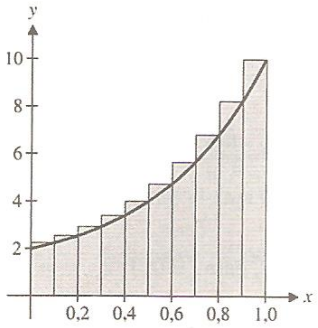



**Figura 4.13a**

$c_i = x_i$.

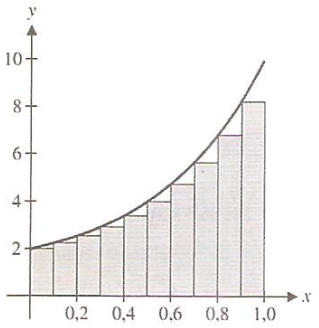



**Figura 4.13b**

$c_i = x_{i-1}$.

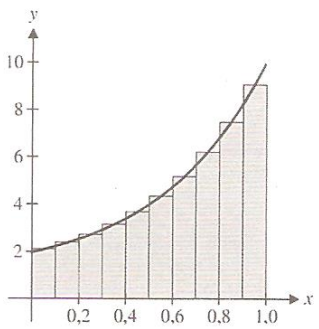



**Figura 4.13c**

$c_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$.

de Riemann con $n$ grandes. Las elecciones más comunes para los puntos $c_i$ de evaluación son $x_i$ (el extremo derecho), $x_{i-1}$ (el extremo izquierdo) y $\frac{1}{2}(x_i + x_{i-1})$ (el punto medio). Muchas veces, el punto medio produce mejor aproximación que los otros dos. Las figuras 4.13 muestran esas tres elecciones para $f(x) = 9x^2 + 2$ en el intervalo [0, 1], con $n = 10$. Nótese que en este caso (igual que para cualquier otra función creciente) los rectángulos con evaluación en el extremo derecho (figura 4.13a) dan más área de la debida y los rectángulos con evaluación en el extremo izquierdo (figura 4.13b) dan menos área de la debida. Piense en funciones decrecientes y verá que ocurre justo lo contrario.

## Ejemplo 3.5 Sumas de Riemann con puntos de evaluación distintos

Evaluar las sumas de Riemann de $f(x) = \sqrt{x + 1}$ en el intervalo [1, 3], para $n = 10$, 50, 100, 500, 1.000 y 5.000, usando como puntos de evaluación el extremo izquierdo, el extremo derecho y el punto medio de cada subintervalo.

**Solución** Los números de la tabla se han hallado programando una calculadora. Compruébelos con un PCS (redondear a seis dígitos).

| $n$ | Extremo izquierdo | Punto medio | Extremo derecho |
|---|---|---|---|
| 10 | 3,38879 | 3,44789 | 3,50595 |
| 50 | 3,43598 | 3,44772 | 3,45942 |
| 100 | 3,44185 | 3,44772 | 3,45357 |
| 500 | 3,44654 | 3,55772 | 3,44888 |
| 1.000 | 3,44713 | 3,44772 | 3,44830 |
| 5.000 | 3,44760 | 3,44772 | 3,44783 |

Podemos sacar varias conclusiones a la vista de la tabla. En primer lugar, hay evidencia de que los tres conjuntos de números convergen a un límite común, próximo a 3,4477. El límite es, como ya hemos anunciado, independiente de los puntos de evaluación elegidos. Y en segundo lugar, aunque el límite es el mismo en los tres casos, los ritmos con los que se acercan al valor límite son diferentes. Puede comprobar, usando valores aún mayores de $n$, que las sumas con evaluación en los extremos siguen acercándose hacia 3,44772.

En general, las sumas de Riemann con evaluación en el punto medio tienden al límite más deprisa que las otras dos. Si piensa en los rectángulos asociados a cada elección, comprenderá la razón.

Además, las sumas del ejemplo 3.5 con evaluación en los extremos tienden al límite por exceso y por defecto, y ambas con un ritmo de convergencia muy parecido. Aprovecharemos este hecho en la técnica de aproximación conocida como regla de los trapecios (sección 4.7). Si su PCS o su calculadora gráfica no tiene un comando para calcular sumas de Riemann, le sugerimos escribir un programa por su cuenta.

# EJERCICIOS 4.3

1. Se puede demostrar que, para muchas funciones, el límite de las sumas de Riemann es independiente de la elección de los puntos de evaluación. Comente por qué es un resultado más bien sorprendente. Para hacerlo más creíble, considere una función continua $f(x)$. Si tomamos particiones con más puntos cada vez y con la anchura de los subintervalos cada vez más pequeña, explicar por qué la diferencia entre los valores de $f(x)$ en dos puntos cualesquiera de un subintervalo concreto debe disminuir.

2. Los rectángulos no son las únicas formas geométricas con fórmulas del área conocidas. Discutir cómo se aproximaría el área bajo una parábola usando círculos o triángulos. ¿Cuál de las tres formas es la más fácil de usar?

**En los ejercicios 3-10, (a) hacer la lista de los puntos de evaluación correspondientes al punto medio de cada subintervalo, (b) esbozar una gráfica de la función y de los rectángulos aproximantes y (c) evaluar la suma de Riemann.**

3. $f(x) = x^2 + 1$, $[0, 1]$, $n = 4$
4. $f(x) = x^2 + 1$, $[0, 2]$, $n = 4$
5. $f(x) = x^3 - 1$, $[1, 2]$, $n = 4$
6. $f(x) = x^3 - 1$, $[1, 3]$, $n = 4$
7. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $[0, \pi]$, $n = 4$
8. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $[0, \pi]$, $n = 8$
9. $f(x) = 4 - x^2$, $[-1, 1]$, $n = 4$
10. $f(x) = 4 - x^2$, $[-3, -1]$, $n = 4$

**En los ejercicios 11-26, aproximar el área bajo la curva en el intervalo indicado, usando $n$ rectángulos y la regla de evaluación que se especifica.**

11. $y = x^2$ en $[0, 1]$, $n = 8$, punto medio
12. $y = x^2$ en $[0, 1]$, $n = 8$, extremo derecho
13. $y = x^2$ en $[-1, 1]$, $n = 8$, extremo izquierdo
14. $y = x^2$ en $[-1, 1]$, $n = 8$, punto medio
15. $y = \sqrt{x + 2}$ en $[1, 4]$, $n = 8$, punto medio
16. $y = \sqrt{x + 2}$ en $[1, 4]$, $n = 8$, extremo derecho
17. $y = e^{-2x}$ en $[-1, 1]$, $n = 16$, extremo izquierdo
18. $y = e^{-2x}$ en $[-1, 1]$, $n = 16$, punto medio.
19. $y = \cos x$ en $[0, \pi/2]$, $n = 50$, punto medio
20. $y = \cos x$ en $[0, \pi/2]$, $n = 100$, extremo derecho
21. $y = 3x - 2$ en $[1, 4]$, $n = 4$, punto medio
22. $y = 3x - 2$ en $[1, 4]$, $n = 40$, punto medio
23. $y = x^3 - 1$ en $[1, 3]$, $n = 100$, punto medio
24. $y = x^3 - 1$ en $[1, 3]$, $n = 100$, extremo derecho
25. $y = x^3 - 1$ en $[-1, 1]$, $n = 100$, extremo izquierdo
26. $y = x^3 - 1$ en $[-1, 1]$, $n = 100$, extremo derecho

**En los ejercicios 27-30, elaborar una tabla de sumas de Riemann análoga a la del ejemplo 3.5 para mostrar que las sumas con evaluación en el extremo derecho, en el punto medio o en el extremo izquierdo convergen al mismo valor cuando $n \to \infty$.**

27. $f(x) = 4 - x^2$, $[-2, 2]$
28. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $[0, \pi/2]$
29. $f(x) = x^3 - 1$, $[1, 3]$
30. $f(x) = x^3 - 1$, $[-1, 1]$

**En los ejercicios 31-34, usar el límite de sumas de Riemann para calcular el área exacta bajo la curva.**

31. $y = x^2 + 2$ en $[0, 1]$
32. $y = x^2 + 3x$ en $[0, 1]$
33. $y = 2x^2 + 1$ en $[1, 3]$
34. $y = 4x + 2$ en $[1, 3]$

**En los ejercicios 35-40, usar los valores de la función para estimar el área bajo la curva, tomando como puntos de evaluación los extremos de la izquierda y los extremos de la derecha.**

35.

| $x$ | 0,0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 2,0 | 2,4 | 2,6 | 2,7 | 2,6 | 2,4 | 2,0 | 1,4 | 0,6 |

36.

| $x$ | 0,0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 3,0 | 2,2 | 1,6 | 0,7 | 0,6 | 0,4 | –0,2 | 0,4 | 0,6 |

37.

| $x$ | 0,0 | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 1,0 | 1,2 | 1,4 | 1,6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1,0 | 1,4 | 2,1 | 2,7 | 2,6 | 2,8 | 3,0 | 3,4 | 3,6 |

38.

| $x$ | 0,0 | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 1,0 | 1,2 | 1,4 | 1,6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 2,0 | 2,2 | 1,6 | 1,4 | 1,6 | 2,0 | 2,2 | 2,4 | 2,0 |

39.

| $x$ | 1,0 | 1,1 | 1,2 | 1,3 | 1,4 | 1,5 | 1,6 | 1,7 | 1,8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1,8 | 1,4 | 1,1 | 0,7 | 1,2 | 1,4 | 1,8 | 2,4 | 2,6 |

40.

| $x$ | 1,0 | 1,2 | 1,4 | 1,6 | 1,8 | 2,0 | 2,2 | 2,4 | 2,6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0,0 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 1,2 | 1,4 | 1,2 | 1,4 | 1,0 |

**En los ejercicios 41-44, determinar gráficamente si una suma de Riemann con evaluación en (a) el extremo izquierdo, (b) el punto medio, (c) el extremo derecho dará un valor aproximado por exceso o por defecto del área bajo la gráfica de $y = f(x)$ en $[a, b]$.**

41. $f(x)$ es creciente y cóncava hacia arriba en $[a, b]$.

42. $f(x)$ es creciente y cóncava hacia abajo en $[a, b]$.

43. $f(x)$ es decreciente y cóncava hacia arriba en $[a, b]$.

44. $f(x)$ es decreciente y cóncava hacia abajo en $[a, b]$.

45. Por prueba y error, hallar puntos de evaluación para $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0, 1]$, con $n = 2$, tales que la suma de Riemann sea igual a 1/3 el valor exacto del área.

46. Por prueba y error, hallar puntos de evaluación para $f(x) = \sqrt{x}$ en el intervalo $[0, 1]$, con $n = 2$, tales que la suma de Riemann sea igual a 2/3 el valor exacto del área.

47. Probar que con evaluación en los extremos de la derecha en el intervalo $[a, b]$, con subintervalos de anchura $\Delta x = (b - a)/n$, los puntos de evaluación son $c_i = a + i\,\Delta x$, con $i = 1, 2, \ldots, n$.

48. Probar que con evaluación en los extremos de la izquierda en el intervalo $[a, b]$, con subintervalos de anchura $\Delta x = (b - a)/n$, los puntos de evaluación son $c_i = a + (i - 1)\,\Delta x$, con $i = 1, 2, \ldots, n$.

49. En los ejercicios 47 y 48, hallar una expresión general para los puntos de evaluación con evaluación en el punto medio.

50. En los ejercicios 47 y 48, hallar una expresión general para los puntos de evaluación situados a doble distancia del extremo derecho que del izquierdo.

51. Representar la función $f(x) = e^{-x^2}$. Esta curva, en forma de «campana», es fundamental en Estadística. Definimos la **función área** $g(t)$ como el valor del área comprendida entre esa gráfica y el eje $x$, desde $x = 0$ hasta $x = t$ $(t > 0)$. Hacer un esbozo de las áreas que representan $g(1)$ y $g(2)$ y argumentar que $g(2) > g(1)$. Explicar por qué $g(t)$ es creciente y, en consecuencia, $g'(t) > 0$ para $t > 0$. Argumentar además que $g'(2) < g'(1)$. Explicar por qué $g'(t)$ es una función decreciente. Así, pues, $g'$ tiene las mismas propiedades (positiva, decreciente) que $f$. De hecho, descubriremos en la sección 4.5 que $g' = f$. Con el fin de acumular alguna evidencia en ese sentido, estimar $g(2)$, $g(1{,}1)$, $g(1{,}01)$ y $g(1)$ mediante sumas de Riemann. Usando esos valores, estimar $g'(1)$ y compararlo con $f(1)$.

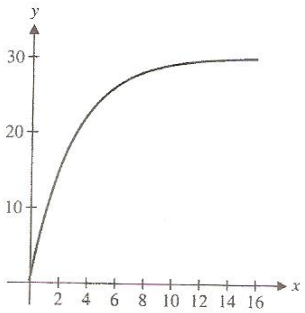



**Figura 4.14a**

$y = f(x)$.

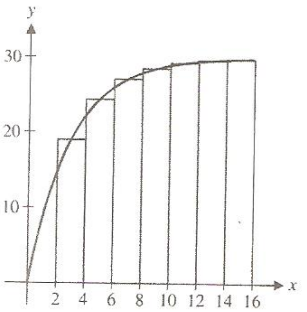



**Figura 4.14b**

Área aproximada.

## 4.4 LA INTEGRAL DEFINIDA

Ya hemos considerado el problema de reconstruir la distancia a partir de una función velocidad dada. Por ejemplo, un paracaidista que salta de un avión, con velocidad vertical nula, y cae en caída libre, va aumentando su velocidad hasta llegar a una cierta velocidad máxima. Es la *velocidad terminal*, a la cual la resistencia del aire cancela la fuerza de la gravedad. Una función con esas propiedades es $f(x) = 30(1 - e^{-x/3})$ (figura 4.14a), que sirve como modelo para la velocidad (vertical) $x$ segundos después del salto.

Como hemos discutido en la sección 4.2, el área bajo esta curva en el intervalo $0 \le x \le t$ da la distancia vertical recorrida en los primeros $t$ segundos. En un intervalo dado (o sea, para un valor de $t$ dado), podemos aproximar esa área partiendo el intervalo en $n$ subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, todos de igual anchura, $\Delta x$. Sobre cada subintervalo construimos un rectángulo de altura $f(c_i)$, para cualquier elección de $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ (figura 4.14b). Finalmente, sumando las áreas de esos rectángulos, obtenemos la aproximación del área

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x.$$

Además, hemos observado que el área exacta viene dada por el límite de esas sumas de Riemann.

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x. \qquad (4.1)$$

Nótese que la suma en (4.1) tiene sentido aunque algunos de (o todos) los valores $f(c_i)$ sean negativos.

En el caso general, con valores positivos y negativos de $f$, hacemos la siguiente definición.

### ¡Atención!

La letra elegida para representar la variable de integración es irrelevante, ya que el valor de la integral es un número real, no una función de $x$. Tras el cálculo de la integral, la $x$ desaparece. Por eso se dice que la variable de integración es una **variable muda**.

### Nota 1.1

La definición 4.1 se aplica a cualquiera de las funciones que aparezcan en este libro (funciones continuas excepto en un número finito de puntos de discontinuidad). Para funciones más generales hay que extenderla incluyendo particiones con subintervalos de longitudes no idénticas. En el Capítulo 13 se puede ver una definición suficientemente generalizada.

### Advertencia

Si $f$ es continua y $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{Área bajo la curva} \geq 0.$$

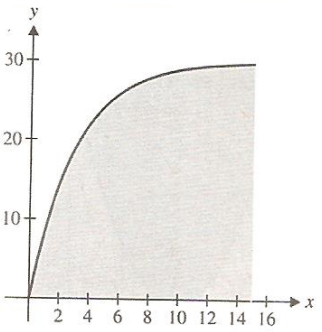



**Figura 4.15**

$y = 30(1 - e^{-x/3})$.

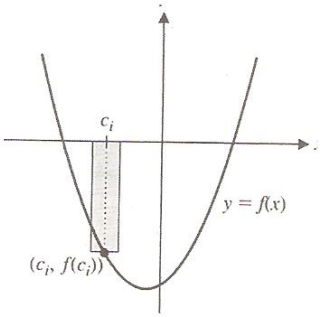



**Figura 4.16**

$f(c_i) < 0$.

### Definición 4.1

La **integral definida** de $f$ entre $a$ y $b$ es

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x$$

para cualquier función $f$ definida en $[a, b]$ para la que ese límite exista y sea el mismo para toda elección de los puntos de evaluación, $c_1, c_2, \ldots, c_n$. En tal caso, se dirá que $f$ es **integrable** en $[a, b]$. Se llama a $f(x)$ el **integrando** de la integral definida.

Vamos a aclarar la notación de la integral. En la suma de Riemann, la letra griega $\Sigma$ indica una suma y lo mismo hace la «S» alargada $\int$ que se usa como signo integral. (Tal vez haya visto alguna «S» escrita así en documentos antiguos).

Los **límites inferior** y **superior de integración**, $a$ y $b$, respectivamente, indican los extremos del intervalo de integración, que en la suma de Riemann no aparecen explícitos. El $dx$ de la integral corresponde al incremento $\Delta x$ en las sumas de Riemann y además recuerda cuál es la variable de integración.

Volviendo al ejemplo del paracaidista en caída libre del comienzo de la sección, la integral definida $\int_0^{15} 30(1 - e^{-t/3})\,dt$ representa la distancia caída en los primeros 15 segundos. ¿Cómo podemos calcular esta distancia? Por ahora, tenemos dos opciones. Si la función es muy simple (un polinomio de grado 2 a lo sumo) podemos calcular la suma de Riemann algebraicamente y hallar el límite para $n \to \infty$. En caso contrario, podemos calcular numéricamente varias sumas de Riemann y aproximar el valor del límite. Para ello se suele usar la **regla del punto medio**, que toma los puntos medios como puntos de evaluación para las sumas de Riemann.

### Ejemplo 4.1 Aproximación de una integral definida por la regla del punto medio

Estimar, usando la regla del punto medio, la integral $\int_0^{15} 30(1 - e^{-x/3})\,dx$.

**Solución** La integral da el área bajo la curva de la figura 4.15. (Corresponde a la distancia caída por el paracaidista). La regla del punto medio utiliza sumas de Riemann con evaluación en el punto medio de cada subintervalo:

$$\int_0^{15} 30(1 - e^{-x/3})\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x = 30 \sum_{i=1}^{n} (1 - e^{-c_i/3})\left(\frac{15 - 0}{n}\right).$$

donde $c_i = \dfrac{x_i + x_{i-1}}{2}$. Con un PCS se pueden obtener las aproximaciones de la tabla.

| $n$ | $R_n$ |
|---|---|
| 10 | 361,5 |
| 20 | 360,8 |
| 50 | 360,6 |
| 100 | 360,6 |

Entre las decisiones a tomar en este problema están cuántos dígitos conservar y cuándo detenerse con $n$. Si lo que queremos es saber la distancia caída por el paracaidista (en pies), un decimal puede ser suficiente, quizá incluso excesivo. En tal caso, basta aumentar $n$ hasta que parece claro que 361 pies es una aproximación razonable.

Pensemos un momento en la definición 4.1. ¿Admite ese límite interpretación como área cuando $f$ toma valores positivos y negativos en $[a, b]$? Nótese que si $f(c_i) < 0$ para algún $i$, la altura del rectángulo de la figura 4.16 es $-f(c_i)$, por lo que

$$f(c_i)\,\Delta x = -\text{ Área del } i\text{-ésimo rectángulo.}$$

Para ver el efecto que esto tiene sobre la suma, consideremos el siguiente ejemplo.

### Ejemplo 4.2 Una suma de Riemann para una función con valores positivos y negativos

Interpretar en términos de área $\lim_{x \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x$ para $f(x) = \text{sen } x$ en $[0, 2\pi]$.

**Solución** Tomamos como $c_i$ el punto medio de $[x_{i-1}, x_i]$, con $i = 1, 2, \ldots, n$. La figura 4.17a muestra 10 rectángulos así construidos entre el eje $x$ y la curva $y = f(x)$.

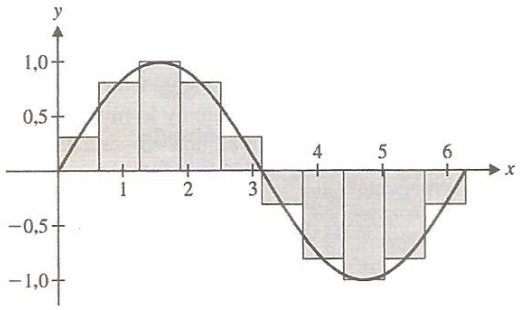



**Figura 4.17a**
Diez rectángulos.

Los primeros cinco rectángulos [donde $f(c_i) > 0$] están sobre el eje $x$ y tienen altura $f(c_i)$. Los cinco restantes [donde $f(c_i) < 0$] están bajo el eje $x$ y tienen altura $-f(c_i)$. Así, pues,

$$\sum_{i=1}^{10} = f(c_i)\,\Delta x = (\text{Área de los rectángulos sobre el eje } x) - (\text{Área de los rectánguos bajo el eje } x)$$

Las figuras 4.17b y 4.17c muestran 20 y 40 rectángulos, respectivamente, construidos del mismo modo. De todo ello se deduce que

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x = (\text{Área sobre el eje } x) - (\text{Área bajo el eje } x)$$

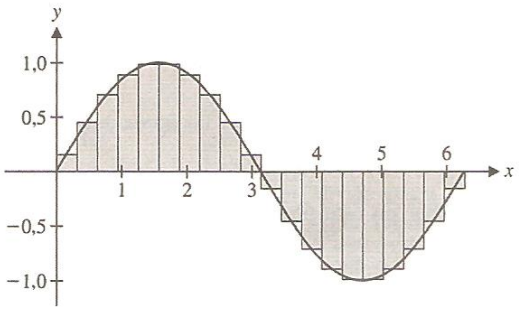



**Figura 4.17b**
Veinte rectángulos.

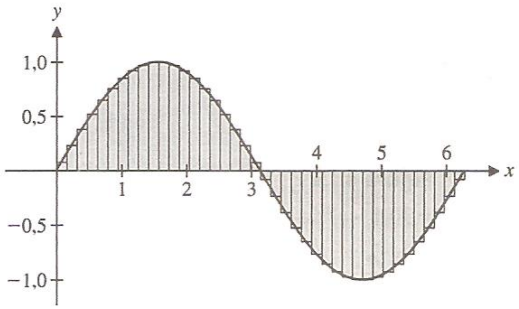



**Figura 4.17c**
Cuarenta rectángulos.

Ilustramos esta interpretación gráfica de la integral en el próximo ejemplo.

### Ejemplo 4.3 Cálculo de una integral usando sumas de Riemann

Calcular el valor exacto de $\int_0^2 (x^2 - 2x)\,dx$.

**Solución** La integral definida es el límite de una sucesión de sumas de Riemann en las que podemos elegir los puntos de evaluación a capricho. Lo más fácil suele ser elegir los extremos de la derecha, como vamos a hacer aquí. En nuestro caso,

$$\Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}.$$

Así, pues, $x_0 = 0$, $x_1 = x_0 + \Delta x = \dfrac{2}{n}$,

$$x_2 = x_1 + \Delta x = \frac{2}{n} + \frac{2}{n} = \frac{2(2)}{n},$$

y así sucesivamente. Por tanto, $c_i = x_i = \dfrac{2i}{n}$ y la suma de Riemann es

$$\begin{aligned}
R_n &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 - 2x_i)\,\Delta x \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{2i}{n}\right)^2 - 2\left(\frac{2i}{n}\right)\right]\left(\frac{2}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{4i^2}{n^2} - \frac{4i}{n}\right)\left(\frac{2}{n}\right) \\
&= \frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 - \frac{8}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i \\
&= \left(\frac{8}{n^3}\right)\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{8}{n^2}\right)\frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{Teorema 2.1 (ii) y (iii).} \\
&= \frac{4(n+1)(2n+1)}{3n^2} - \frac{4(n+1)}{n} = \frac{8n^2 + 12n + 4}{3n^2} - \frac{4n+4}{n}.
\end{aligned}$$

Tomando el límite de $R_n$ cuando $n \to \infty$, obtenemos el valor exacto de la integral:

$$\int_0^2 (x^2 - 2x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{8n^2 + 12n + 4}{3n^2} - \frac{4n+4}{n}\right) = \frac{8}{3} - 4 = -\frac{4}{3}.$$

No debe preocuparnos la respuesta negativa. Las integrales definidas pueden ser positivas o negativas. Para interpretarla en términos de área, mire la gráfica de $y = x^2 - 2x$ en la figura 4.18.

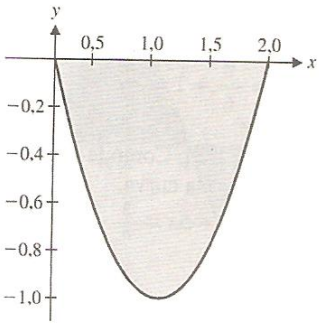



**Figura 4.18**
$y = x^2 - 2x$ en $[0, 2]$.

En el intervalo $[0, 2]$, la función es siempre negativa. El *valor absoluto* de la integral, $\frac{4}{3}$, da el área entre la curva $y = x^2 - 2x$ y el eje $x$. El valor de la integral es negativo porque la región está *bajo* el eje $x$. Es el **área con signo**, tal como se define a continuación.

### Definición 4.2

Sea $f(x) \geq 0$ en el intervalo $[a, b]$ y $f(x) \leq 0$ en $[b, c]$. Sea $A_1$ el área entre la curva $y = f(x)$ y el eje $x$, en $a \leq x \leq b$. Sea $A_2$ el área entre la curva $y = f(x)$ y el eje $x$, en $b \leq x \leq c$. El área con signo entre $y = f(x)$ y el eje $x$ en $a \leq x \leq c$ es $A_1 - A_2$ y el **área absoluta** entre $y = f(x)$ y el eje $x$ en $a \leq x \leq c$ es $A_1 + A_2$ (figura 4.19).

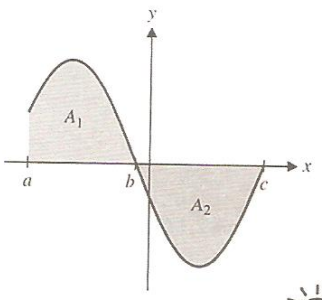



**Figura 4.19**
Área con signo.

Así, pues, el área con signo y el área absoluta son la diferencia y la suma, respectivamente, de las áreas sobre y bajo el eje $x$.

El próximo ejemplo examina el caso general de un integrando con valores positivos y negativos en el intervalo de integración.

### Ejemplo 4.4 Relación entre integral definida y área con signo

Calcular las tres integrales relacionadas: $\int_0^2 (x^2 - 2x)\,dx$, $\int_2^3 (x^2 - 2x)\,dx$ y $\int_0^3 (x^2 - 2x)\,dx$ e interpretarlas en términos de área.

**Solución** Por el ejemplo 4.3 sabemos ya que $\int_0^2 (x^2 - 2x)\,dx = -\frac{4}{3}$. (Interpretar este resultado gráficamente en la figura 4.18).

En el intervalo [2, 3], se tiene $\Delta x = \frac{1}{n}$ y $x_0 = 2$, $x_1 = x_0 + \Delta x = 2 + \frac{1}{n}$,

y así sucesivamente. Con evaluación en el extremo de la derecha, es decir, $c_i = x_i = 2 + \frac{i}{n}$, se obtiene la suma de Riemann

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 - 2x_i)\,\Delta x$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[\left(2 + \frac{i}{n}\right)^2 - 2\left(2 + \frac{i}{n}\right)\right]\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(4 + 4\,\frac{i}{n} + \frac{i^2}{n^2} - 4 - \frac{2i}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i$$

$$= \left(\frac{1}{n^3}\right)\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \left(\frac{2}{n^2}\right)\frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{Teorema 2.1 (ii) y (iii).}$$

$$= \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} + \frac{(n+1)}{n}.$$

Y la integral es el límite de esa suma de Riemann cuando $n \to \infty$:

$$\int_2^3 (x^2 - 2x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} + \frac{(n+1)}{n}\right] = \frac{2}{6} + 1 = \frac{4}{3}.$$

La figura 4.20a muestra la gráfica de $y = x^2 - 2x$ en el intervalo [2, 3]. Como la función es siempre positiva en ese intervalo, la integral corresponde al área bajo la curva.

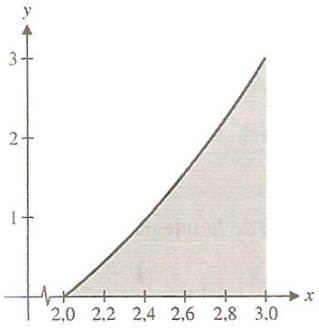



**Figura 4.20a**
$y = x^2 - 2x$ en [2, 3].

Finalmente, en el intervalo [0, 3] se tiene $\Delta x = \frac{3}{n}$ y $x_0 = 0$, $x_1 = x_0 + \Delta x = \frac{3}{n}$,

$$x_2 = x_1 + \Delta x = \frac{3}{n} + \frac{3}{n} = \frac{3(2)}{n},$$

y así sucesivamente. Tomando como puntos de evaluación los extremos de la derecha, es decir, $c_i = x_i = \frac{3i}{n}$, la suma de Riemann es

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{3i}{n}\right)^2 - 2\left(\frac{3i}{n}\right)\right]\left(\frac{3}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{9i^2}{n^2} - \frac{6i}{n}\right)\left(\frac{3}{n}\right)$$

$$= \frac{27}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 - \frac{18}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i$$

$$= \left(\frac{27}{n^3}\right)\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{18}{n^2}\right)\frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{Teorema 2.1 (ii) y (iii).}$$

$$= \frac{9(n+1)(2n+1)}{2n^2} - \frac{9(n+1)}{n}.$$

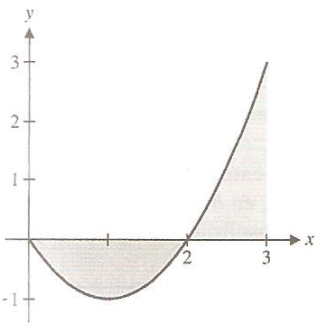



**Figura 4.20b**
$y = x^2 - 2x$ en [0, 3].

Así, pues,

$$\int_0^3 (x^2 - 2x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{9(n+1)(2n+1)}{2n^2} - \frac{9(n+1)}{n}\right] = \frac{18}{2} - 9 = 0.$$

La curva está sobre el eje $x$ en el intervalo $[0, 2]$ y bajo el eje $x$ en $[2, 3]$ (véase figura 4.20b). En ambos casos, el área absoluta es $\frac{4}{3}$. El valor 0 de la integral en el intervalo $[0, 3]$ indica que esas dos contribuciones de $\frac{4}{3}$ tenían signos opuestos y se han cancelado una con otra. El área absoluta entre la gráfica de $y = x^2 - 2x$ y el eje $x$ es la suma de las dos áreas (en valor absoluto), es decir, $A = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$.

Las áreas con signo admiten, asimismo, interpretación en términos de velocidad y posición. Sea $v(t)$ la función velocidad de un objeto que se mueve hacia adelante y hacia atrás (según $v(t) > 0$ o $v(t) < 0$) por una recta. Si $v(t) > 0$ en el intervalo $[t_1, t_2]$, entonces $\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$ da la distancia recorrida (ahora en la dirección positiva). Si $v(t) < 0$ en el intervalo $[t_3, t_4]$, el objeto se está moviendo en la dirección negativa y la distancia recorrida es $\int_{t_3}^{t_4} v(t)\,dt$ (en dirección negativa). Por tanto, si el objeto inicia su movimiento en $t = 0$ y se detiene en $t = T$, $\int_0^T v(t)\,dt$ da la distancia recorrida en sentido positivo menos la recorrida en sentido negativo. Esto es, $\int_0^T v(t)\,dt$ representa el cambio de posición entre el instante inicial y el final.

## Ejemplo 4.5 Estimación del cambio de posición

Un objeto se mueve por una recta con función velocidad $v(t) = \operatorname{sen} t$. Si inicia su movimiento en la posición 0, hallar la distancia total recorrida y la posición del objeto cuando $t = 3\pi/2$.

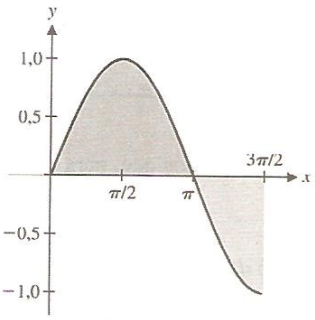



**Figura 4.21**
$y = \operatorname{sen} t$ en $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$

**Solución** En la figura 4.21 vemos que $\operatorname{sen} t \geq 0$ para $0 \leq t \leq \pi$ y $\operatorname{sen} t \leq 0$ para $\pi \leq t \leq 3\pi/2$. La distancia total recorrida corresponde al área de las regiones sombreadas en la figura 4.21, y viene dada por

$$A = \int_0^{\pi} \operatorname{sen} t\,dt - \int_{\pi}^{3\pi/2} \operatorname{sen} t\,dt.$$

Usando la regla del punto medio, se obtienen estos valores de las sumas de Riemann:

| $n$ | $R_n \approx \int_0^{\pi} \operatorname{sen} t\,dt$ |
|---|---|
| 10 | 2,0082 |
| 20 | 2,0020 |
| 50 | 2,0003 |
| 100 | 2,0001 |

| $n$ | $R_n \approx \int_{\pi}^{3\pi/2} \operatorname{sen} t\,dt$ |
|---|---|
| 10 | −1,0010 |
| 20 | −1,0003 |
| 50 | −1,0000 |
| 100 | −1,0000 |

Parecen converger a 2 y a −1, respectivamente. Hay que mirar con suspicacia respuestas tan «bonitas» (¿por qué un resultado entero aquí?), pero demostraremos en breve que, en efecto, esos valores son correctos. Así, pues, el área absoluta acotada por $y = \operatorname{sen} t$ y el eje $t$ en $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$ es

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} t\,dt - \int_{\pi}^{3\pi/2} \operatorname{sen} t\,dt = 2 + 1 = 3.$$

Eso significa que la distancia total (absoluta) recorrida es 3 unidades. El cambio de posición del objeto viene dado por

$$\int_{\pi}^{3\pi/2} \operatorname{sen} t\, dt = \int_{0}^{\pi} \operatorname{sen} t\, dt + \int_{\pi}^{3\pi/2} \operatorname{sen} t\, dt = 2 + (-1) = 1.$$

Por tanto, si el objeto parte de la posición 0, termina su viaje en la posición $0 + 1 = 1$.

Hemos definido la integral definida mediante un límite, pero todavía no sabemos cuándo ese límite existe. El próximo teorema establece que muchas funciones familiares son integrables.

**Teorema 4.1**
Si $f$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces $f$ es integrable en $[a, b]$.

Su demostración es demasiado técnica para incluirla aquí. Si piensa en la interpretación de la integral definida como área, es intuitivamente claro.

A continuación enunciamos varias reglas prácticas de integración.

**Teorema 4.2**
Si $f$ y $g$ son integrables en $[a, b]$ y $c$ es cualquier constante:

(i) $\int_a^b [f(x) + g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$,

(ii) $\int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b g(x)\, dx$,

(iii) $\int_a^b cf(x)\, dx = c\int_a^b f(x)\, dx$,

(iv) $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$, para cada $c$ en $[a, b]$.

**Demostración**

Los apartados (i), (ii) y (iii) quedarán demostrados de un golpe si probamos que, para constantes arbitrarias $c$ y $d$,

$$\int_a^b [cf(x) + dg(x)]\, dx = c\int_a^b f(x)\, dx + d\int_a^b g(x)\, dx.$$

Por definición,

$$\begin{aligned}
\int_a^b [cf(x) + dg(x)]\, dx &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [cf(c_i) + dg(c_i)]\, \Delta x \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[ c\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\, \Delta x + d\sum_{i=1}^{n} g(c_i)\, \Delta x \right] \qquad \text{Por el teorema 2.2.} \\
&= c \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\, \Delta x + d \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} g(c_i)\, \Delta x \\
&= c\int_a^b f(x)\, dx + d\int_a^b g(x)\, dx,
\end{aligned}$$

donde hemos hecho uso de las reglas usuales de la suma y del carácter integrable de $f$ y $g$. Dejamos para los ejercicios la demostración de (iv), pero hagamos constar que ya ha quedado ilustrada esa idea en el ejemplo 4.5.

Ahora vamos a hacer un par de definiciones razonables. En primer lugar, para cualquier función $f$ integrable, si $a < b$, definimos

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx. \tag{4.2}$$

Decimos que es razonable porque al integrar «hacia atrás» en el intervalo, la anchura de los rectángulos en la suma de Riemann ($\Delta x$) sería negativa. En segundo lugar, si $a$ está en el dominio de $f$, definimos

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0.$$

Interpretando la integral como un área, dice simplemente que el área entre $a$ y $a$ es cero.

Resulta que una función es integrable, aun cuando tenga un número finito de discontinuidades, siempre que sea continua en el resto del intervalo. Tales funciones se llaman **continuas a trozos**. (La figura 4.22 muestra una de ellas).

En el próximo ejemplo calculamos la integral de una función continua a trozos.

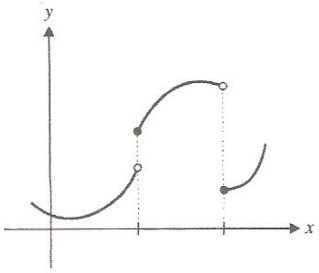



**Figura 4.22**
Continua a trozos.

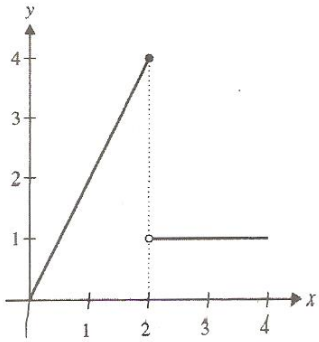



**Figura 4.23a**
$y = f(x)$.

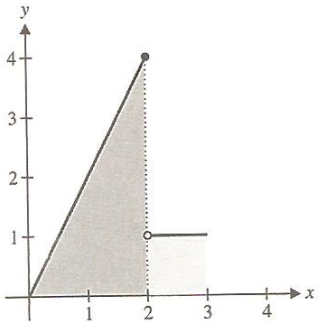



**Figura 4.23b**
Área bajo la curva $y = f(x)$ en $[0, 3]$.

### Ejemplo 4.6 Una integral con integrando discontinuo

Evaluar $\int_0^3 f(x)\,dx$, donde

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \le 2 \\ 1, & \text{si } x > 2 \end{cases}.$$

**Solución** En la gráfica de $f$ (figura 4.23a) vemos que aunque $f$ es discontinua en $x = 2$, la discontinuidad es de salto, de manera que la función es continua a trozos en $[0, 3]$. Por el teorema 4.2 (iv),

$$\int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx.$$

En la figura 4.23b observamos que $\int_0^2 f(x)\,dx$ corresponde al área del triángulo de base 2 y altura 4 sombreado, así que

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\,(\text{base})\,(\text{altura}) = \frac{1}{2}(2)\,(4) = 4.$$

Asimismo, $\int_2^3 f(x)\,dx$ corresponde al área del cuadrado de lado 1, de manera que

$$\int_2^3 f(x)\,dx = 1.$$

En consecuencia,

$$\int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx = 4 + 1 = 5.$$

En este ejemplo, las áreas determinadas por las integrales se sabían calcular mediante sencillas fórmulas geométricas y no ha sido necesario evaluar sumas de Riemann.

Otra propiedad simple de las integrales definidas es la siguiente.

**Teorema 4.3**
Si $f$ y $g$ son integrables en $[a, b]$, con $g(x) \le f(x)$ para todo $x \in [a, b]$, entonces

$$\int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx.$$

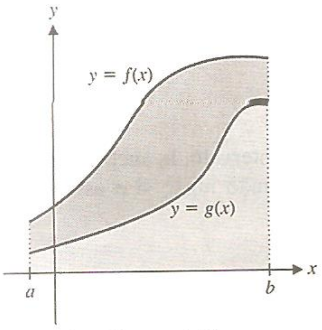



**Figura 4.24**
Cuanto mayor es la función, mayor es la integral.

**Demostración**
Puesto que $f(x) - g(x) \geq 0$ en $[a, b]$, $\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$ representa el área bajo la curva $y = f(x) - g(x)$, que no puede ser negativa. Por el teorema 4.2 (ii),

$$0 \leq \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx,$$

lo que completa la demostración.

El teorema 4.3 afirma simplemente que funciones mayores dan integrales mayores. La figura 4.24 ilustra esto para dos funciones positivas.

## Valor medio de una función

**Figura 4.25**
Profundidad media de una sección de un lago.

Todos tenemos claro lo que significa un *promedio*. Por ejemplo, para calcular la edad media de los alumnos de una clase de Cálculo, basta sumar las edades de todos ellos y dividir entre el número total de estudiantes de la clase. Pero ¿y si deseamos conocer la profundidad media de un lago? En ese caso hay infinitos puntos de la superficie del lago en los que habría que medir la profundidad. Es más, aun en el supuesto de que fuéramos capaces de medirla, ¿qué haríamos? ¿Sumar esos infinitos números y dividir entre infinito? Un método aproximado razonable consiste en medir la profundidad en unos cuantos puntos a lo largo del lago y calcular el promedio de esos valores, como indica la figura 4.25.

Más en general, muchas veces nos interesa conocer el valor medio de una función $f$ en cierto intervalo $[a, b]$. Para ello, elegimos unos cuantos puntos y evaluamos $f$ en ellos. Construimos la partición de $[a, b]$

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

donde la diferencia entre puntos sucesivos es $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$. El **valor medio**, $f_{\text{med}}$, se aproxima entonces por el promedio de los valores de la función en $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

$$\begin{aligned} f_{\text{med}} &\approx \frac{1}{n}[f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)] \\ &\approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \\ &= \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\left(\frac{b-a}{n}\right) \qquad \text{Multiplicar y dividir por } (b-a). \\ &= \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x. \qquad \Delta x = \frac{b-a}{n}. \end{aligned}$$

Esta última suma es una suma de Riemann. Además, parece lógico que cuantos más puntos de evaluación tomemos, mejor será la aproximación. Así, pues, haciendo $n \to \infty$ llegamos a una integral que representa el valor medio de $f$:

$$f_{\text{med}} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x\right] = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx. \tag{4.3}$$

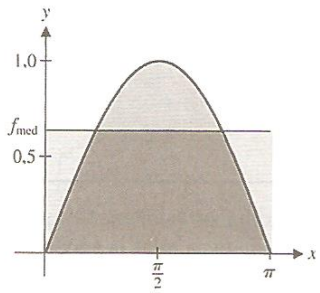



**Figura 4.26**
$y = \text{sen } x$ y su valor medio.

**Ejemplo 4.7** **Valor medio de una función**

Hallar el valor medio de $f(x) = \text{sen } x$ en el intervalo $[0, \pi]$.

**Solución** Por (4.3),

$$f_{med} = \frac{1}{\pi - 0} \int_0^{\pi} \text{sen } x \, dx.$$

Podemos aproximar el valor de esta integral calculando sumas de Riemann. Así, se obtiene $f_{med} \approx 0{,}6366198$ (dejamos como ejercicio la comprobación de este valor). La figura 4.26 muestra la gráfica de $y = \text{sen } x$ y su valor medio en $[0, \pi]$. Las dos áreas sombreadas son iguales.

**Figura 4.27**
Un lago y su profundidad media.

Volviendo al problema de hallar la profundidad media de un lago, imaginemos que hacemos una obra que consigue dejar el fondo plano. En tal caso, su profundidad sería constante e igual al valor medio de la profundidad del lago original. En el proceso de allanar el fondo, la profundidad de uno o más puntos no cambia (figura 4.27). En otras palabras, la profundidad media del lago es exactamente igual a la profundidad en uno o más puntos. Un enunciado preciso de esta observación será el contenido del próximo teorema (el teorema integral del valor medio).

Nótese que para cualquier constante $c$,

$$\int_a^b c \, dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} c \, \Delta x = c \lim n \to \infty \sum_{i=1}^{n} \Delta x = c(b - a),$$

ya que $\sum_{i=1}^{n} \Delta x$ es la suma de las longitudes de los subintervalos de la partición.

Sea $f$ una función continua en $[a, b]$. Por ser continua, el teorema de los valores extremos asegura que $f$ alcanza un valor mínimo $m$ y un valor máximo $M$ en $[a, b]$. Así, pues,

$$m \leq f(x) \leq M, \text{ para todo } x \in [a, b]$$

y del teorema 4.3 se deduce que

$$\int_a^b m \, dx \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b M \, dx.$$

Como $m$ y $M$ son constantes, de ahí se sigue que

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq M(b - a). \tag{4.4}$$

Finalmente, dividiendo entre $(b - a) > 0$, obtenemos

$$m \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) \, dx \leq M.$$

Por tanto, $\frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) \, dx$, el valor medio de $f$ en $[a, b]$, está entre los valores mínimo y máximo de $f$ en $[a, b]$. Por ser $f$ continua, el teorema del valor intermedio garantiza la existencia de algún $c \in (a, b)$ para el cual

$$f(c) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) \, dx.$$

Acabamos de probar el siguiente teorema.

**Teorema 4.4 (Teorema integral del valor medio)**
Si $f$ es continua en $[a, b]$, existe algún $c \in (a, b)$ tal que

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx.$$

La idea del teorema es muy simple (una función continua toma su valor medio en al menos un punto), pero tiene consecuencias de largo alcance. La primera de ellas la encontraremos en la sección 4.5, en la demostración del teorema fundamental del Cálculo.

Revisando la deducción del teorema integral del valor medio, observamos que, por el camino, hemos demostrado que para cualquier función integrable $f$, si $m \le f(x) \le M$ para todo $x \in [a, b]$, es válida la desigualdad (4.4):

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\, dx \le M(b-a).$$

Aparte su papel en la antedicha demostración, este hecho tiene interés por sí mismo, pues nos permite estimar el valor de una integral definida. Suele ser una estimación grosera, es cierto, pero interesa conocer un intervalo que contiene al valor exacto de la integral. El próximo ejemplo ilustra este punto.

**Ejemplo 4.8** **Estimación del valor de una integral**

Usar la desigualdad (4.4) para estimar el valor de $\int_0^1 \sqrt{x^2+1}\, dx$.

**Solución** La resolución exacta de esta integral escapa a nuestros conocimientos actuales, claro está. Sin embargo, teniendo en cuenta que

$$1 \le \sqrt{x^2+1} \le \sqrt{2}, \text{ para todo } x \in [0, 1],$$

la desigualdad (4.4) nos hace saber que

$$1 \le \int_0^1 \sqrt{x^2+1}\, dx \le \sqrt{2} \approx 1{,}414214.$$

En otras palabras, aunque no conocemos el valor exacto de la integral, sabemos que está entre 1 y $\sqrt{2} \approx 1{,}414214$.

# EJERCICIOS 4.4

1. Dibujar la gráfica de una función $f$ que tome valores positivos y negativos en un intervalo $[a, b]$. Explicar, en términos de área, el significado de $\int_a^b f(x)\, dx = 0$. Explicar, asimismo, qué significan las desigualdades $\int_a^b f(x)\, dx \ge 0$ y $\int_a^b f(x)\, dx \le 0$.

2. Para interpretar físicamente el teorema 4.3, supongamos que $f(x)$ y $g(x)$ son las funciones velocidad de dos móviles que parten de la misma posición. Si $f(x) \ge g(x) \ge 0$, explicar por qué ha de ser $\int_a^b f(x)\, dx \ge \int_a^b g(x)\, dx$.

3. El teorema integral del valor medio afirma que si $f(x)$ es continua en $[a, b]$, existe algún número $c$ entre $a$ y $b$ tal que $f(c)(b-a) = \int_a^b f(x)\, dx$. Viendo el lado izquierdo de esa igualdad como el área de un rectángulo, esbozar una figura que ilustre ese resultado y explicar por qué es cierto.

4. Formular el teorema integral del valor medio aplicado a la derivada $f'(x)$. A continuación, escribir el teorema del valor medio (sección 2.9). Si los valores $c$ de ambos teoremas coinciden, ¿a qué tiene que ser igual $\int_a^b f'(x)\, dx$? Explicar por qué no sabemos, en este momento, si esos dos valores de $c$ coinciden o no.

**En los ejercicios 5-10, usar las sumas de Riemann para estimar los valores de la integral (con dos decimales exactos):**

5. $\int_0^3 (x^3 + x)\, dx$
6. $\int_1^2 (x^2 - 1)\, dx$
7. $\int_2^4 \frac{1}{x^2}\, dx$
8. $\int_0^3 \sqrt{x^2+1}\, dx$
9. $\int_0^\pi \operatorname{sen} x^2\, dx$
10. $\int_{-2}^2 e^{-x^2}\, dx$

**En los ejercicios 11-16, hallar el valor de la integral calculando el límite de sumas de Riemann.**

11. $\int_0^1 2x\,dx$
12. $\int_1^2 2x\,dx$
13. $\int_0^2 x^2\,dx$
14. $\int_0^3 (x^2+1)\,dx$
15. $\int_1^3 (2x-1)\,dx$
16. $\int_{-2}^2 (x^2-1)\,dx$

**En los ejercicios 17-26, escribir el área (absoluta) dada como una integral o como una suma de integrales.**

17. El área entre $y = 4 - x^2$ y el eje $x$.
18. El área entre $y = 4x - x^2$ y el eje $x$.
19. El área entre $y = x^2 - 4$ y el eje $x$.
20. El área entre $y = x^2 - 4x$ y el eje $x$.
21. El área de la región acotada por $y = x^2$, $x = 2$ y el eje $x$
22. El área de la región acotada por $y = x^3$, $x = 3$ y el eje $x$
23. El área entre $y = \operatorname{sen} x$ y el eje $x$, en $0 \le x \le \pi$
24. El área entre $y = \operatorname{sen} x$ y el eje $x$, en $-\pi/2 \le x \le \pi/4$
25. El área entre $y = x^3 - 3x^2 + 2x$ y el eje $x$, en $0 \le x \le 2$
26. El área entre $y = x^3 - 4x$ y el eje $x$, en $-2 \le x \le 3$

**En los ejercicios 27-30, usar la función velocidad y la posición inicial dadas para estimar la posición final $s(b)$.**

27. $v(t) = 60 - 16t$, $s(0) = 2$, $b = 2$
28. $v(t) = 20 + 10t$, $s(1) = 3$, $b = 3$
29. $v(t) = 40(1 - e^{-2t})$, $s(0) = 0$, $b = 4$
30. $v(t) = 30e^{-t/4}$), $s(0) = -1$, $b = 4$

**En los ejercicios 31-34, usar el teorema 4.2 para escribir la expresión como una sola integral.**

31. $\int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx$
32. $\int_0^3 f(x)\,dx - \int_2^3 f(x)\,dx$
33. $\int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^1 f(x)\,dx$
34. $\int_{-1}^2 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx$

**En los ejercicios 35-38, dibujar un esbozo del área dada por la integral.**

35. $\int_1^2 (x^2 - x)\,dx$
36. $\int_2^4 (x^2 - x)\,dx$
37. $\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx$
38. $\int_{-2}^2 e^{-x}\,dx$

**En los ejercicios 39-42, estimar el valor de la integral usando el teorema integral del valor medio.**

39. $\int_{\pi/3}^{\pi/2} 3\cos x^2\,dx$
40. $\int_0^{1/2} e^{-x^2}\,dx$
41. $\int_0^2 \sqrt{2x^2+1}\,dx$
42. $\int_{-1}^1 \frac{3}{x^3+2}\,dx$

**En los ejercicios 43 y 44, hallar un valor $c$ que satisfaga la conclusión del teorema integral del valor medio.**

43. $\int_0^2 3x^2\,dx\ (= 8)$
44. $\int_{-1}^1 (x^2 - 2x)\,dx \left(= \frac{2}{3}\right)$

45. Sustituir $f(x) = g'(x)$ en el teorema integral del valor medio y compararlo con el teorema del valor medio de la sección 2.9.

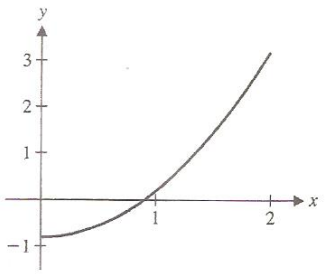
46. Demostrar que si $f$ es continua en el intervalo $[a, b]$, existe algún número $c$ en $(a, b)$ tal que $f(c)$ es igual al valor medio de $f$ en $[a, b]$.

47. Demostrar el apartado (iv) del teorema 4.2 en el caso especial $c = \frac{1}{2}(a + b)$.

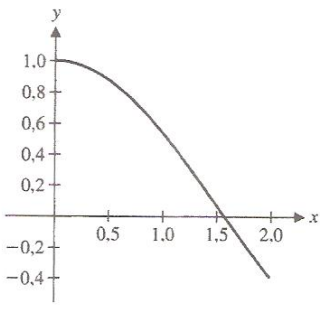
48. Probar que los apartados (i) – (iii) del teorema 4.2 se deducen de
$$\int_a^b [cf(x) + dg(x)]\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx + d\int_a^b g(x)\,dx.$$
(Ayuda: Elegir astutamente $c$ y $d$, por ejemplo, $d = 0$ y $c = d = 1$).

**En los ejercicios 49-52, usar la gráfica para determinar si $\int_0^2 f(x)\,dx$ es positivo o negativo.**

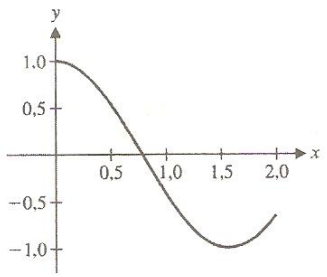
49.



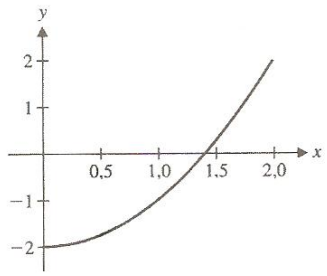

50.



51.




52.




53. Dadas las funciones

$$f(x)=\begin{cases}2x & \text{si } x<1\\ x^2+2 & \text{si } x\geq 1\end{cases} \text{ y } g(x)=\begin{cases}2x & \text{si } x\leq 1\\ x^2+2 & \text{si } x>1\end{cases},$$

supongamos que $\int_0^2 f(x)\,dx$ y $\int_0^2 g(x)\,dx$ existen. Explicar por qué las sumas de Riemann con evaluación en el punto medio son iguales para todo valor par de $n$. Argumentar que este resultado implica que las dos integrales son iguales.

54. Para las funciones del ejercicio 53, explicar por qué las integrales son ambas iguales a la suma $\int_0^1 2x\,dx+\int_1^2 (x^2+2)\,dx$.

**En los ejercicios 55-58 calcular $\int_0^4 f(x)\,dx$.**

55. $f(x)=\begin{cases}2x & \text{si } x<1\\ 4 & \text{si } x\geq 1\end{cases}$

56. $f(x)=\begin{cases}2 & \text{si } x<2\\ 3x & \text{si } x\geq 2\end{cases}$

57. $f(x)=\begin{cases}4 & \text{si } x<3\\ x+1 & \text{si } x\geq 3\end{cases}$

58. $f(x)=\begin{cases}x-1 & \text{si } x<1\\ 2 & \text{si } x\geq 1\end{cases}$

59. En una población nacen $b(t)=410-0{,}3t$ individuos al mes y mueren $a(t)=390+0{,}2t$ al mes. Explicar por qué $\int_0^{12}[b(t)-a(t)]\,dt$ representa el cambio neto de la población en los 12 primeros meses. ¿Para qué valores de $t$ es $b(t)>a(t)$? ¿En qué momentos está creciendo la población? ¿Cuándo está decreciendo? Hallar el instante en que la población alcanza su máximo valor.

60. En una población nacen $b(t)=400-3\operatorname{sen} t$ individuos al mes y mueren $a(t)=390+0{,}2t$ al mes. Explicar por qué $\int_0^{12}[b(t)-a(t)]\,dt$ representa el cambio neto de la población en los 12 primeros meses. Determinar gráficamente para qué valores de $t$ es $b(t)>a(t)$. ¿En qué momentos está creciendo la población? ¿Y cuándo está decreciendo? Hallar el instante en que la población alcanza su máximo valor.

61. En un gas ideal a temperatura constante, la presión y el volumen están relacionados por $PV=10$. El trabajo requerido para que el volumen pase de $V=2$ a $V=4$ viene dado por la integral $\int_2^4 P(V)\,dV$. Estimar el valor de esta integral.

62. Supongamos que $T(t)=64-24\cos\frac{\pi}{6}t$ representa la temperatura a lo largo del año, con $t$ medido en meses y $T$ en grados Fahrenheit. Estimar la temperatura media en el año. Explicar por qué esa respuesta es obvia a la vista de la gráfica de $T(t)$.

**En los ejercicios 63-68, estimar el valor medio de la función en el intervalo que se especifica.**

63. $f(x)=2x+1$, $[0, 4]$

64. $f(x)=x^2+2x$, $[0, 1]$

65. $f(x)=x^2-1$, $[1, 3]$

66. $f(x)=2x-2x^2$, $[0, 1]$

67. $f(x)=\cos x$, $[0, \pi/2]$

68. $f(x)=\operatorname{sen} x$, $[0, \pi/2]$

69. La *ecuación momento-impulso* relaciona la fuerza $F(t)$ aplicada a un objeto de masa $m$ y el cambio $\Delta v$ de velocidad resultante. La ecuación es $m\,\Delta v=\int_a^b F(t)\,dt$, donde $\Delta v=v(b)-v(a)$. Supongamos que la fuerza de un bate sobre una pelota es aproximadamente $F(t)=9-10^8(t-0{,}0003)^2$ miles de libras, con $t$ entre 0 y 0,0006 segundos. ¿Cuál es la máxima fuerza sobre la pelota? Si la masa de la pelota es $m=0{,}01$, estimar el cambio de velocidad $\Delta v$ (en pies/s).

70. Medidas tomadas en el pie de jugadores de badmington en un golpe indican una fuerza vertical aproximada $F(t)=100-25.000(t-0{,}2)^2$ newtons, con $t$ entre 0 y 0,4 segundos (véase *The Science of Racquet Sports*). Para un jugador de masa $m=5$, usar la ecuación de momento-impulso (ejercicio 69) para estimar el cambio de velocidad vertical del jugador.

71. Usando el teorema integral del valor medio, probar el siguiente hecho para funciones continuas. Si el punto de evaluación se elige adecuadamente, la suma de Riemann con $n=1$ da el valor exacto de $\int_a^b f(x)\,dx$.

72. Usando el teorema integral del valor medio, probar el siguiente hecho para funciones continuas. Para todo entero $n>0$ existe un conjunto de puntos de evaluación para los cuales la suma de Riemann da el valor exacto de $\int_a^b f(x)\,dx$.

## 4.5 EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

En esta sección presentamos dos resultados que se conocen, conjuntamente, como teorema fundamental del Cálculo. ¿Qué les hace ser **fundamentales**? En el aspecto práctico, constituye un atajo muy necesario para calcular integrales definidas. Así como la regla de las potencias y otras nos liberaron de tener que acudir a la definición para calcular derivadas, el teorema fundamental del Cálculo proporciona un instrumento potente para evaluar integrales sin tener que calcular límites de sumas de Riemann. Puesto que sabemos calcular exactamente pocos límites de funciones, este teorema adquiere una importancia práctica extraordinaria.

En el aspecto conceptual, el teorema fundamental unifica dos nociones tan aparentemente disjuntas como la derivada y la integral definida. El aprendizaje de las reglas de derivación e integración ya sugiere una relación. El teorema fundamental demostrará que son operaciones inversas una de otra. En este sentido, el teorema es verdaderamente **fundamental** al Cálculo como disciplina coherente.

Ya hemos ido dando pistas de la primera parte del teorema fundamental. En primer lugar, es sospechoso el uso de notaciones similares para la integral indefinida y para la integral definida. Además, hemos usado cálculos de primitivas (antiderivadas) y áreas para deducir la distancia a partir de la velocidad. No obstante, el teorema fundamental establece lazos más fuertes entre derivación e integración.

### Teorema 5.1 (Teorema fundamental del Cálculo, parte I)

Si $f$ es continua en $[a, b]$ y $F(x)$ es una primitiva de $f$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{5.1}$$

### Demostración

En primer lugar, hacemos una partición de $[a, b]$ con puntos

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

donde $x_i - x_{i-1} = \Delta x = \dfrac{b-a}{n}$, con $i = 1, 2, \cdots, n$. Trabajando hacia atrás es fácil ver que, por las cancelaciones que se producen, podemos escribir

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= F(x_n) - F(x_0) \\ &= [F(x_1) - F(x_0)] + [F(x_2) - F(x_1)] + \cdots + [F(x_n) - F(x_{n-1})] \\ &= \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})]. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Como $F$ es primitiva de $f$, $F$ es derivable en $(a, b)$ y continua en $[a, b]$. Por el teorema del valor medio, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$ se tiene

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(c_i)(x_i - x_{i-1}) = f(c_i)\,\Delta x, \tag{5.3}$$

para algún $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$. Así, pues, debido a (5.2) y (5.3),

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})] = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x. \tag{5.4}$$

En esta última expresión reconocemos una suma de Riemann de $f$ en $[a, b]$. Tomando límites en (5.4) para $n \to \infty$, se obtiene

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x = \lim_{n\to\infty} [F(b) - F(a)] \\ &= F(b) - F(a), \end{aligned}$$

que es lo que queríamos demostrar.

### Advertencia

La parte I del teorema fundamental del Cálculo afirma que para calcular una integral definida basta conocer una primitiva y evaluarla en los dos límites de integración. Esto supone una mejora esencial respecto del cálculo de límites de sumas de Riemann, que sólo podemos calcular, exactamente para unos cuantos casos simples.

### Notas históricas

El **teorema fundamental del Cálculo**, que se atribuye a Isaac Newton y Gottfried Leibniz, marca el comienzo del Cálculo como disciplina unificada. Newton desarrolló su Cálculo a finales del año 1660, pero no publicó sus resultados hasta 1687. Leibniz los redescubrió a mediados de 1670, pero los publicó antes que Newton, en 1684 y 1686. La notación y la terminología de Leibniz (en buena parte todavía en uso) es mejor que la de Newton. (Newton se refería a las derivadas e integrales como *fluxiones* y *fluyentes*). Sin embargo, Newton desarrolló las nociones básicas antes que Leibniz. A raíz de un cruce de cartas entre ambos, surgió una tensa controversia sobre quién debía ser considerado el creador del Cálculo. La disputa degeneró en una auténtica guerra entre los matemáticos de Inglaterra y los del resto de Europa. La comunicación entre las dos comunidades matemáticas quedó en suspenso durante un siglo, un hecho que ejerció influencia innegable en el desarrollo de las Matemáticas en el siglo XVIII.

### Nota 5.1

Utilizaremos con frecuencia la notación

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Eso permite escribir la primitiva antes de evaluarla en los extremos del intervalo.

### Ejemplo 5.1 Aplicación del teorema fundamental

Calcular $\int_0^2 (x^2 - 2x)\,dx$.

**Solución** Como $f(x) = x^2 - 2x$ es continua en el intervalo $[0, 2]$, podemos aplicar el teorema fundamental. Es fácil hallar una primitiva por la regla de las potencias y evaluarla:

$$\int_0^2 (x^2 - 2x)\,dx = \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2\right)\Big|_0^2 = \left(\frac{8}{3} - 4\right) - (0) = -\frac{4}{3}.$$

Ya habíamos calculado la integral del ejemplo 5.1 mediante el límite de sumas de Riemann (véase ejemplo 4.3). Puesto a elegir, ¿cuál de los dos métodos prefiere?

Así como en el ejemplo 5.1 hay opción de elegir, las integrales de los ejemplos 5.2, 5.3, 5.4 y 5.5 **no se pueden** calcular evaluando el límite de sumas de Riemann directamente, porque carecemos de fórmulas para las sumas involucradas.

### Ejemplo 5.2 Cálculo exacto de una integral definida

Calcular $\int_1^4 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx$.

**Solución** Puesto que $f(x) = x^{1/2} - x^{-2}$ es continua en $[1, 4]$, podemos aplicar el teorema fundamental. Teniendo en cuenta que una primitiva de $f(x)$ es $F(x) = \frac{2}{3}x^{3/2} + x^{-1}$, se tiene

$$\int_1^4 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx = \frac{2}{3}x^{3/2} + x^{-1}\Big|_1^4 = \left[\frac{2}{3}(4)^{3/2} + 4^{-1}\right] - \left(\frac{2}{3} + 1\right) = \frac{47}{12}.$$

### Ejemplo 5.3 Aplicación del teorema fundamental al cálculo de áreas

Hallar el área bajo la curva $f(x) = \operatorname{sen} x$ en el intervalo $[0, \pi]$.

**Solución** Como $\operatorname{sen} x \geq 0$ y $\operatorname{sen} x$ es continua en $[0, \pi]$, se tiene

$$\text{Área} = \int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx.$$

Una primitiva de $\operatorname{sen} x$ es $F(x) = -\cos x$. Por tanto, del teorema fundamental se deduce que

$$\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx = F(\pi) - F(0) = (-\cos \pi) - (-\cos 0) = -(-1) - (-1) = 2.$$

### Ejemplo 5.4 Integral definida de una función exponencial

Calcular $\int_0^4 e^{-2x}\,dx$.

**Solución** Como $f(x) = e^{-2x}$ es continua, podemos aplicar el teorema fundamental. Una primitiva de $e^{-2x}$ es $-\frac{1}{2}e^{-2x}$ y, en consecuencia,

$$\int_0^4 e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-2x}\Big|_0^4 = -\frac{1}{2}e^{-8} - \left(-\frac{1}{2}e^0\right) \approx 0{,}49983.$$

Nótese que una primitiva evaluada en $x = 0$ no tiene por qué ser cero. Además, conviene hacer notar que el valor exacto de la integral es $-\frac{1}{2}e^{-8} + \frac{1}{2}$, mientras que 0,49983 es tan sólo una aproximación.

**Ejemplo 5.5** **Una integral definida relacionada con los logaritmos**

Calcular $\int_{-3}^{-1} \frac{2}{x}\,dx$.

**Solución** Como $f(x) = \frac{2}{x}$ es continua en $[-3, -1]$, se puede aplicar el teorema fundamental. Una primitiva de $f(x)$ es $2 \ln |x|$. (Es un error muy frecuente tomar $2 \ln x$, sin valor absoluto. ¡Y en esta ocasión el error es fatal! Analice el cálculo que sigue y verá por qué).

$$\int_{-3}^{-1} \frac{2}{x}\,dx = 2 \ln |x| \Big|_{-3}^{-1} = 2(\ln |-1| - \ln |-3|)$$
$$= 2(\ln 1 - \ln 3) = -2 \ln 3.$$

**Ejemplo 5.6** **Una integral definida con límite superior variable**

Calcular $\int_1^x 12t^5\,dt$.

**Solución** Aunque el límite superior es variable, podemos aplicar el teorema fundamental porque $f(t) = 12t^5$ es continua en todas partes. Por tanto,

$$\int_1^x 12t^5\,dt = 12\,\frac{t^6}{6}\Big|_1^x = 2(x^6 - 1).$$

No es sorprendente que la integral definida del ejemplo 5.6 sea una función de $x$, ya que uno de sus límites de integración depende de $x$. No obstante, esta observación sí puede producir sorpresa:

$$\frac{d}{dx}[2(x^6 - 1)] = 12x^5.$$

Nótese que es exactamente el integrando original, excepto que la variable (muda) de integración $t$ ha sido sustituida por $x$, la variable del límite superior de integración.

Esta coincidencia, aparentemente casual, no lo es en absoluto, como dejará claro el próximo teorema. Pero, antes de eso, debe entender muy bien qué significa una función tal como $F(x) = \int_1^x 12t^5\,dt$. Nótese que el valor de la función en $x = 2$ se halla sin más que hacer en ella $x = 2$:

$$F(2) = \int_1^2 12t^5\,dt,$$

lo cual corresponde al área bajo la curva $y = 12t^5$ desde $t = 1$ hasta $t = 2$ (figura 4.28a). Análogamente, el valor de esa función en $x = 3$ es

$$F(3) = \int_1^3 12t^5\,dt,$$

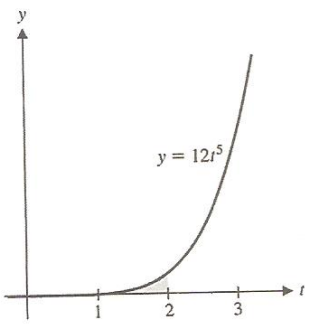



**Figura 4.28a**

Área entre $t = 1$ y $t = 2$.

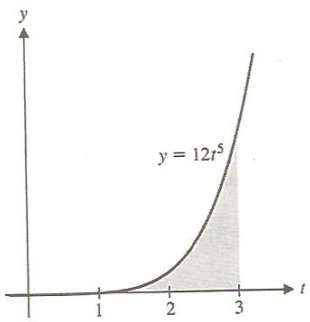



**Figura 4.28b**

Área entre $t = 1$ y $t = 3$.

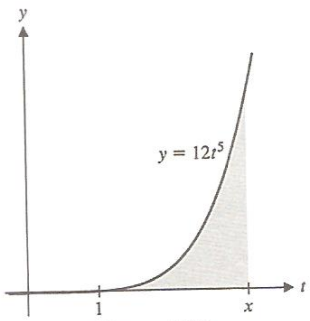



**Figura 4.28c**

Área entre $t = 1$ y $t = x$.

que corresponde al área bajo la curva $y = 12t^5$ entre $t = 1$ y $t = 3$ (figura 4.28b). En general, para cualquier $x > 1$, $F(x)$ da el área bajo la curva $y = f(t)$ entre $t = 1$ y $t = x$ (figura 4.28*c*). Por esa razón se llama a veces a $F$ una **función área**. Cuando $x > 1$ crece, $F(x)$ representa un área cada vez mayor bajo la curva, a la derecha de $t = 1$.

**Teorema 5.2 (Teorema fundamental del Cálculo, parte II)**
Si $f$ es continua en $[a, b]$ y $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, entonces $F'(x) = f(x)$ para todo $x$ en $[a, b]$.

**Demostración**
Por la definición de derivada,

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left[ \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left[ \int_a^{x+h} f(t)\,dt + \int_x^a f(t)\,dt \right] = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,dt, \tag{5.5}$$

donde hemos intercambiado los límites de integración usando la ecuación (4.2) y después hemos combinado las dos integrales de acuerdo con el teorema 4.2 (iv).

Mire con atención el último término de (5.5). Reconocerá en él el límite para el valor medio de $f(x)$ en el intervalo $[x, x + h]$ (si $h > 0$). Por el teorema integral del valor medio (teorema 4.4),

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(c), \tag{5.6}$$

para algún $c$ entre $x$ y $x + h$. Finalmente, ya que $c$ está entre $x$ y $x + h$, es claro que $c \to x$ cuando $h \to 0$. Como $f$ es continua, de (5.5) y (5.6) se sigue que

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,dt = \lim_{h \to 0} f(c) = f(x),$$

como queríamos demostrar.

**Advertencia**

La parte II del teorema fundamental dice que **toda** función continua $f$ tiene una primitiva, a saber: $\int_a^x f(t)\,dt$.

**Ejemplo 5.7** **Aplicación del teorema fundamental (parte II)**

Hallar $F'(x)$ siendo $F(x) = \int_1^x (t^2 - 2t + 3)\,dt$.

**Solución** Aquí el integrando es $f(t) = t^2 - 2t + 3$. Por el teorema 5.2, la derivada es

$$F'(x) = f(x) = x^2 - 2x + 3.$$

Es decir, $F'(x)$ es la función del integrando con $t$ reemplazada por $x$. ¡Así de fácil!

Antes de enfrentarnos a ejemplos más enrevesados, miremos el ejemplo 5.7 con detalle con el fin de sentirnos cómodos con el significado de la parte II del teorema fundamental. En primer lugar, podemos usar la parte I del teorema fundamental para obtener

$$F(x) = \int_1^x (t^2 - 2t + 3)\,dt = \frac{1}{3} t^3 - t^2 + 3t \Big|_1^x = \left( \frac{1}{3} x^3 - x^2 + 3x \right) - \left( \frac{1}{3} - 1 + 3 \right).$$

Es fácil derivar esta función directamente y se obtiene así

$$F'(x) = \frac{1}{3} 3x^2 - 2x + 3 - 0 = x^2 - 2x + 3.$$

El límite inferior de integración (constante 1, en este caso) no afecta a $F'(x)$. En la definición de $F(x)$, el límite inferior simplemente especifica el valor de la constante que se resta al final del cálculo de $F(x)$. Como la derivada de cualquier constante es 0, ese valor no afecta a $F'(x)$.

**Ejemplo 5.8** **Aplicación del teorema fundamental (parte II) y de la regla de la cadena**

Si $F(x) = \int_2^{x^2} \cos t\, dt$, hallar $F'(x)$.

**Solución** Llamando $u(x) = x^2$, se tiene

$$F(x) = \int_2^{u(x)} \cos t\, dt.$$

Por la regla de la cadena,

$$F'(x) = \cos u(x)\, \frac{du}{dx} = \cos u(x)(2x) = 2x \cos x^2.$$

**Nota 5.2**

La forma general de la regla de la cadena utilizada en el ejemplo 5.8 es: si

$$F(x) = \int_a^{u(x)} f(t)\, dt,$$

entonces

$$F'(x) = f(u(x))u'(x),$$

o sea,

$$\frac{d}{dx} \int_a^{u(x)} f(t)\, dt = f(u(x))u'(x).$$

**Ejemplo 5.9** **Una integral con los dos límites de integración variables**

Si $F(x) = \int_{2x}^{x^2} \sqrt{t^2 + 1}\, dt$, hallar $F'(x)$.

**Solución** El teorema fundamental sólo es aplicable a integrales definidas con variables en el límite superior, así que lo primero que hemos de hacer es reescribir la integral, por el teorema 4.2 (iv), como

$$F(x) = \int_{2x}^{0} \sqrt{t^2 + 1}\, dt + \int_0^{x^2} \sqrt{t^2 + 1}\, dt = -\int_0^{2x} \sqrt{t^2 + 1}\, dt + \int_0^{x^2} \sqrt{t^2 + 1}\, dt,$$

donde además hemos usado la ecuación (4.2) para intercambiar los límites de integración. Usando la regla de la cadena como en el ejemplo 5.8, obtenemos

$$F'(x) = -\sqrt{(2x)^2 + 1}\, \frac{d}{dx}(2x) + \sqrt{(x^2)^2 + 1}\, \frac{d}{dx}(x^2)$$

$$= -2\sqrt{4x^2 + 1} + 2x\sqrt{x^4 + 1}.$$

Antes de analizar la importancia teórica de las dos partes del teorema fundamental del Cálculo, recordemos, en un par de ejemplos, razones por las que uno está interesado en calcular integrales y derivadas.

**Ejemplo 5.10** **Distancia recorrida por un objeto en caída**

La velocidad vertical de un paracaidista en caída libre viene dada por $v(t) = 30(1 - e^{-t})$ pies/s durante los primeros 5 segundos del salto. Calcular la distancia vertical recorrida.

**Solución** Recordemos que la distancia $d$ viene dada por la integral definida (correspondiente al área bajo la curva)

$$d = \int_0^5 (30 - 30e^{-t})\, dt = 30t + 30e^{-t}\Big|_0^5$$

$$= (150 + 30e^{-5}) - (0 + 30e^{0}) = 120 + 30e^{-5} \approx 120{,}2 \text{ pies}.$$

Sabemos que la velocidad es el *ritmo instantáneo de cambio* de la función distancia respecto al tiempo. En el ejemplo 5.10 vemos que la integral definida de la velocidad da el *cambio total* de la función distancia en el intervalo de tiempo dado. Una interpretación similar de la derivada y de la integral definida es válida para muchas magnitudes de interés. En el próximo ejemplo estudiaremos el ritmo de cambio de la cantidad de agua en un depósito.

**Ejemplo 5.11** **Ritmo de cambio y cambio total del volumen de agua en un depósito**

En un depósito, el agua entra y sale de forma tal que el ritmo de cambio neto (es decir, el de entrada menos el de salida) es $f(t) = 20(t^2 - 1)$ litros por minuto. (a) En $0 \le t \le 3$, determinar cuándo crece y cuándo decrece el nivel del agua. (b) Si el depósito contiene 200 litros en el instante $t = 0$, ¿cuántos litros hay en el instante $t = 3$?

**Solución** Sea $w(t)$ el número de litros de agua en el instante $t$. (a) El nivel del agua decrece si $w'(t) = f(t) < 0$. Se tiene

$$f(t) = 20(t^2 - 1) < 0, \text{ si } 0 \le t < 1.$$

Y crece cuando $w'(t) = f(t) > 0$. Ahora

$$f(t) = 20(t^2 - 1) > 0, \text{ si } 1 < t \le 3.$$

(b) Partimos de que $w'(t) = 20(t^2 - 1)$. Integrando de $t = 0$ a $t = 3$, se obtiene

$$\int_0^3 w'(t)\,dt = \int_0^3 20(t^2 - 1)\,dt$$

Evaluando las dos integrales resulta

$$w(3) - w(0) = 20\left(\frac{t^3}{3} - t\right)\Big|_{t=0}^{t=3}.$$

Como $w(0) = 200$, se tiene

$$w(3) - 200 = 20(9 - 3) = 120$$

y, por tanto,

$$w(3) = 200 + 120 = 320.$$

Así que el depósito contiene 320 litros en el instante $t = 3$.

En el ejemplo siguiente hacemos uso de la parte II del teorema fundamental para extraer información sobre una función complicada. Queremos hacer énfasis en que, aunque no sabemos calcular la integral, el teorema fundamental ofrece valiosa información acerca de la función.

**Ejemplo 5.12** **Recta tangente para una función definida por una integral**

Hallar una ecuación de la recta tangente a la función $F(x) = \int_4^{x^2} \ln(t^3 + 4)\,dt$ en $x = 2$.

**Solución** No podemos calcular casi ningún valor exacto de la función y, sin embargo, ¡es fácil encontrar una ecuación de su recta tangente! Según la parte II del teorema fundamental y la regla de la cadena, la derivada es

$$F'(x) = \ln[(x^2)^3 + 4]\,\frac{d}{dx}(x^2) = \ln[(x^2)^3 + 4](2x).$$

Por tanto, la pendiente en $x = 2$ es $F'(2) = \ln(68)(4) \approx 16{,}878$. La recta tangente pasa por el punto con $x = 2$ e $y = F(2) = \int_4^4 \ln(t^3 + 4)\,dt = 0$ (ya que el límite superior es igual al límite inferior). Así, pues, una ecuación de la recta tangente es

$$y = 4 \ln 68(x - 2).$$

Al comienzo de esta sección comentamos la importancia del teorema fundamental en la unificación del Cálculo diferencial y el Cálculo integral. Ahora que nos hemos ocupado de su vertiente práctica, cerraremos la sección dejando claro que las dos partes del teorema fundamental son dos caras de una misma moneda teórica. La parte I enseña que si podemos hallar una primitiva del integrando, calcularemos fácilmente la integral definida. La parte II afirma que toda función continua tiene primitiva en forma de una integral definida con un límite de integración variable.

Recordemos las conclusiones de las partes I y II del teorema fundamental del Cálculo:

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

y

$$\frac{f}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x).$$

En ambos casos se está diciendo que derivación e integración son, en un cierto sentido, *operaciones inversas*: sus efectos (en cierto sentido y bajo hipótesis apropiadas) se cancelan entre sí.

## EJERCICIOS 4.5

1. Para explorar gráficamente la parte I del teorema fundamental, supongamos primero que $F(x)$ es creciente en el intervalo $[a, b]$. Explicar por qué las expresiones $F(b) - F(a)$ y $\int_a^b F'(x)\,dx$ han de ser positivas. Argumentar además por qué cuanto más deprisa crece $F(x)$, mayores son esas dos expresiones. Análogamente, explicar por qué ambas expresiones serán negativas si $F(x)$ es decreciente.

2. La parte I del teorema fundamental se puede pensar en términos de posición $s(t)$ y velocidad $v(t) = s'(t)$. Empecemos suponiendo $v(t) \geq 0$. Explicar por qué $\int_a^b v(t)\,dt$ da la distancia total recorrida y por qué es igual a $s(b) - s(a)$. Discutir qué cambia si $v(t) < 0$.

3. Para explorar gráficamente la parte II del teorema fundamental, consideremos la función $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Si $f(t) > 0$ en $[a, b]$, explicar por qué $g'(x)$ debe ser positiva. Además, cuanto mayor sea $f(t)$, mayor será $g'(x)$. Análogamente, explicar por qué $f(t) < 0$ implica que $g'(x)$ también será negativa.

4. En la parte I del teorema fundamental, $F$ es *cualquier* primitiva de $f$. Recordemos que dos primitivas cualesquiera de $f$ difieren en una constante. Explicar por qué $F(b) - F(a)$ está **bien definido**; es decir, si $F_1$ y $F_2$ son primitivas distintas de $f$, argumentar por qué $F_1(b) - F_1(a) = F_2(b) - F_2(a)$. Al evaluar una integral definida, ¿por qué no es necesario incluir «+$c$» en la primitiva?

**En los ejercicios 5-30, usar la parte I del teorema fundamental para calcular cada integral exactamente.**

5. $\int_0^2 (2x - 3)\,dx$
6. $\int_0^3 (x^2 - 2)\,dx$
7. $\int_{-1}^1 (x^3 + 2x)\,dx$
8. $\int_0^2 (x^3 + 3x - 1)\,dx$
9. $\int_0^4 (\sqrt{x} + 3x)\,dx$
10. $\int_1^2 (4x - 2/x^2)\,dx$
11. $\int_0^1 (x\sqrt{x} + x^{-1/2})\,dx$
12. $\int_0^8 (\sqrt[3]{x} - x^{2/3})\,dx$
13. $\int_0^{\pi/2} 2 \operatorname{sen} x\,dx$
14. $\int_{-\pi}^0 4 \cos x\,dx$
15. $\int_0^{\pi/4} \sec x \tan x\,dx$
16. $\int_0^{\pi/4} \sec^2 x\,dx$
17. $\int_{\pi/2}^{\pi} (2 \operatorname{sen} x - \cos x)\,dx$
18. $\int_0^{\pi} 3 \operatorname{sen} 2x\,dx$
19. $\int_0^1 (e^x - e^{-x})\,dx$
20. $\int_{-1}^1 (e^x - e^{-x})\,dx$
21. $\int_0^3 (3e^{2x} - x^2)\,dx$
22. $\int_0^2 (3x - e^{-3x})\,dx$
23. $\int_{-1}^1 (e^x + e^{-x})^2\,dx$
24. $\int_0^1 \frac{e^{2x} - 1}{e^x}\,dx$
25. $\int_1^4 \frac{x - 3}{x}\,dx$
26. $\int_1^2 \frac{x^2 - 3x + 4}{x^2}\,dx$
27. $\int_0^4 x(x - 2)\,dx$
28. $\int_0^{\pi/3} \frac{3}{\cos^2 x}\,dx$
29. $\int_0^3 (x^3 - \operatorname{sen} x)\,dx$
30. $\int_{-2}^0 (2x + e^x)\,dx$

**En los ejercicios 31-40, usar el teorema fundamental cuando sea posible o estimar la integral mediante sumas de Riemann. (Ayuda: Seis de las integrales se pueden calcular con las fórmulas para las primitivas que hemos visto hasta ahora).**

31. $\int_0^2 \sqrt{x^2 + 1}\,dx$
32. $\int_0^2 (\sqrt{x} + 1)^2\,dx$

33. $\int_0^1 (e^x + 1)^2\, dx$

34. $\int_0^1 e^{x^2+1}\, dx$

35. $\int_1^4 \frac{x^2}{x^2+4}\, dx$

36. $\int_1^4 \frac{x^2+4}{x^2}\, dx$

37. $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x^2\, dx$

38. $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} 2x\, dx$

39. $\int_0^{\pi/4} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\, dx$

40. $\int_0^{\pi/4} \frac{\tan x}{\sec x}\, dx$

**En los ejercicios 41-46, hallar la derivada $f'(x)$.**

41. $f(x) = \int_0^x (t^2 - 3t + 2)\, dt$

42. $f(x) = \int_2^x (t^2 - 3t - 4)\, dt$

43. $f(x) = \int_0^{x^2} (e^{-t^2} + 1)\, dt$

44. $f(x) = \int_2^{x^2} (e^{-t^2} - 1)\, dt$

45. $f(x) = \int_x^{-1} \ln(t^2 + 1)\, dt$

46. $f(x) = \int_x^2 \sec t\, dt$

**En los ejercicios 47-54, calcular el área que se especifica.**

47. El área entre el eje $x$ y la curva $y = 4 - x^2$.

48. El área entre el eje $x$ y la curva $y = 4x - x^2$.

49. El área bajo el eje $x$ y sobre la curva $y = x^2 - 4$.

50. El área bajo el eje $x$ y sobre la curva $y = x^2 - 4x$.

51. El área de la región acotada por $y = x^2$, $x = 2$ y el eje $x$.

52. El área de la región acotada por $y = x^3$, $x = 3$ y el eje $x$.

53. El área entre $y = \operatorname{sen} x$ y el eje $x$, en $0 \le x \le \pi$.

54. El área entre $y = \operatorname{sen} x$ y el eje $x$, en $-\pi/2 \le x \le \pi/4$.

**En los ejercicios 55-58, hallar una ecuación de la recta tangente en el valor de $x$ dado.**

55. $y = \int_0^x \operatorname{sen} \sqrt{t^2 + \pi^2}\, dt$, $x = 0$

56. $y = \int_{-1}^x \ln(t^2 + t^2 + 2)\, dt$, $x = -1$

57. $y = \int_2^x \cos(\pi t^3)\, dt$, $x = 2$

58. $y = \int_0^x e^{-t^2+1}\, dt$, $x = 0$

59. Usar la derivada del ejercicio 41 para localizar e identificar los extremos locales de $f(x) = \int_0^x (t^2 - 3t + 2)\, dt$.

60. Elsa y Pablo conducen sus automóviles a velocidades dadas, respectivamente, por $f(t) = 55 + 10 \cos \frac{\pi}{2} t$ km/h y $g(t) = 50 + 2t$ km/h. Supuesto que parten del mismo lugar en $t = 0$, calcular $\int_0^x [f(t) - g(t)]\, dt$ e interpretar la integral en términos de una carrera entre ambos.

**En los ejercicios 61 y 62, (a) explicar cómo se sabe que el valor propuesto de la integral es falso y (b) localizar el error.**

61. $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\, dx = -\frac{1}{x}\Big|_{x=-1}^{x=1} = -1 - (1) = -2$

62. $\int_0^{\pi} \sec^2 x\, dx = \tan x\Big|_{x=0}^{x=\pi} = \tan \pi - \tan 0 = 0.$

**En los ejercicios 63-70, hallar la función posición $s(t)$ a partir de la función velocidad o aceleración y los valores iniciales dados. Tomar como unidades metros y segundos.**

63. $v(t) = 40 - \operatorname{sen} t$, $s(0) = 2$

64. $v(t) = 30 + 4 \cos 3t$, $s(0) = 0$

65. $v(t) = 25(1 - e^{-2t})$, $s(0) = 0$

66. $v(t) = 10e^{-t}$, $s(0) = 2$

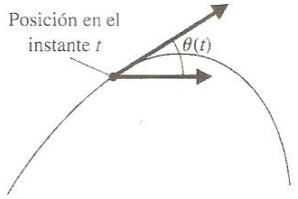
67. $a(t) = 4 - t$, $v(0) = 8$, $s(0) = 0$

68. $a(t) = 16 - t^2$, $v(0) = 0$, $s(0) = 30$

69. $a(t) = 24 + e^{-t}$, $v(0) = 0$, $s(0) = 0$

70. $a(t) = 3e^{-2t}$, $v(0) = -4$, $s(0) = 0$

71. Si $\theta(t)$ es el ángulo entre la trayectoria de un móvil y un rayo fijo (véase figura), la **velocidad angular** es $\omega(t) = \theta'(t)$ y la **aceleración angular** $\alpha(t) = \omega'(t)$.




Un bateador de béisbol mueve el bate con una aceleración constante $\alpha(t) = 10$ rad/s$^2$ y golpea la pelota 0,8 segundos después. ¿Cuál es la velocidad angular? La velocidad (lineal) del punto del bate situado a 3 pies del punto de giro (en el cuerpo del bateador) es $v = 3\omega$. ¿A qué velocidad se mueve ese punto en el momento del golpe? ¿Qué ángulo ha girado el bate antes de golpear?

72. Un golfista gira el palo $3\pi/2$ radianes con una aceleración angular constante de $\alpha$ rad/s$^2$. Si el punto de impacto está situado a 4 pies del punto de giro (en el cuerpo del jugador), la velocidad (lineal) del palo es $v = 4\omega$. Hallar el valor de $\alpha$ que produce una velocidad, en el momento del golpe, de 100 mph.

73. Entre 1970 y 1974, la función $16{,}1e^{0{,}07t}$ aproxima el consumo de petróleo, en millones de barriles, en Estados Unidos, con $t = 0$

correspondiendo a 1970. Con la subida de precios de 1974, el consumo pasó a ser aproximadamente $21{,}3e^{0{,}04(t-4)}$. Probar que las dos funciones dan el mismo ritmo de consumo aproximadamente para 1974. Calcular $\int_4^{10} 16{,}1e^{0{,}07t}\,dt$ y $\int_4^{10} 21{,}3e^{0{,}04(t-4)}\,dt$ y la cantidad ahorrada por la reducción en el consumo.

74. El trabajo realizado por una fuerza $F(x)$ al mover un objeto desde $x = a$ hasta $x = b$ viene dado por $\int_a^b F(x)\,dx$. Conforme el objeto se desplaza, el punto $b$ cambia, de modo que $b = b(t)$ y el trabajo es una función del tiempo. La derivada de esta función define la **potencia**. Demostrar que la potencia $\frac{d}{dt}\int_a^{b(t)} F(x)\,dx$ es igual a $F(b(t))b'(t)$.

**En los ejercicios 75 y 76, usar el resultado del ejercicio 74 para calcular la potencia, en caballos de vapor, en las situaciones siguientes. (Un caballo de vapor = 550 libras-pies/segundo).**

75. $F(x) = 1.000$ lb, $b'(t) = 130$ pies/s

76. $F(x) = 1.000e^{-x}$ lb, $b'(t) = 100 - t$ pies/s

**En los ejercicios 77-82, hallar el valor medio de la función en el intervalo que se especifica.**

77. $f(x) = x^2 - 1$, $[1, 3]$

78. $f(x) = x^2 + 2x$, $[0, 1]$

79. $f(x) = 2x - 2x^2$, $[0, 1]$

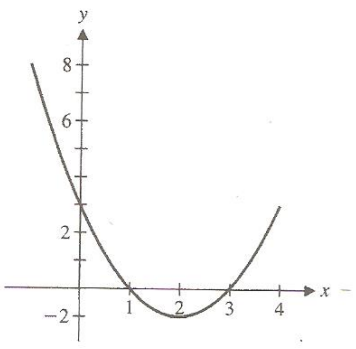
80. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$, $[1, 2]$

81. $f(x) = \cos x$, $[0, \pi/2]$

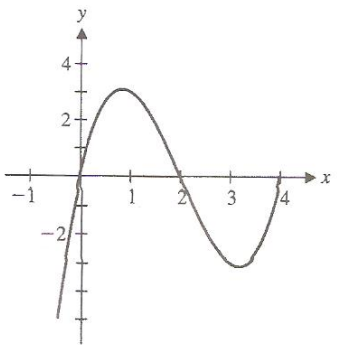
82. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $[0, \pi/2]$

**En los ejercicios 83 y 84, usar la gráfica para ordenar, de menor a mayor, $\int_0^1 f(x)\,dx$, $\int_0^2 f(x)\,dx$ y $\int_0^3 f(x)\,dx$.**

83.




84.




85. Deducir la **regla de Leibniz**:

$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt = f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x).$$

86. Consideremos que una enfermedad contagiosa tiene un período de incubación, tras la infección (como ocurre con el HIV y el SIDA). Supongamos que el ritmo de infección es constante, $f(t) = 100$ personas/mes y que la incubación tiene una distribución $b(t) = \frac{1}{900}te^{-t/30}$ mes$^{-1}$. El ritmo al que las personas desarrollan la enfermedad en el tiempo $t = T$ viene dado por $r(T) = \int_0^T f(t)b(T-t)\,dt$ personas/mes. Con un PCS, hallar expresiones para el ritmo $r(T)$ y para el número de personas $p(x) = \int_0^x r(T)\,dT$ que desarrollan la enfermedad entre $t = 0$ y $t = x$. Explicar por qué la gráfica de $y = r(T)$ tiene una asíntota horizontal. Para $x$ pequeños, la gráfica de $y = p(x)$ es cóncava hacia arriba. Explicar qué ocurre para $x$ grandes. Repetir eso mismo para $f(t) = 100 + 10$ sen $t$, donde el ritmo de infección sube y baja.

87. Al resolver una ecuación diferencial de la forma $\frac{dy}{dt} = f(y)$ en la función incógnita $y(t)$, suele ser conveniente usar una **función potencial** $V(y)$ tal que $-\frac{dV}{dy} = f(y)$. Si $f(y) = y - y^3$, hallar una función potencial $V(y)$. Hallar los mínimos locales de $V(y)$ y usar una gráfica de $V(y)$ para explicar por qué se llama un potencial de «doble pozo». Explicar cada paso de este cálculo:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dy}\,\frac{dy}{dt} = -f(y)\,f(y) \le 0.$$

Como $\frac{dV}{dt} \le 0$, ¿$V$ crece o decrece con el transcurso del tiempo? Utilizar la gráfica de $V$ para predecir los posibles valores de $\lim_{t\to\infty} y(t)$. Así, pues, podemos predecir el valor límite de la solución de una ecuación diferencial sin resolverla. Usar esta técnica para predecir el valor de $\lim_{t\to\infty} y(t)$ si $y' = 2 - 2y$.

## 4.6 INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN

El teorema fundamental del Cálculo es un instrumento potente para evaluar integrales definidas. Pero su uso requiere conocer una primitiva. En esta sección mejoraremos nuestra capacidad en esa tarea gracias a una técnica muy útil: la **integración por sustitución** (o por **cambio de variable**). Como ya hemos comprobado, necesitamos la regla de la cadena para hallar las derivadas de muchas funciones. La integración por sustitución proporciona un mecanismo para identificar cuándo un integrando es el resultado de una derivación mediante la regla de la cadena.

### Ejemplo 6.1 Búsqueda de una primitiva por prueba y error

Hallar $\int 2xe^{x^2}\,dx$.

**Solución** La idea es hallar una función $F(x)$ tal que $F'(x) = 2xe^{x^2}$. Sentimos la tentación de pensar que, puesto que $x^2$ es una primitiva de $2x$,

$$F(x) = x^2e^{x^2}$$

es una primitiva de $2xe^{x^2}$. Para ver que no es cierto, basta derivar $x^2e^{x^2}$. Por la regla del producto,

$$\frac{d}{dx}(x^2e^{x^2}) = 2xe^{x^2} + x^2e^{x^2}(2x) \neq 2xe^{x^2}.$$

Se acabó nuestra conjetura. Antes de hacer otra, miremos qué ha fallado en la primera. La regla del producto produce dos términos y nuestra derivada objetivo $2xe^{x^2}$ tiene sólo uno. Así, pues, debemos abandonar conjeturas de tipo producto. Una clave importante es que $2x$ es la derivada de $x^2$ y $x^2$ aparece ya en el integrando como exponente de $e^{x^2}$. Para comprender el interés de esa observación, basta derivar $F(x) = e^{x^2}$. Por la regla de la cadena,

$$F'(x) = e^{x^2}\frac{d}{dx}(x^2) = 2xe^{x^2},$$

que es exactamente nuestro integrando. Por tanto, el factor $2x$ en el cálculo de la derivada proviene de la regla de la cadena, no de la regla del producto. Para terminar este ejemplo, recordemos que es necesario sumar una constante arbitraria, de modo que obtenemos

$$\int 2xe^{x^2}\,dx = e^{x^2} + c.$$

Queremos extraer de la experiencia con el ejemplo 6.1 un procedimiento aplicable a un gran número de integrales. Nótese que el factor $2x$ en el integrando $2xe^{x^2}$ es la derivada del exponente $x^2$. En general, cuando una parte del integrando sea la derivada de otra parte, hay que pensar en la regla de la cadena. Desarrollaremos un procedimiento simple para ensayar esa idea. Antes, reflexionemos algo sobre la regla de la cadena.

Si $F$ es una primitiva de $f$, de la regla de la cadena se sigue que

$$\frac{d}{dx}[F(u)] = F'(u)\frac{du}{dx} = f(u)\frac{du}{dx}.$$

Por tanto,

$$\int f(u)\frac{du}{dx}\,dx = \int \frac{d}{dx}[F(u)]\,dx = F(u) + c = \int f(u)\,du, \tag{6.1}$$

ya que $F$ es primitiva de $f$. Los dos miembros extremos de (6.1) sugieren que

$$du = \frac{du}{dx}\,dx.$$

**Advertencia**

Al decidir la elección de la nueva variable, hay que tener en cuenta:

- los términos que sean derivada de otras partes del integrando,
- los términos que sean especialmente molestos (que hay que intentar simplificar con el cambio de variable).

Así, pues, si no podemos hallar la integral $\int h(x)\,dx$ directamente, buscamos una nueva variable $u$ y una función $f(u)$ tales que

$$\int h(x)\,dx = \int f(u(x))\,\frac{du}{dx}\,dx = \int f(u)\,du,$$

donde la segunda integral sea más fácil que la primera.

**Ejemplo 6.2 Integración por sustitución**

Hallar $\int (x^3 + 5)^{100}(3x^2)\,dx$.

**Solución** Tal vez no sepa hallar esta integral tal como está escrita. (No se sienta deprimido por eso, es lo habitual). Sin embargo, observemos que

$$\frac{d}{dx}(x^3 + 5) = 3x^2,$$

que es parte del integrando. Eso invita a hacer la sustitución $u = x^3 + 5$, con lo cual $du = \frac{d}{dx}(x^3 + 5)\,dx = 3x^2\,dx$. Así, obtenemos

$$\int \underbrace{(x^3 + 5)^{100}}_{u^{100}}\,\underbrace{(3x^2)\,dx}_{du} = \int u^{100}\,du = \frac{u^{101}}{101} + c.$$

No hemos terminado. Falta regresar a la variable original $x$:

$$\int (x^3 + 5)^{100}(3x^2)\,dx = \frac{u^{101}}{101} + c = \frac{(x^3 + 5)^{101}}{101} + c.$$

Siempre es buena idea comprobar la primitiva. (¡Recuerde que derivación e integración son operaciones inversas!). En este caso, en efecto,

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{(x^3 + 5)^{101}}{101}\right] = \frac{101(x^3 + 5)^{100}(3x^2)}{101} = (x^3 + 5)^{100}(3x^2),$$

que es el integrando original. Esto confirma que la primitiva encontrada es correcta.

## INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN

La técnica de integración por sustitución ilustrada en el ejemplo 6.2 consta de los siguientes pasos.

- **Elegir una expresión para $u$:** una elección frecuente es la expresión interior de una composición de funciones. (En el ejemplo 6.2, nótese que $x^3 + 5$ es el interior de $(x^3 + 5)^{100}$).
- **Hallar** $du = \frac{du}{dx}\,dx$.
- **Sustituir en todas partes** del integrando original expresiones en $u$ y $du$.
- **Calcular** la integral (en $u$) resultante. Si todavía no puede calcularla, tal vez deba intentar otra elección distinta para $u$.
- **Sustituir $u$** en la primitiva obtenida por su expresión en términos de $x$.

No hay que perder de vista nunca que hallar primitivas es el proceso inverso de la derivación. No hay reglas nuevas que aprender acerca del cálculo de primitivas. Eso ayuda a encontrarlas y a comprobar que son correctas. En el próximo ejemplo, no tenemos la suerte de disponer en el integrando de la derivada que necesitamos.

### Ejemplo 6.3 Aplicación del cambio de variable: una potencia dentro de un coseno

Hallar $\int x \cos x^2 \, dx$.

**Solución** Nótese que

$$\frac{d}{dx} x^2 = 2x.$$

Sin embargo, no tenemos exactamente eso en el integrando. Pero todo es cuestión de pensar un poco. Una constante se puede sacar o meter en una integral. Así que podemos reescribir la integral como

$$\int x \cos x^2 \, dx = \frac{1}{2} \int 2x \cos x^2 \, dx.$$

Ahora hacemos $u = x^2$, con lo que $du = 2x \, dx$, y obtenemos

$$\int x \cos x^2 \, dx = \frac{1}{2} \int \underbrace{\cos x^2}_{\cos u} \underbrace{(2x) \, dx}_{du}$$

$$= \frac{1}{2} \int \cos u \, du = \frac{1}{2} \operatorname{sen} u + c = \frac{1}{2} \operatorname{sen} x^2 + c.$$

De nuevo, como comprobación, vemos que la derivada

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2} \operatorname{sen} x^2\right) = \frac{1}{2} \cos x^2 (2x) = x \cos x^2$$

reproduce el integrando original.

### Ejemplo 6.4 Aplicación del cambio de variable: una función trigonométrica dentro de una potencia

Hallar $\int (3 \operatorname{sen} x + 4)^5 \cos x \, dx$.

**Solución** Como la mayoría de las integrales, probablemente no puede evaluar ésta tal como ha sido dada. Así que ¿qué observa en el integrando? Tenga presente que, entre otras cosas, buscamos en él partes que sean derivadas de otras partes. Hay un sen $x$ y un cos $x$, y sabemos que $\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x$. Por tanto, hacemos $u = 3 \operatorname{sen} x + 4$, con lo cual $du = 3 \cos x \, dx$. De esa forma obtenemos

$$\int (3 \operatorname{sen} x + 4)^5 \cos x \, dx = \frac{1}{3} \int \underbrace{(3 \operatorname{sen} x + 4)^5}_{u^5} \underbrace{(3 \cos x) \, dx}_{du}$$

$$= \frac{1}{3} \int u^5 \, du = \left(\frac{1}{3}\right) \frac{u^6}{6} + c$$

$$= \frac{1}{18} (3 \operatorname{sen} x + 4)^6 + c.$$

A veces, como en el próximo ejemplo, es preciso analizar con más cuidado el integrando para encontrar en él una parte que sea derivada de otra parte.

### Ejemplo 6.5 Aplicación del cambio de variable: Una raíz dentro de una función seno

Hallar $\int \frac{\operatorname{sen} \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$.

**Solución** Esta integral no es del todo obvia. Puestos a intentar algo, ¿qué elegir como nueva variable $u$? Observemos que $\operatorname{sen} \sqrt{x} = \operatorname{sen} x^{1/2}$, así que hacemos $u = \sqrt{x} = x^{1/2}$ (lo de «dentro»), con lo que $du = \frac{1}{2} x^{-1/2}\, dx = \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx$. Como hay un $\frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$ en el integrando, podemos culminar con éxito:

$$\int \frac{\operatorname{sen} \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx = 2 \int \underbrace{\operatorname{sen} \sqrt{x}}_{\operatorname{sen} u} \underbrace{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) dx}_{du}$$

$$= 2 \int \operatorname{sen} u\, du = -2 \cos u + c = -2 \cos \sqrt{x} + c.$$

### Ejemplo 6.6 Cuando el numerador es la derivada del denominador

Hallar $\int \frac{x^2}{x^3 + 5}\, dx$.

**Solución** Como $\frac{d}{dx}(x^3 + 5) = 3x^2$, podemos hacer $u = x^3 + 5$, con lo que $du = 3x^2\, dx$. Así, se obtiene

$$\int \frac{x^2}{x^3 + 5}\, dx = \frac{1}{3} \int \underbrace{\frac{1}{x^3 + 5}}_{u} \underbrace{(3x^2)\, dx}_{du} = \frac{1}{3} \int \frac{1}{u}\, du$$

$$= \frac{1}{3} \ln |u| + c = \frac{1}{3} \ln |x^3 + 5| + c.$$

Este último ejemplo ilustra un tipo común de integrales en las que el numerador es la derivada del denominador. En general, les es aplicable el siguiente teorema.

**Teorema 6.1**
Para cualquier función continua $f$,

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln |f(x)| + c,$$

supuesto que $f(x) \neq 0$.

**Demostración**
Sea $u = f(x)$. Entonces $du = f'(x)\, dx$ y

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \int \underbrace{\frac{1}{f(x)}}_{u} \underbrace{f'(x)\, dx}_{du}$$

$$= \int \frac{1}{u}\, du = \ln |u| + c = \ln |f(x)| + c,$$

como queríamos demostrar. Como demostración alternativa, puede hallar simplemente $\frac{d}{dx} \ln |f(x)|$ para ver que se obtiene el integrando.

En realidad, ya habíamos enunciado este resultado en la sección 4.1 (corolario 1.2), pero es importante repetirlo aquí en el contexto de la integración por sustitución.

### Ejemplo 6.7 Primitiva de la función tangente

Hallar $\int \tan x\, dx$.

**Solución** Nótese que esta integral **no** está entre nuestras reglas básicas de integración. No obstante, podemos hallarla haciendo

$$\int \tan x\, dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\, dx = -\int \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{u} \underbrace{(-\operatorname{sen} x)\, dx}_{du}$$

$$= -\int \frac{1}{u}\, du = -\ln|u| + c = -\ln|\cos x| + c,$$

donde hemos tenido en cuenta que $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x$.

Hasta ahora todos los ejemplos se han resuelto encontrando una parte en el integrando que es la derivada de otra parte. No ocurre lo mismo en la próxima integral. En ella se hace la sustitución para evitar un término molesto del integrando.

### Ejemplo 6.8 Una sustitución que permite desarrollar la integral

Hallar $\int x\sqrt{2-x}\, dx$.

**Solución** Es obvio que no puede efectuar la integración tal como está escrita. Y si busca un término que sea derivada de otro, se encontrará con las manos vacías. El problema está en que el integrando contiene la raíz de una suma (o diferencia). Parece buena idea sustituir la expresión bajo la raíz, $u = 2 - x$, con lo que $du = -dx$. Pero ¿qué hacemos con la otra $x$ del integrando? Bueno, de $u = 2 - x$ se sigue $x = 2 - u$, y haciendo esas sustituciones en el integrando, queda

$$\int x\sqrt{2-x}\, dx = (-1)\int \underbrace{x}_{2-u}\underbrace{\sqrt{2-x}}_{\sqrt{u}}\underbrace{(-1)\, dx}_{du}$$

$$= -\int (2-u)\sqrt{u}\, du.$$

Tiene derecho a dudar si esta integral es más fácil que la original. Pues bien, aunque no podemos evaluarla directamente, si efectuamos el producto obtenemos

$$\int x\sqrt{2-x}\, dx = -\int (2-u)\sqrt{u}\, du.$$

$$= -\int (2u^{1/2} - u^{3/2})\, du$$

$$= -2\,\frac{u^{3/2}}{\left(\frac{3}{2}\right)} + \frac{u^{5/2}}{\left(\frac{5}{2}\right)} + c$$

$$= -\frac{4}{3}u^{3/2} + \frac{2}{5}u^{5/2} + c$$

$$= -\frac{4}{3}(2-x)^{3/2}\,\frac{2}{5}(2-x)^{5/2} + c.$$

Compruebe, por derivación, que la primitiva es correcta.

## Sustitución en integrales definidas

Al aplicar una sustitución con el fin de calcular una integral definida sólo hay una novedad: al cambiar la variable, hay que cambiar también los límites de integración. Salvo ese paso adicional, el proceso es el mismo que en los ejemplos precedentes. Si introducimos una nueva variable $u$, hay que cambiar los límites en $x$, $x = a$ y $x = b$, por los límites en $u$: $u = u(a)$ y $u = u(b)$. Se tiene

$$\int_a^b f(u(x))u'(x)\,dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,du.$$

### Ejemplo 6.9 Sustitución en una integral definida

Calcular $\int_1^2 x^3\sqrt{x^4+5}\,dx$.

**Solución** Seguramente no sabe calcular esta integral directamente. Sin embargo, el hecho de que $\frac{d}{dx}(x^4+5) = 4x^3$ sugiere la sustitución $u = x^4 + 5$ con $du = 4x^3\,dx$. En cuanto a los límites de integración, nótese que cuando $x = 1$,

$$u = x^4 + 5 = 1^4 + 5 = 6$$

y cuando $x = 2$,

$$u = x^4 + 5 = 2^4 + 5 = 21.$$

**Advertencia**

Siempre que cambie de variable debe cambiar los límites de integración.

Ahora se tiene

$$\int_1^2 x^3\sqrt{x^4+5}\,dx = \frac{1}{4}\int_1^2 \underbrace{\sqrt{x^4+5}}_{\sqrt{u}}\,\underbrace{(4x^3)\,dx}_{du} = \frac{1}{4}\int_6^{21}\sqrt{u}\,du$$

$$= \frac{1}{4}\frac{u^{3/2}}{\left(\frac{3}{2}\right)}\Bigg|_6^{21} = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{2}{3}\right)(21^{3/2} - 6^{3/2}).$$

Conviene hacer notar que como hemos adaptado los límites de integración a la nueva variable $u$, **no** ha sido necesario regresar a la variable $x$ en la evaluación final, como era el caso al hacer sustitución en las integrales indefinidas. (De hecho, si hubiéramos vuelto a la variable $x$, los límites a considerar en la evaluación hubieran sido los de $x$).

Hay otra forma de tratar las integrales definidas que tal vez se le haya ocurrido ya. Podemos hacer una sustitución con el fin de hallar una primitiva y volver entonces a la integral original para evaluarla. Aunque este método funciona en muchos de los problemas de este libro, desaconsejamos su uso por varias razones. En primer lugar, cambiar los límites de integración no es difícil y produce una expresión más sencilla. En segundo lugar, en muchas aplicaciones que requieren cambio de variable le será necesario cambiar los límites de integración, así que conviene habituarse lo antes posible.

### Ejemplo 6.10 Sustitución en una integral definida con una exponencial

Calcular $\int_0^{15} te^{-t^2/2}\,dt$.

**Solución** Como siempre, buscamos algo que sea derivada de otra parte en el integrando. Aquí observamos que $\frac{d}{dt}\left(\frac{-t^2}{2}\right) = -t$. Por tanto, hacemos $u = -\frac{t^2}{2}$ y $du = -t\,dt$. Como límite

superior de integración, $t = 15$ corresponde a $u = -\frac{(15)^2}{2} = -\frac{225}{2}$. Como límite inferior, $t = 0$ corresponde a $u = 0$. Así, pues,

$$\int_0^{15} te^{-t^2/2}\,dt = -\int_0^{15} \underbrace{e^{-t^2/2}}_{e^u}\,\underbrace{(-t)\,dt}_{du}$$

$$= -\int_0^{-225/2} e^u\,du = -e^u\Big|_0^{-112.5} = -e^{-112.5} + 1.$$

## EJERCICIOS 4.6

1. Nunca es *falsa* una sustitución en una integral si se hace correctamente, pero a veces es inútil. Así, haciendo $u = x^2$ concluimos que

$$\int x^3\sqrt{x^2+1}\,dx = \int \frac{1}{2}\,u\sqrt{u+1}\,du,$$

pero la nueva integral no es más fácil que la original. En este caso, otra sustitución sí simplifica la integral (¿cuál?). Se plantea la cuestión de cómo decidir si es conveniente una sustitución. Exponga algunas líneas a seguir para responder esa pregunta usando las integrales $\int x \operatorname{sen} x^2\,dx$ y $\int x \operatorname{sen} x^3\,dx$ como ejemplos ilustrativos.

2. Cuando tienen poca práctica, es frecuente que los estudiantes utilicen notación incorrecta en los pasos intermedios de una sustitución. Cuidado con esto, ¡peligra su aprobado! Examine cuidadosamente esta secuencia de igualdades y localice los errores. Haciendo $u = x^2$,

$$\int_0^2 x \operatorname{sen} x^2\,dx = \int_0^2 (\operatorname{sen} u)x\,dx = \int_0^2 (\operatorname{sen} u)\,\frac{1}{2}\,du$$

$$= -\frac{1}{2}\cos u\Big|_0^2 = -\frac{1}{2}\cos x^2\Big|_0^2$$

$$= -\frac{1}{2}\cos 4 + 1.$$

La respuesta final es correcta, pero debido a algunos errores esta resolución no merece crédito. Discutir los errores y rehacer correctamente el proceso.

3. Supongamos que un integrando contiene un factor de la forma $e^{f(x)}$, digamos $\int x^2e^{x^3}\,dx$. Explicar por qué hay que intentar la sustitución $u = f(x)$. Si esa sustitución no funciona, ¿qué se puede intentar a continuación? (Ayuda: Piense en $\int x^2e^{\ln x}\,dx$).

4. Si un integrando contiene una función compuesta $f(g(x))$, explique por qué conviene mirar si en el integrando aparece $g'(x)$. Discutir posibles sustituciones.

**En los ejercicios 5-8, hallar la integral mediante la sustitución propuesta.**

5. $\int x^2\sqrt{x^3+2}\,dx,\ u = x^3 + 2$
6. $\int x^3(x^4+1)^{-2/3}\,dx,\ u = x^4 + 1$
7. $\int \frac{(\sqrt{x}+2)^3}{\sqrt{x}}\,dx,\ u = \sqrt{x} + 2$
8. $\int \operatorname{sen} x \cos x\,dx,\ u = \operatorname{sen} x$

**En los ejercicios 9-46, hallar la integral indefinida.**

9. $\int x(x^2-3)^4\,dx$
10. $\int x^3\sqrt{x^4+3}\,dx$
11. $\int (2x+1)(x^2+x)^3\,dx$
12. $\int (x^2+2x)(x^3+3x^2)^2\,dx$
13. $\int \cos x\sqrt{\operatorname{sen} x + 1}\,dx$
14. $\int \sec^2 x\sqrt{\tan x}\,dx$
15. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{\cos x}}\,dx$
16. $\int \operatorname{sen}^3 x \cos x\,dx$
17. $\int x^2\cos x^3\,dx$
18. $\int \sec^2 x \cos(\tan x)\,dx$
19. $\int \operatorname{sen} x(\cos x + 3)^{3/4}\,dx$
20. $\int x \operatorname{cosec} x^2 \cot x^2\,dx$
21. $\int xe^{x^2+1}\,dx$
22. $\int e^x\sqrt{e^x+4}\,dx$
23. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$
24. $\int \frac{e^{2x}}{(e^{2x}+1)^3}\,dx$
25. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3-2}}\,dx$
26. $\int \frac{x+1}{(x^2+2x-1)^2}\,dx$
27. $\int \frac{(\ln x + 2)^2}{x}\,dx$
28. $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx$
29. $\int \frac{2x+1}{x^2+x-1}\,dx$
30. $\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x + 2}\,dx$
31. $\int \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}\,dx$
32. $\int \frac{x}{x^2+4}\,dx$
33. $\int \cos xe^{\operatorname{sen} x}\,dx$
34. $\int \tan 2x\,dx$
35. $\int \operatorname{sen} x(\cos x - 1)^3\,dx$
36. $\int x^2\sec^2 x^3\,dx$
37. $\int \frac{4}{x(\ln x + 1)^2}\,dx$
38. $\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

39. $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx$

40. $\int \frac{6x}{(x^2-3)^4}\,dx$

41. $\int \frac{1}{x \ln \sqrt{x}}\,dx$

42. $\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx$

43. $\int \frac{2x+3}{x+7}\,dx$

44. $\int \frac{3x+4}{2x+7}\,dx$

45. $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x+3}}\,dx$

46. $\int \frac{x^2+2}{\sqrt{x-5}}\,dx$

**En los ejercicios 47-56, calcular la integral definida.**

47. $\int_0^2 x\sqrt{x^2+1}\,dx$

48. $\int_1^3 x \operatorname{sen}(\pi x^2)\,dx$

49. $\int_{-1}^1 \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx$

50. $\int_0^2 x^2 e^{x^3}\,dx$

51. $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{4\cos x}{(\operatorname{sen} x + 1)^2}\,dx$

52. $\int_0^{\pi^2} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

53. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot x\,dx$

54. $\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$

55. $\int_1^4 \frac{x-1}{\sqrt{x}}\,dx$

56. $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

**En los ejercicios 57-66, calcular la integral exactamente si es posible. En caso contrario, estimar su valor numéricamente.**

57. $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x^2\,dx$

58. $\int_0^{\pi} x \operatorname{sen} x^2\,dx$

59. $\int_{-1}^1 xe^{-x^2}\,dx$

60. $\int_{-1}^1 e^{-x^2}\,dx$

61. $\int_0^2 \frac{4}{(x^2+1)^2}\,dx$

62. $\int_0^2 \frac{4x}{(x^2+1)^2}\,dx$

63. $\int_0^2 \frac{4x^2}{(x^2+1)^2}\,dx$

64. $\int_0^2 \frac{4x^3}{(x^2+1)^2}\,dx$

65. $\int_0^{\pi/4} \sec x\,dx$

66. $\int_0^{\pi/4} \sec^2 x\,dx$

**En los ejercicios 67-70, efectuar la sustitución indicada, siendo $f(x)$ una función no especificada.**

67. $u = x^2$ en $\int_0^2 xf(x^2)\,dx$

68. $u = x^3$ en $\int_1^2 x^2 f(x^3)\,dx$

69. $u = \operatorname{sen} x$ en $\int_0^{\pi/2} (\cos x) f(\operatorname{sen} x)\,dx$

70. $u = \sqrt{x}$ en $\int_0^4 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx$

71. Se dice que una función $f$ es **par** si $f(-x) = f(x)$ para todo $x$. Así, $f(x) = x^2$ y $f(x) = x^4$ son pares, ya que $(-x)^2 = x^2$ y $(-x)^4 = x^4$. Se dice que una función $f$ es **impar** si $f(-x) = -f(x)$. Probar que $\cos x$ y $x \operatorname{sen} x$ son pares, mientras que $\operatorname{sen} x$ y $x \cos x$ son impares.

72. Si $f(x)$ es continua para todo $x$ y $a > 0$ una constante, $\int_{-a}^a f(x)\,dx = \int_{-a}^0 f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx$. Usando la sustitución $u = -x$ en $\int_{-a}^0 f(x)\,dx$, probar que si $f(x)$ es par, entonces $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$. Probar, asimismo, que si $f(x)$ es impar, entonces $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$.

**En los ejercicios 73-78, averiguar si el integrando es par, impar o ninguna de ambas cosas. Reescribir la integral según el caso y calcular (o estimar) su valor.**

73. $\int_{-1}^1 x\cos x\,dx$

74. $\int_{-1}^1 x^2 \operatorname{sen} x\,dx$

75. $\int_{-1}^1 (x^4 - 2x^2 + 1)\,dx$

76. $\int_{-1}^1 xe^{-x^2}\,dx$

77. $\int_{-1}^1 (x^2 + \operatorname{sen} x)\,dx$

78. $\int_{-1}^1 (x^3 - 2x)\,dx$

79. Las coordenadas del centro de gravedad (punto de equilibrio) de una lámina plana acotada por $y = f(x)$, en $a \le x \le b$, y el eje $x$, son $\bar{x} = \frac{\int_a^b xf(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}$ e $\bar{y} = \frac{\int_a^b [f(x)]^2\,dx}{2\int_a^b f(x)\,dx}$. Para el semicírculo $y = f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, usar simetría, como en los ejercicios 73-78, para argumentar que $\bar{x} = 0$ e $\bar{y} = \frac{1}{2\pi}\int_0^2 (4 - x^2)\,dx$. Calcular $\bar{y}$.

80. La densidad de población de un grupo de animales viene descrita, en miles de animales por milla, por $f(x) = xe^{-x^2}$, $0 \le x \le 2$, siendo $x$ la distancia a un río. Representar $y = f(x)$ y describir brevemente dónde es más probable encontrar a esos animales. Calcular la población total $\int_0^2 f(x)\,dx$.

81. El voltaje en un circuito de corriente alterna viene dado por $V(t) = V_p \operatorname{sen}(2\pi ft)$, donde $f$ es la frecuencia. Un voltímetro no indica la amplitud $V_p$, sino la **raíz de la media del cuadrado** (rmc) del voltaje en un ciclo, $\sqrt{f\int_0^{1/f} V^2(t)\,dt}$. Usando la identidad $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$, probar que rmc $= V_p/\sqrt{2}$.

82. Representar $y = f(t)$ y hallar la raíz de la media del cuadrado de

$$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } -2 \le t < -1 \\ t & \text{si } -1 \le t \le 1 \\ 1 & \text{si } 1 < t \le 2 \end{cases}, \text{ con rmc} = \sqrt{\frac{1}{4}\int_{-2}^2 f^2(t)\,dt}.$$

## 4.7 INTEGRACIÓN NUMÉRICA

Hasta ahora hemos estudiado la integral en paralelo a la derivada: una definición inicial difícil de calcular, seguida de reglas que simplifican su cálculo. Y puesto que estamos en condiciones de hallar la derivada de casi cualquier función que podamos escribir, cabría esperar que con unas pocas reglas más seremos capaces de hacer lo mismo con las integrales. Pero, por desgracia, no es así. Hay muchas funciones cuyas primitivas **no** son funciones elementales (es decir, expresables en términos de las funciones familiares: algebraicas, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas). Por ejemplo,

$$\int_0^2 \cos(x^2)\, dx$$

no se puede hallar exactamente porque $\cos(x^2)$ no tiene primitiva elemental. (Intente encontrar una, pero no pierda demasiado tiempo; los matemáticos han demostrado que no la hay).

De hecho, la mayoría de las integrales no se pueden calcular exactamente. En tales circunstancias, lo mejor que podemos hacer es aproximar su valor numéricamente. En esta sección presentamos tres métodos de aproximación de integrales definidas. Ninguno hará la competencia a un PCS, pero servirán para comprender algunas de las ideas fundamentales en las que se apoyan métodos numéricos de integración más sofisticados.

A decir verdad, ya disponemos de algunos métodos aproximados. Como una integral es límite de sumas de Riemann, cualquier suma de Riemann sirve como aproximación de la integral

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\, \Delta x,$$

donde $c_i$ es cualquier punto del subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, para $i = 1, 2, \ldots, n$. Por la definición de integral definida, cuanto mayor sea $n$, mejor tiende a ser la aproximación. Las sumas de Riemann proporcionan numerosos esquemas de aproximación debido a la libertad en la elección de los puntos de evaluación $c_i$, para $i = 1, 2, \ldots, n$. La elección más común da la **regla del punto medio**:

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\, \Delta x,$$

donde $c_i$ es el punto medio del subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$,

$$c_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i), \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Ilustramos esta aproximación en el caso en que $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$ (figura 4.29).

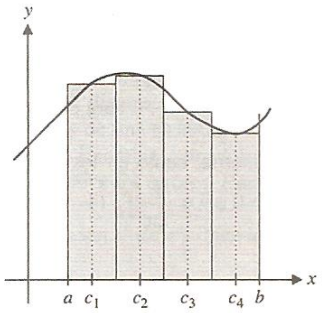



**Figura 4.29**
Regla del punto medio.

### Ejemplo 7.1 La regla del punto medio

Aproximar $\int_0^1 3x^2\, dx$ usando la regla del punto medio con $n = 4$.

**Solución** Con $n = 4$, la partición regular del intervalo $[0, 1]$ es $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{3}{4}$ y $x_4 = 1$. Los puntos medios son $c_1 = \frac{1}{8}$, $c_2 = \frac{3}{8}$, $c_3 = \frac{5}{8}$ y $c_4 = \frac{7}{8}$. Con $\Delta x = \frac{1}{4}$, la suma de Riemann es

$$\left[f\left(\frac{1}{8}\right) + f\left(\frac{3}{8}\right) + f\left(\frac{5}{8}\right) + f\left(\frac{7}{8}\right)\right]\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{3}{64} + \frac{27}{64} + \frac{75}{64} + \frac{147}{64}\right)\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{252}{256} = 0{,}984375.$$

Naturalmente, por el teorema fundamental sabemos que el valor exacto de esa integral es

$$\int_0^1 3x^2\,dx = \frac{3x^3}{3}\Big|_0^1 = 1.$$

Por tanto, la aproximación obtenida en el ejemplo 7.1 no es muy buena. Para conseguir aproximaciones mejores hay que utilizar más rectángulos. Se puede simplificar este proceso escribiendo un programa para la calculadora que implemente la regla del punto medio siguiendo las pautas que sugerimos a continuación.

**REGLA DEL PUNTO MEDIO**

1. Almacenar $f(x)$, $a$, $b$ y $n$.
2. Evaluar $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$.
3. Calcular $c_1 = a + \dfrac{\Delta x}{2}$ e iniciar la suma con $f(c_i)$.
4. Hallar el siguiente $c_i = c_{i-1} + \Delta x$ y añadir $f(c_i)$ a la suma.
5. Repetir el paso 4 hasta $i = n$ [es decir, hacer $(n-1)$ veces el paso 4].
6. Multiplicar la suma por $\Delta x$.

**Ejemplo 7.2** **Usando un programa para la regla del punto medio**

Rehacer el ejemplo 7.1 usando un programa para aplicar la regla del punto medio con $n = 8$, 16, 32, 64 y 128.

**Solución** Debe confirmar los valores de la tabla. Hemos incluido una columna que muestra el error de cada aproximación (la diferencia entre el valor exacto 1 y el valor aproximado).

| $n$ | Punto medio | Error |
|---|---|---|
| 4 | 0,984375 | 0,015625 |
| 8 | 0,99609375 | 0,00390625 |
| 16 | 0,99902344 | 0,00097656 |
| 32 | 0,99975586 | 0,00024414 |
| 64 | 0,99993896 | 0,00006106 |
| 128 | 0,99998474 | 0,00001526 |

Nótese que cada vez que se duplica el número de pasos, el error se divide entre 4. Aunque no con este mismo factor exactamente, ese ritmo de mejora es típico en las aproximaciones de la regla del punto medio para cualquier integral.

Claro está que, en general, no conocemos el error de nuestra aproximación, ya que no sabemos cuál es el valor exacto de la integral. (¡Si lo conociéramos sería innecesaria la aproximación!). Hemos empezado por una integral sencilla, cuyo valor exacto conocemos, con el fin de tener una idea de la precisión que se obtiene con la regla del punto medio. No obstante, se pueden establecer cotas sobre el posible error de las aproximaciones. Diremos cuáles son esas cotas de error y las usaremos, pero su demostración escapa al nivel de este libro.

En el próximo ejemplo no podemos calcular el valor exacto de la integral porque desconocemos sus primitivas.

| $n$ | Regla del punto medio |
|---|---|
| 10 | 2,95639 |
| 20 | 2,95751 |
| 30 | 2,95772 |
| 40 | 2,95779 |

**Nota 1.1**

Los programas de ordenador se enfrentan a la misma cuestión planteada en el ejemplo 7.3, a saber: cuándo una aproximación es lo bastante buena. Los PCS incluyen algoritmos sofisticados para estimar la precisión. Pueden verse algoritmos de ese tipo en muchos libros de cálculo numérico.

### Ejemplo 7.3 Aproximación con precisión prefijada

Calcular $\int_0^2 \sqrt{x^2+1}\,dx$, con tres cifras decimales correctas, usando la regla del punto medio.

**Solución** Disponemos del programa elaborado antes. La cuestión es ¿cuándo nos detenemos? Queremos estar seguros de que tres cifras decimales son correctas, así que continuamos aumentando $n$ hasta que esas tres cifras no cambien. El valor de $n$ variará mucho de una integral a otra, de modo que no hay receta simple para saber cuándo parar. En este caso, compare los valores de la tabla con los obtenidos con su programa.

A la vista de la tabla, parece razonable dar como valor aproximado

$$\int_0^2 \sqrt{x^2+1}\,dx \approx 2{,}958.$$

Otra razón poderosa para recurrir a métodos numéricos es que, en muchas aplicaciones, no conocemos la función a integrar. Se han medido unos cuantos *valores* de la función, pero no se conoce una expresión algebraica para ella. Tal situación es frecuente en Física, Biología e Ingeniería.

### Ejemplo 7.4 Estimación de una integral a partir de una tabla de valores

Estimar $\int_0^1 f(x)\,dx$, conociendo los valores de $f(x)$ que aparecen en la tabla del margen.

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0,0 | 1,0 |
| 0,25 | 0,8 |
| 0,5 | 1,3 |
| 0,75 | 1,1 |
| 1,0 | 1,6 |

**Solución** Conocidos los cinco puntos de la figura 4.30, ¿cómo podemos estimar el área bajo la curva desconocida? Hemos de hacer dos cosas: unir los puntos de una forma razonable y calcular el área de la región resultante. ¿Cómo unir los puntos? La manera más obvia es la que elegiría un niño: mediante segmentos rectos (figura 4.31a).

La región acotada por esos segmentos y el eje $x$, en el intervalo [0, 1], está formada por cuatro trapecios (figura 4.31b).

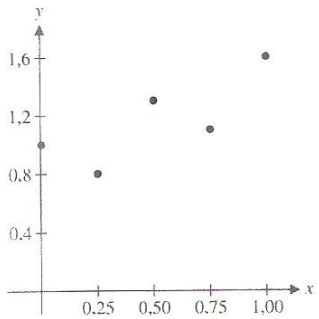



**Figura 4.30**
Datos de una función desconocida.

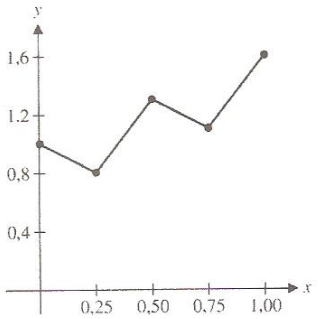



**Figura 4.31a**
Unimos los puntos.

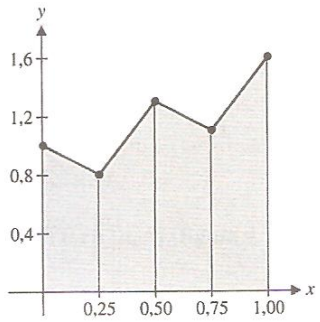



**Figura 4.31b**
Cuatro trapecios.

El área de un trapecio de lados $h_1$, $h_2$ y base $b$ viene dada por $\left(\frac{h_1+h_2}{2}\right)b$. (Es fácil probarlo). Puede interpretarse como la media de las áreas de los dos rectángulos cuyas alturas fueran los valores de la función en el extremo izquierdo o en el extremo derecho.

Por tanto, el área total es

$$\frac{f(0)+f(0{,}25)}{2}\,0{,}25+\frac{f(0{,}25)+f(0{,}5)}{2}\,0{,}25+\frac{f(0{,}5)+f(0{,}75)}{2}\,0{,}25+\frac{f(0{,}75)+f(1)}{2}\,0{,}25$$

$$=[f(0)+2f(0{,}25)+2f(0{,}5)+2f(0{,}75)+f(1)]\,\frac{0{,}25}{2}=1{,}125.$$

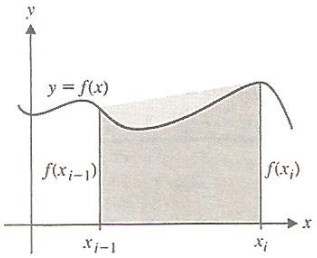



**Figura 4.32**
Regla de los trapecios.

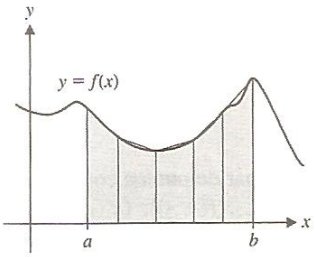



**Figura 4.33**
La regla de los trapecios con $(n + 1)$ puntos.

En general, dada una función $f$ continua en el intervalo $[a, b]$ hacemos una partición de $[a, b]$ usando puntos:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b,$$

uniformemente espaciados, con distancia entre dos consecutivos $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$. En cada subintervalo aproximamos el área bajo la curva por el área del trapecio cuyos lados tienen longitudes $f(x_{i-1})$ y $f(x_i)$ (figura 4.32). Así, pues, el área bajo la curva en el subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ la aproximamos por

$$A_i \approx \frac{1}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)]\,\Delta x,$$

para cada $i = 1, 2, \ldots, n$. Sumando esas aproximaciones, obtenemos

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \left[\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2} + \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} + \cdots + \frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}\right]\Delta x$$

$$= \frac{b-a}{2n}\,[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)].$$

Esto se conoce como la **regla de los trapecios** con $(n + 1)$ puntos (figura 4.33). Nótese que cada uno de los sumandos intermedios está multiplicado por 2, ya que cada uno de ellos se usa en dos trapecios, una vez como altura izquierda de un trapecio y otra vez como altura derecha.

**Regla de los trapecios**

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx T_n(f) = \frac{b-a}{2n}\,[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)].$$

Hay dos maneras de escribir un programa para la regla de los trapecios. Una de ellas consiste en sumar $[f(x_{i-1}) + f(x_i)]$ para $i = 1, 2, \ldots, n$ y después multiplicar por $\Delta x/2$. Como se discute en los ejercicios, otra alternativa es sumar las sumas de Riemann con puntos de evaluación en los extremos derecho e izquierdo y dividir entre 2.

### Ejemplo 7.5 La regla de los trapecios

Calcular las aproximaciones de $\int_0^1 3x^2\,dx$ por la regla de los trapecios con $n = 4$ (a mano) y con $n = 8, 16, 32, 64$ y $128$ (usando un programa).

**Solución** Ya vimos en los ejemplos 7.1 y 7.2 que el valor exacto de la integral es 1. Con $n = 4$, la regla de los trapecios da

$$T_4(f) = \frac{1-0}{(2)(4)}\left[f(0) + 2f\left(\frac{1}{4}\right) + 2f\left(\frac{1}{2}\right) + 2f\left(\frac{3}{4}\right) + f(1)\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left(0 + \frac{3}{8} + \frac{12}{8} + \frac{27}{8} + 3\right) = \frac{66}{64} = 1{,}03125.$$

En la figura 4.31b se mostraban los cuatro trapecios de la aproximación $T_4(f)$. En este caso, los trapecios ajustan muy bien el área bajo la curva. Con un programa es fácil hallar los valores de la tabla para $T_n(f)$ con los valores de $n$ indicados.

| $n$ | $T_n(f)$ | Error |
|---|---|---|
| 4 | 1,03125 | 0,03125 |
| 8 | 1,0078125 | 0,0078125 |
| 16 | 1,00195313 | 0,00195313 |
| 32 | 1,00048828 | 0,00048828 |
| 64 | 1,00012207 | 0,00012207 |
| 128 | 1,00003052 | 0,00003052 |

### Advertencia

Como la regla de los trapecios es un promedio de dos sumas de Riemann, se tiene

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} T_n(f).$$

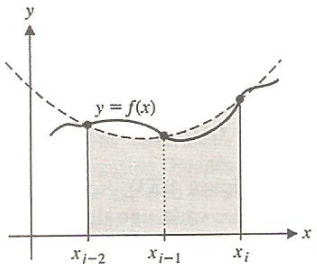



**Figura 4.34**
La regla de Simpson.

### Notas históricas

**Thomas Simpson (1710-1761).** Matemático inglés que popularizó el método numérico que hoy lleva su nombre. Formado como tejedor, también se ganó la vida como adivino, como editor de *Ladies' Diary* y como autor de libros de texto. Su libro de Cálculo, *A New Treatise on Fluxions*, que usaba la terminología de Newton, permitió a muchos matemáticos conocer la regla de Simpson, aunque ya había sido descubierta años atrás.

La última columna muestra el error (valor absoluto de la diferencia entre el valor exacto 1 y el aproximado). Análogamente a lo que sucedía con la regla del punto medio, al doblar el número de pasos, el error se reduce en un factor 4 más o menos. Tanto el error para un $n$ dado como el ritmo al que decrece el error cuando $n$ crece son parecidos a los de la regla del punto medio que vimos antes.

## La regla de Simpson

En la regla de los trapecios se tomaba una partición de $[a, b]$ y en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ se conectaban los puntos $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ y $(x_i, f(x_i))$ con un segmento recto. El área bajo la curva se aproximaba por el área bajo el segmento recto (que es el área de un trapecio). Vamos a proponer una alternativa a la regla de los trapecios. Volvemos a construir una partición regular del intervalo $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

con

$$x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n} = \Delta x,$$

para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, con $n$ un entero **par**. En lugar de unir cada par de puntos con un segmento recto, unimos cada conjunto de tres puntos sucesivos $(x_{i-2}, f(x_{i-2}))$, $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ y $(x_i, f(x_i))$ en $i = 2, 4, \ldots, n$, por una parábola (figura 4.34). Es decir, buscamos la función cuadrática $p(x)$ cuya gráfica pasa por esos tres puntos, de manera que

$$p(x_{i-2}) = f(x_{i-2}), \quad p(x_{i-1}) = f(x_{i-1}) \quad \text{y} \quad p(x_i) = f(x_i).$$

Si usamos esto para aproximar el valor de la integral de $f$ en el intervalo $[x_{i-2}, x_i]$, se tiene

$$\int_{x_{i-2}}^{x_i} f(x)\,dx \approx \int_{x_{i-2}}^{x_i} p(x)\,dx.$$

Está claro por qué elegimos polinomios como aproximantes de $f$: son muy fáciles de integrar. Un cálculo directo, pero tedioso (inténtelo con ayuda de un PCS), da

$$\begin{aligned}\int_{x_{i-2}}^{x_i} f(x)\,dx &\approx \int_{x_{i-2}}^{x_i} p(x)\,dx \\ &= \frac{x_i - x_{i-2}}{6}\left[f(x_{i-2}) + 4f(x_{i-1}) + f(x_i)\right] \\ &= \frac{b-a}{3n}\left[f(x_{i-2}) + 4f(x_{i-1}) + f(x_i)\right].\end{aligned}$$

Sumando las integrales sobre cada uno de los intervalos $[x_{i-2}, x_i]$, para $i = 2, 4, 6, \ldots, n$, obtenemos

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &\approx \frac{b-a}{3n}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right] + \frac{b-a}{3n}\left[f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\right] + \cdots \\ &\quad + \frac{b-a}{3n}\left[f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right] \\ &= \frac{b-a}{3n}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4)\right] + \cdots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right].\end{aligned}$$

Esto se conoce como la **regla de Simpson** con $(n + 1)$ puntos, $S_n(f)$. Preste atención a la pauta que siguen los coeficientes.

**Regla de Simpson**

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx S_n(f) = \frac{b-a}{3n}\,[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \ldots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)].$$

A continuación ilustramos la aplicación de la regla de Simpson a una integral simple.

### Ejemplo 7.6 Aplicación de la regla de Simpson

Aproximar el valor de $\int_0^1 3x^2\,dx$ usando la regla de Simpson con $n = 4$.

**Solución** Se tiene

$$S_4(f) = \frac{1-0}{(3)(4)}\left[f(0) + 4f\left(\frac{1}{4}\right) + 2f\left(\frac{1}{2}\right) + 4f\left(\frac{3}{4}\right) + f(1)\right] = 1,$$

que es, de hecho, el valor exacto. Nótese que es mucho más precisa que la regla del punto medio y que la regla de los trapecios sin requerir más esfuerzo.

La regla de Simpson calcula el área bajo arcos de parábola. Por eso no es sorprendente que reproduzca el valor exacto en el ejemplo 7.6. Puede probarse que la regla de Simpson da el valor exacto de la integral de cualquier polinomio de grado 3 o menor.

El próximo ejemplo se refiere a una integral que no sabemos calcular exactamente.

### Ejemplo 7.7 La regla de Simpson con ayuda de un programa

Hallar la aproximación que da la regla de Simpson con $n = 4$ (a mano), $n = 8$, 16, 32, 64 y 128 (usando un programa en calculadora) para $\int_0^2 \sqrt{x^2+1}\,dx$.

| $n$ | $S_n(f)$ |
|---|---|
| 4 | 2,9579556 |
| 8 | 2,9578835 |
| 16 | 2,95788557 |
| 32 | 2,95788571 |
| 64 | 2,95788571 |
| 128 | 2,95788572 |

**Solución** Para $n = 4$, se tiene

$$S_4(f) = \frac{2-0}{(3)(4)}\left[f(0) + 4f\left(\frac{1}{2}\right) + 2f(1) + 4f\left(\frac{3}{2}\right) + f(2)\right]$$

$$= \left(\frac{1}{6}\right)\left[1 + 4\sqrt{\frac{5}{4}} + 2\sqrt{2} + 4\sqrt{\frac{13}{4}} + \sqrt{5}\right] \approx 2{,}95795560.$$

Con un programa podrá comprobar los valores de la tabla.

A la vista de esos resultados, 2,9578857 parece ser una aproximación muy buena de $\int_0^2 \sqrt{x^2+1}\,dx$.

Ya que casi todas las gráficas se curvan, es lógico esperar que las parábolas de la regla de Simpson ajusten la curva mejor que los segmentos rectos de las reglas del punto medio o de los trapecios.

### Ejemplo 7.8 Comparación de las reglas del punto medio, de los trapecios y de Simpson

Calcular las aproximaciones mediante las reglas del punto medio, de los trapecios y de Simpson, para $\int_0^1 \frac{4}{x^2+1}\,dx$ con $n = 10$, $n = 20$, $n = 50$ y $n = 100$. Comparar con el valor exacto, que es $\pi$. (En el Capítulo 6 veremos cómo hallar este valor exacto).

**Solución**

| $n$ | Regla del punto medio | Regla de los trapecios | Regla de Simpson |
|---|---|---|---|
| 10 | 3,142425985 | 3,139925988 | 3,141592613 |
| 20 | 3,141800986 | 3,141175986 | 3,141592652 |
| 50 | 3,141625986 | 3,141525986 | 3,141592653 |
| 100 | 3,141600986 | 3,141575986 | 3,141592653 |

Comparando con el valor exacto $\pi \approx 3{,}141592653$, vemos que la regla del punto medio tiende a estar ligeramente más cerca de $\pi$ que la de los trapecios, pero ambas son peores, con $n = 100$, que la de Simpson, con sólo $n = 10$.

En el ejemplo siguiente revisamos nuestra estimación del área de la figura 4.30, que ya investigamos previamente en el ejemplo 7.4.

### Ejemplo 7.9 La regla de Simpson aplicada a datos experimentales

Estimar $\int_0^1 f(x)\,dx$ por la regla de Simpson, disponiendo como única información sobre $f$ de la expuesta en la tabla del margen.

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0,0 | 1,0 |
| 0,25 | 0,8 |
| 0,5 | 1,3 |
| 0,75 | 1,1 |
| 1,0 | 1,6 |

**Solución** Por la regla de Simpson con $n = 4$,

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \frac{1-0}{(3)(4)}\,[f(0) + 4f(0{,}25) + 2f(0{,}5) + 4f(0{,}75) + f(1)]$$

$$= \left(\frac{1}{12}\right)[1 + 4(0{,}8) + 2(1{,}3) + 4(1{,}1) + 1.6] \approx 1{,}066667.$$

Puesto que la regla de Simpson es, por lo general, mucho más precisa que la de los trapecios (para el mismo $n$), esperamos que esta aproximación sea mucho mejor que la del ejemplo 7.4.

## Cotas de error para la integración numérica

En integrales cuyo valor exacto nos era conocido hemos tenido oportunidad de comparar la calidad de los valores aproximados de las tres reglas: punto medio, trapecios y Simpson. En la práctica, jamás utilizará un método aproximado si conoce el valor exacto. Cuando no sepa cuál es el valor exacto, ¿cómo saber qué grado de precisión tiene el valor aproximado? Los dos teoremas que siguen dan cotas de error para esos tres métodos de aproximación. En primer lugar, introducimos algo de notación. Sea $ET_n$ el error cometido al aproximar $\int_a^b f(x)\,dx$ por la regla de los trapecios con $(n + 1)$ puntos. Esto es,

$$ET_n = \text{exacto} - \text{aproximado} = \int_a^b f(x)\,dx - T_n(f).$$

Análogamente, denotamos los errores de las reglas del punto medio y de Simpson por $EM_n$ y $ES_n$, respectivamente.

### Teorema 7.1

Si $f''$ es continua en $[a, b]$ y $|f''(x)| \le K$, para todo $x$ en $[a, b]$, entonces

$$|ET_n| \le K\,\frac{(b-a)^3}{12n^2}$$

y

$$|EM_n| \le K\,\frac{(b-a)^3}{24n^2}$$

### Nota 7.2

Para un mismo $n$, el número de operaciones (y de esfuerzo, por tanto) en las tres reglas es análogo. Así, pues, el ejemplo 7.8 deja claro que la de Simpson es mucho más eficiente. Esto es importante cuando la función $f$ es difícil de evaluar. Por ejemplo, en el caso de datos experimentales, cada valor de $f$ puede exigir un experimento costoso en tiempo e inversión.

### Nota 7.3

Los PCS incorporan programas, rápidos y fiables, para aproximar integrales definidas. Algunos piden fijar la tolerancia de error y calculan un valor que satisfaga esa condición. Pero conviene advertir que sólo dan un número, no una secuencia de aproximaciones, como hemos hecho aquí para dar idea de la precisión del resultado. Muchos PCS usan *cuadratura adaptada*, es decir, calculan cuántos puntos son necesarios para lograr la precisión deseada. Puede confiar en esos programas. No obstante, si la integral que está aproximando forma parte de un proyecto importante, conviene comprobar el resultado mediante la regla de Simpson $S_n(f)$ para una secuencia de valores de $n$. Naturalmente, si todo cuanto conoce de $f$ es una tabla de valores, la mayoría de PCS no le servirán de ayuda, pero sí las tres reglas presentadas en esta sección, como hemos visto en los ejemplos 7.4 y 7.9. En los ejercicios se profundiza más en este aspecto.

Las dos estimaciones del teorema 7.1 establecen que el error cometido no supera, en valor absoluto, la cota indicada. Así, pues, si la cota es pequeña, el error será pequeño. En particular, observe que la cota de error para la regla del punto medio es la **mitad** que para la de los trapecios. Eso no significa que el error sea la mitad, pero explica por qué la regla del punto medio tiende a ser más precisa para un $n$ fijado. Nótese, asimismo, que la constante $k$ viene determinada por la concavidad $|f''(x)|$ de la función $f$. Cuanto mayor sea $|f''(x)|$, más curvada es la gráfica y menos precisas las aproximaciones por segmentos rectos de la regla del punto medio y de la regla de los trapecios. Hay un resultado del mismo tipo para la regla de Simpson.

---

**Teorema 7.2**
Si $f^{(4)}$ es continua en $[a, b]$ y $|f^{(4)}(x)| \leq L$, para todo $x$ en $[a, b]$, entonces

$$|ES_n| \leq L\frac{(b-a)^5}{180n^4}$$

---

Las demostraciones de estos dos teoremas escapan al nivel de este curso (consultar libros de cálculo numérico). Observamos que la cota de error para la regla de Simpson contiene en el denominador un factor $n^4$, mientras para las otras era $n^2$. Con $n = 10$ son $n^2 = 100$ y $n^4 = 10.000$. Como esas potencias de $n$ están en el denominador, eso quiere decir que el error en la regla de Simpson tiende a ser mucho menor que en las otras dos para un mismo $n$. Eso explica la precisión mucho mayor que habíamos comprobado antes. El ejemplo que sigue ilustra el uso de esas cotas de error.

**Ejemplo 7.10** **Cotas de error en integración numérica**

Hallar las cotas de error al aproximar $\int_1^3 \frac{1}{x}\,dx$ por las reglas del punto medio, de los trapecios y de Simpson, con $n = 10$.

**Solución** Puede que esté pensando que conoce el valor exacto. De hecho, por el teorema fundamental del Cálculo

$$\int_1^3 \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|\Big|_1^3 = \ln 3 - \ln 1 = \ln 3.$$

Ahora bien, en realidad no sabe cuál es el valor exacto de ln 3. Puede recurrir a su calculadora, pero ella utiliza un método aproximado para evaluarlo. Por otra parte, puede aproximar esta integral utilizando las reglas de los trapecios, del punto medio o de Simpson. Aquí $f(x) = 1/x = x^{-1}$, de modo que $f'(x) = -x^{-2}$, $f''(x) = 2x^{-3}$, $f'''(x) = -6x^{-4}$ y $f^{(4)}(x) = 24x^{-5}$. Por tanto, para todo $x \in [1, 3]$,

$$|f''(x)| = |2x^{-3}| = \frac{2}{x^3} \leq 2.$$

Según el teorema 7.1,

$$|EM_{10}| \leq K\frac{(b-a)^3}{24n^2} = 2\frac{(3-1)^3}{24(10^2)} \approx 0{,}006667.$$

Análogamente,

$$|ET_{10}| \leq K\frac{(b-a)^3}{12n^2} = 2\frac{(3-1)^3}{12(10^2)} \approx 0{,}013333.$$

En cuanto a la regla de Simpson, para todo $x \in [1, 3]$ se tiene

$$|f^{(4)}(x)| = |24x^{-5}| = \frac{24}{x^5} \leq 24$$

y ahora del teorema 7.2 se sigue que

$$|ES_{10}| \le L\frac{(b-a)^5}{180n^4} = 24\frac{(3-1)^5}{180(10^4)} \approx 0{,}000427.$$

En el ejemplo 7.10 sabemos ahora que el error cometido al aproximar $\int_1^3 \frac{1}{x}\,dx$ por la regla de Simpson con $n = 10$ no era mayor que 0,000427. Esta información es ciertamente útil, pero hay otra cuestión aún más interesante. En la práctica necesitamos una aproximación de cierta precisión previamente fijada. Exploramos este problema en el siguiente ejemplo.

### Ejemplo 7.11 Determinación del número de pasos que asegura una cierta precisión

Determinar el número de pasos que garantiza una precisión de al menos $10^{-7}$ al usar la regla de los trapecios y la regla de Simpson para aproximar $\int_1^3 \frac{1}{x}\,dx$.

**Solución** Por el ejemplo 7.10 sabemos que $|f''(x)| \le 2$ y $|f^{(4)}(x)| \le 24$ para todo $x \in [1, 3]$. Por tanto, del teorema 7.1 se deduce que

$$|ET_n| \le K\frac{(b-a)^3}{12n^2} = 2\frac{(3-1)^3}{12n^2} = \frac{4}{3n^2}.$$

Si exigimos que esa cota de error no sea mayor que la precisión requerida, es decir, $10^{-7}$, ha de ser

$$|ET_n| \le \frac{4}{3n^2} \le 10^{-7}.$$

Despejando $n^2$, eso significa que

$$\frac{4}{3}\,10^7 \le n^2$$

o bien, tomando la raíz cuadrada,

$$n \ge \sqrt{\frac{4}{3}\,10^7} \approx 3.651{,}48.$$

Así, pues, cualquier $n \ge 3.652$ produce la precisión deseada. Análogamente, para la regla de Simpson se tiene

$$|ES_n| \le L\frac{(b-a)^5}{180n^4} = 24\frac{(3-1)^5}{180n^4}.$$

De nuevo exigimos que la cota de error no exceda de $10^{-7}$, es decir,

$$|ES_n| \le 24\frac{(3-1)^5}{180n^4} \le 10^{-7},$$

y despejando $n^4$ se obtiene

$$n^4 \ge 24\frac{(3-1)^5}{180}\,10^7.$$

Tomando la raíz cuarta, resulta

$$n \ge \sqrt[4]{24\frac{(3-1)^5}{180}\,10^7} \approx 80{,}8,$$

así que cualquier $n \ge 82$ garantiza la precisión requerida. (Si esperaba que dijéramos $n \ge 81$, recuerde que en la regla de Simpson $n$ debe ser par).

Compare en el ejemplo 7.11 el número de pasos necesario para conseguir $10^{-7}$ de precisión en la regla de Simpson (82) y en la de los trapecios (3.652). Es lo que ocurre en general: la regla de Simpson requiere muchos menos pasos que las otras dos para una misma precisión. Finalmente, observemos que en el ejemplo 7.11 sabemos que

$$\ln 3 = \int_1^3 \frac{1}{x}\,dx \approx S_{82} \approx 1{,}0986123$$

es correcto con error menos que $10^{-7}$ por el teorema 7.2. Compare esto con el valor aproximado que la calculadora da para ln 3.

## EJERCICIOS 4.7

1. Lo ideal sería que las técnicas de aproximación fueran simples y precisas. ¿Cómo se comparan las tres reglas de esta sección en esos dos criterios? ¿Qué criterio sería más importante si trabajáramos a mano? ¿Qué método usaría? ¿Qué criterio sería más importante si trabajáramos con calculadora? ¿Qué método usaría?

2. Suponga que está elaborando una regla propia de integración aproximada (la regla de... ¡ponga aquí su nombre!). En el texto, los métodos nuevos se elaboraban eligiendo puntos de evaluación para las sumas de Riemann (regla del punto medio) y por construcciones geométricas (regla de los trapecios y regla de Simpson). Sin entrar en detalles, explique cómo desarrollaría una regla muy precisa pero simple.

3. Pruebe en su calculadora $\int_0^1 \operatorname{sen}(1/x)\,dx$. Discuta cuáles son las opciones cuando la calculadora no responde con una aproximación segura. A la vista de un esbozo de $y = \operatorname{sen}(1/x)$, describa por qué una rutina de programación tiene dificultades con esa integral.

4. Explicar por qué no hemos utilizado la regla del punto medio en el ejemplo 7.4.

**En los ejercicios 5-8, hallar a mano las aproximaciones por las reglas del punto medio, de los trapecios y de Simpson con $n = 4$ (dejar la respuesta en forma de fracción).**

5. $\int_0^1 (x^2 + 1)\,dx$

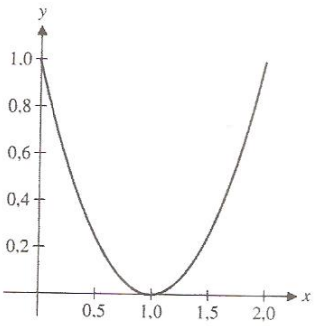
6. $\int_0^2 (x^2 + 1)\,dx$

7. $\int_1^3 \frac{1}{x}\,dx$

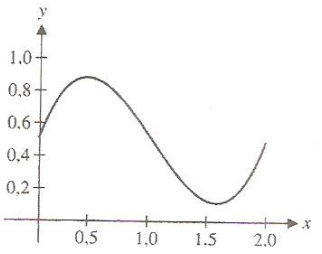
8. $\int_{-1}^1 (2x - x^2)\,dx$

**En los ejercicios 9 y 10, usar la gráfica para estimar las aproximaciones dadas por (a) la suma de Riemann con evaluación en el extremo izquierdo, (b) la regla del punto medio y (c) la regla de los trapecios, con $n = 4$, para $\int_0^2 f(x)\,dx$.**

9.




10.




**En los ejercicios 11-16, usar calculadora para hallar las aproximaciones dadas por las reglas del punto medio, de los trapecios y de Simpson con $n = 10$, $n = 20$ y $n = 50$. Comparar esos valores con la aproximación que da la calculadora.**

11. $\int_0^{\pi} \cos x^2\,dx$

12. $\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen} \pi x^2\,dx$

13. $\int_0^2 e^{-x^2}\,dx$

14. $\int_0^3 e^{-x^2}\,dx$

15. $\int_0^{\pi} e^{\cos x}\,dx$

16. $\int_0^1 \sqrt[3]{x^2+1}\,dx$

**En los ejercicios 17-20, calcular el valor exacto y el error (diferencia entre el valor aproximado y el exacto) en las aproximaciones mediante las reglas del punto medio, de los trapecios y de Simpson, con $n = 10$, $n = 20$, $n = 40$ y $n = 80$.**

17. $\int_0^1 5x^4\,dx$

18. $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$

19. $\int_0^{\pi} \cos x\,dx$

20. $\int_0^{\pi/4} \cos x\,dx$

21. Rellenar los huecos con la potencia más apropiada de 2 (2, 4, 8...). Si se dobla $n$, el error en la regla del punto medio se divide entre _____. Si se dobla $n$, el error en la regla de los trapecios se divide entre _____. Si se dobla $n$, el error en la regla de Simpson se divide entre _____.

22. Rellenar los huecos con la potencia más apropiada de 2 (2, 4, 8,...). Si se divide entre 2 la longitud del intervalo $b - a$, el error en la regla del punto medio se divide entre _____, el de la regla de los trapecios se divide entre _____ y el de la regla de Simpson se divide entre _____.

**En los ejercicios 23-26, aproximar el valor dado usando la regla de (a) el punto medio, (b) los trapecios y (c) Simpson, con $n = 4$.**

23. $\ln 4 = \int_1^4 \frac{1}{x}\,dx$

24. $\ln 8 = \int_1^8 \frac{1}{x}\,dx$

25. $\text{sen } 1 = \int_0^1 \cos x\,dx$

26. $e^2 = \int_0^1 (2e^{2x} + 1)\,dx$

27. En el ejercicio 23, hallar el número de pasos necesario para garantizar una precisión de $10^{-7}$.

28. En el ejercicio 25, hallar el número de pasos necesario para garantizar una precisión de $10^{-7}$.

29. Para cada una de las reglas del ejercicio 17, calcular la cota de error y compararla con el error real.

30. Para cada una de las reglas del ejercicio 19, calcular la cota de error y compararla con el error real.

**En los ejercicios 31-34, usar (a) la regla de los trapecios y (b) la regla de Simpson, para estimar $\int_0^2 f(x)\,dx$, a partir de los datos que se especifican.**

31.

| $x$ | 0,0 | 0,25 | 0,5 | 0,75 | 1,0 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 4,0 | 4,6 | 5,2 | 4,8 | 5,0 |

| $x$ | 1,25 | 1,5 | 1,75 | 2,0 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 4,6 | 4,4 | 3,8 | 4,0 |

32.

| $x$ | 0,0 | 0,25 | 0,5 | 0,75 | 1,0 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1,0 | 0,6 | 0,2 | –0,2 | –0,4 |

| $x$ | 1,25 | 1,5 | 1,75 | 2,0 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0,4 | 0,8 | 1,2 | 2,0 |

33.

| $x$ | 0,0 | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 1,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 2,4 | 2,6 | 2,9 | 3,2 | 3,4 | 3,6 |

| $x$ | 1,2 | 1,4 | 1,6 | 1,8 | 2,0 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 3,8 | 3,9 | 4,0 | 4,1 | 4,2 |

34.

| $x$ | 0,0 | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 1,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1,2 | 0,8 | 0,4 | 0,2 | –0,4 | –0,6 |

| $x$ | 1,2 | 1,4 | 1,6 | 1,8 | 2,0 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | –0,4 | –0,2 | 0,0 | 0,4 | 1,2 |

**En los ejercicios 35 y 36, la tabla da las medidas (en pies) de la anchura de un terreno a intervalos de 10 pies. Estimar el área del terreno.**

35.

| $x$ | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 56 | 54 | 58 | 62 | 58 | 58 | 62 |

| $x$ | 70 | 80 | 90 | 100 | 110 | 120 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 56 | 52 | 48 | 40 | 32 | 22 |

36.

| $x$ | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 26 | 30 | 28 | 22 | 28 | 32 | 30 |

| $x$ | 70 | 80 | 90 | 100 | 110 | 120 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 33 | 31 | 28 | 30 | 32 | 22 |

**En los ejercicios 37 y 38 se da la velocidad de un móvil en varios instantes. Con esos datos, estimar la distancia recorrida.**

37.

| $t$ (s) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $v(t)$ (pies/s) | 40 | 42 | 40 | 44 | 48 | 50 | 46 |

| $t$ (s) | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $v(t)$ (pies/s) | 46 | 42 | 44 | 40 | 42 | 42 |

38.

| $t$ (s) | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $v(t)$ (pies/s) | 26 | 30 | 28 | 30 | 28 | 32 | 30 |

| $t$ (s) | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 | 24 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $v(t)$ (pies/s) | 33 | 31 | 28 | 30 | 32 | 32 |

**En los ejercicios 39 y 40, los datos están tomados de una pneumotacografía y miden el flujo de aire por la garganta, en litros por segundo. La integral del flujo de aire es igual al aire exhalado. Estimar ese volumen.**

39.

| $t$ (s) | 0 | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 1,0 | 1,2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(t)$ (l/s) | 0 | 0,2 | 0,4 | 1,0 | 1,6 | 2,0 | 2,2 |

| $t$ (s) | 1,4 | 1,6 | 1,8 | 2,0 | 2,2 | 2,4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(t)$ (l/s) | 2,0 | 1,6 | 1,2 | 0,6 | 0,2 | 0 |

40.

| $t$ (s) | 0 | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 1,0 | 1,2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(t)$ (l/s) | 0 | 0,1 | 0,4 | 0,8 | 1,4 | 1,8 | 2,0 |

| $t$ (s) | 1,4 | 1,6 | 1,8 | 2,0 | 2,2 | 2,4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(t)$ (l/s) | 2,0 | 1,6 | 1,0 | 0,6 | 0,2 | 0 |

**En los ejercicios 41-46, usar la información dada sobre $f(x)$ y sus derivadas para determinar si (a) la regla del punto medio daría un valor exacto, por exceso o por defecto (o si no hay suficiente información para decidirlo). Repetir lo mismo para (b) la regla de los trapecios y (c) la regla de Simpson.**

41. $f''(x) > 0, f'(x) > 0$

42. $f''(x) > 0, f'(x) < 0$

43. $f''(x) < 0, f'(x) > 0$

44. $f''(x) < 0, f'(x) < 0$

45. $f''(x) = 4, f'(x) > 0$

46. $f''(x) = 0, f'(x) > 0$

47. Dibujar un trapecio con base $L$ y alturas $h_1$ y $h_2$. Probar que su área es $L(h_1 + h_2)/2$.

48. Sean $R_1$ y $R_2$ las aproximaciones por sumas de Riemann para $\int_a^b f(x)\,dx$, con los extremos de la izquierda y de la derecha, respectivamente, como puntos de evaluación, para un $n > 0$. Probar que la regla de los trapecios da como aproximación $(R_1 + R_2)/2$.

49. Para los datos de la figura 4.30, dibujar un esbozo de las dos parábolas aproximantes de la regla de Simpson. Comparar las aproximaciones de la regla de Simpson y la de los trapecios. Explicar gráficamente por qué la aproximación de la regla de Simpson es menor.

50. Para los datos de la figura 4.30, trazar una curva suave que pase por los cinco puntos de los datos. ¿Qué aproxima mejor a esa curva, los segmentos rectos de la figura 4.31 o las parábolas del ejercicio 49? ¿Cambiaría su respuesta si hubiera doble número de puntos?

51. En la mayoría de cálculos hechos hasta ahora, las reglas de los trapecios y del punto medio están en lados opuestos del valor exacto (una da un valor por defecto, la otra por exceso). También se ha podido constatar que la de los trapecios tiende a estar dos veces más alejada del valor exacto que la del punto medio. Sabiendo eso, explicar por qué la combinación $\frac{1}{3}T_n + \frac{2}{3}M_n$ daría una buena estimación de la integral. (Aquí $T_n$ representa la aproximación por la regla de los trapecios con $n$ particiones y $M_n$ la de la regla del punto medio).

52. Demostrar que la aproximación $\frac{1}{3}T_n + \frac{2}{3}M_n$ del ejercicio 51 es idéntica a la de la regla de Simpson.

53. Calcular las aproximaciones de la regla de los trapecios $T_4$, $T_8$ y $T_{16}$ de $\int_0^1 3x^2\,dx$ y el error (la diferencia entre esos valores aproximados y el valor exacto 1). Verificar que cuando se divide entre 2 el paso, el error se divide entre 4. Cuando aparecen pautas de este tipo se pueden aprovechar para la **extrapolación**. La idea es simple: si las aproximaciones van siendo menores, el valor de la integral es menor y debemos ser capaces de predecir (extrapolar) en qué medida es menor. Dado que $(T_4 - I) = 4(T_8 - I)$, donde $I = 1$ es el valor exacto, probar que $I = T_8 + \dfrac{T_8 - T_4}{3}$. Probar además que $I = T_{16} + \dfrac{T_{16} - T_8}{3}$. En general, se tienen las *aproximaciones* $(T_4 - I) \approx 4(T_8 - I)$ e $I \approx T_8 + \dfrac{T_8 - T_4}{3}$. Entonces la extrapolación $E_{2n} = T_{2n} + \dfrac{T_{2n} - T_n}{3}$ está más cerca de la integral exacta que las aproximaciones $T_{2n}$ y $T_n$ de la regla de los trapecios. Probar que, de hecho, $E_{2n}$ es igual a la aproximación de la regla de Simpson con $2n$.

# EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO

**En los ejercicios 1-20, hallar las primitivas.**

1. $\int (4x^2 - 3)\,dx$
2. $\int (x - 3x^5)\,dx$
3. $\int \frac{4}{x}\,dx$
4. $\int \frac{4}{x^2}\,dx$
5. $\int 2 \operatorname{sen} 4x\,dx$
6. $\int 3 \sec^2 x\,dx$
7. $\int (x - e^{4x})\,dx$
8. $\int 3\sqrt{x}\,dx$
9. $\int \frac{x^2 + 4}{x}\,dx$
10. $\int \frac{x}{x^2 + 4}\,dx$
11. $\int e^x (1 - e^{-x})\,dx$
12. $\int e^x (1 + e^x)^2\,dx$
13. $\int x\sqrt{x^2 + 4}\,dx$
14. $\int x(x^2 + 4)\,dx$
15. $\int 6x^2 \cos x^3\,dx$
16. $\int 4x \sec x^2 \tan x^2\,dx$
17. $\int \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$
18. $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$
19. $\int \tan x\,dx$
20. $\int \sqrt{3x + 1}\,dx$
21. Hallar una función $f(x)$ tal que $f'(x) = 3x^2 + 1$ y $f(0) = 2$.
22. Hallar una función $f(x)$ tal que $f'(x) = e^{-2x} + 1, f(0) = 3$.
23. Determinar la función posición $s(t)$ si la función velocidad es $v(t) = -32t + 10$ y la posición inicial es $s(0) = 2$.
24. Hallar la función posición si la aceleración es $a(t) = 6$, la velocidad inicial $v(0) = 10$ y la posición inicial $s(0) = 0$.
25. Escribir todos los términos y calcular $\sum_{i=1}^{6} (i^2 + 3i)$.
26. Traducir en notación de sumatorios y calcular la suma de los cuadrados de los primeros 12 enteros positivos.

**En los ejercicios 27 y 28 usar las reglas de la suma para calcular el valor de la suma propuesta.**

27. $\sum_{i=1}^{100} (i^2 - 1)$
28. $\sum_{i=1}^{100} (i^2 + 2i)$
29. Evaluar la suma $\frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} (i^2 - i)$ y el límite de la suma cuando $n$ tiende a $\infty$.
30. Sea $f(x) = x^2 - 2x$ en el intervalo $[0, 2]$. Dar la lista de los puntos de evaluación para la regla del punto medio con $n = 4$. Esbozar la función y los rectángulos aproximantes. Calcular la suma de Riemann.

**En los ejercicios 31-34, aproximar el área bajo la curva usando $n$ rectángulos y la regla de evaluación especificada.**

31. $y = x^2$ en $[0, 2]$, $n = 8$, evaluación en el punto medio
32. $y = x^2$ en $[-1, 1]$, $n = 8$, evaluación en el extremo de la derecha
33. $y = \sqrt{x + 1}$ en $[0, 3]$, $n = 8$, evaluación en el punto medio
34. $y = e^{-x}$ en $[0, 1]$, $n = 8$, evaluación en el extremo de la izquierda

**En los ejercicios 35 y 36, usar los valores dados de la función para estimar el área bajo la curva, usando (a) evaluación en el extremo de la izquierda, (b) evaluación en el extremo de la derecha, (c) la regla de los trapecios y (d) la regla de Simpson.**

35.

| $x$ | 0,0 | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 1,0 | 1,2 | 1,4 | 1,6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1,0 | 1,4 | 1,6 | 2,0 | 2,2 | 2,4 | 2,0 | 1,6 | 1,4 |

36.

| $x$ | 1,0 | 1,4 | 1,8 | 2,2 | 2,6 | 3,0 | 3,4 | 3,8 | 4,2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 4,0 | 3,4 | 3,6 | 3,0 | 2,6 | 2,4 | 3,0 | 3,6 | 3,4 |

37. En los ejercicios 35 y 36, ¿cuál de las cuatro estimaciones del área espera que sea la más precisa? Justificar la respuesta.
38. Si $f(x)$ es positiva y cóncava hacia arriba, la aproximación mediante la regla del punto medio ¿será mayor o menor que el área exacta? Misma pregunta para la regla de los trapecios.

**En los ejercicios 39 y 40, evaluar la integral calculando el límite de las sumas de Riemann.**

39. $\int_0^1 2x^2\,dx$
40. $\int_0^2 (x^2 + 1)\,dx$

**En los ejercicios 41 y 42, escribir el área total como una integral o como suma de integrales y evaluarla a continuación.**

41. El área entre el eje $x$ y la gráfica de $y = 3x - x^2$.
42. El área entre el eje $x$ y la gráfica de $y = x^3 - 3x^2 + 2x$, $0 \le x \le 2$.

**En los ejercicios 43 y 44, usar la función velocidad para hallar la distancia recorrida en el intervalo de tiemo que se indica.**

43. $v(t) = 40 - 10t$, $[1, 2]$
44. $v(t) = 20e^{-t/2}$, $[0, 2]$

**En los ejercicios 45 y 46, calcular el valor medio de la función en el intervalo.**

45. $f(x) = e^x$, $[0, 2]$
46. $f(x) = 4x - x^2$, $[0, 4]$

**En los ejercicios 47-58 calcular la integral.**

47. $\int_0^2 (x^2 - 2)\,dx$
48. $\int_{-1}^1 (x^3 - 2x)\,dx$
49. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} 2x\,dx$
50. $\int_0^{\pi/4} \sec^2 x\,dx$

51. $\int_0^{10} (1 - e^{-t/4})\, dt$

52. $\int_0^1 te^{-t^2}\, dt$

53. $\int_0^2 \frac{x}{x^2+1}\, dx$

54. $\int_1^2 \frac{\ln x}{x}\, dx$

55. $\int_0^2 x\sqrt{x^2+4}\, dx$

56. $\int_0^2 x(x^2+1)\, dx$

57. $\int_0^1 (e^x - 2)^2\, dx$

58. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x/2)\, dx$

**En los ejercicios 59 y 60 hallar la derivada.**

59. $f(x) = \int_2^x (\operatorname{sen} t^2 - 2)\, dt$

60. $f(x) = \int_0^{x^2} \sqrt{t^2+1}\, dt$

**En los ejercicios 61 y 62, calcular a mano las aproximaciones, con $n = 4$, por la regla (a) del punto medio, (b) de los trapecios y (c) de Simpson.**

61. $\int_0^1 \sqrt{x^2+4}\, dx$

62. $\int_0^2 e^{-x^2/4}\, dx$

63. Repetir el ejercicio 61 usando $n = 20$ y $n = 40$, con ayuda de calculadora.

64. Repetir el ejercicio 62 usando $n = 20$ y $n = 40$, con ayuda de calculadora.

65. Sea $f(t)$ el ritmo al que se produce cierto suceso (el nacimiento de un animal o el destello de una luciérnaga, por ejemplo). El ritmo medio $R$ en un intervalo $[0, T]$ es entonces $R = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, dt$. Supondremos que $f(t)$ es periódica con período $T$. [Esto es, $f(t + T) = f(t)$ para todo $t$].

**Asincronía perfecta** significa que el suceso es igualmente probable en todo instante. Argumentar que eso corresponde a una función ritmo constante $f(t) = c$ y hallar el valor de $c$ (en términos de $R$ y $T$).

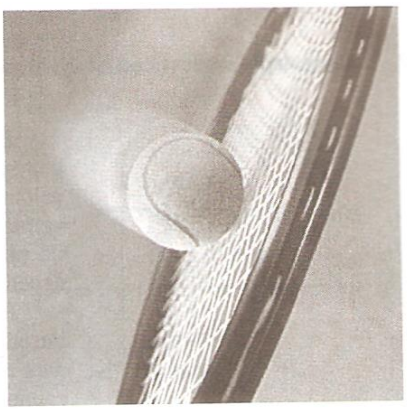
**Sincronía perfecta** significa que el suceso sólo ocurre una vez en cada período (por ejemplo, todos los destellos de las luciérnagas al mismo tiempo o todos los nacimientos en el mismo momento). Veamos cómo es la función ritmo en este caso. En primer lugar, definimos el **grado de sincronía** como $\frac{\text{área bajo } f \text{ y sobre } R}{RT}$. Probar que si $f(t)$ es constante, el grado de sincronía es 0. A continuación, representar y hallar el grado de sincronía de las funciones siguientes (suponiendo $T > 2$):

$$f_1(t) = \begin{cases} (RT)(t - \frac{T}{2}) + RT & \text{si } \frac{T}{2} - 1 \le t \le \frac{T}{2} \\ (-RT)(t - \frac{T}{2}) + RT & \text{si } \frac{T}{2} \le t \le \frac{T}{2} + 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

$$f_2(t) = \begin{cases} (4RT)(t - \frac{T}{2}) + 2RT & \text{si } \frac{T}{2} - \frac{1}{2} \le t \le \frac{T}{2} \\ (-4RT)(t - \frac{T}{2}) + 2RT & \text{si } \frac{T}{2} \le t \le \frac{T}{2} + \frac{1}{2} \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

$$f_3(t) = \begin{cases} (9RT)(t - \frac{T}{2}) + 3RT & \text{si } \frac{T}{2} - \frac{1}{3} \le t \le \frac{T}{2} \\ (-9RT)(t - \frac{T}{2}) + 3RT & \text{si } \frac{T}{2} \le t \le \frac{T}{2} + \frac{1}{3} \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Conjeture un límite para los grados de sincronía de $f_n(t)$ cuando $n \to \infty$. La «función» a la que tienden $f_n(t)$ cuando $n \to \infty$ se llama **función impulso** de intensidad $RT$. Discutir si ese nombre es apropiado.



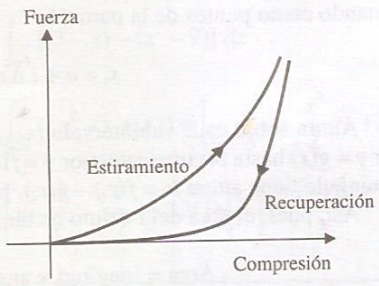
# CAPÍTULO 5

# APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Cuando estamos jugando o viendo jugar algún deporte no pensamos en cuestiones de ciencia o de ingeniería. Sin embargo, el diseño de equipamiento deportivo se ha convertido en una empresa muy técnica, con papel importante de las Matemáticas. Una comparación superficial de la raqueta de tenis de madera de 1980 y la Kevlar de 1990 basta para desvelar el impacto dramático de la tecnología en el deporte (véase la fotografía adjunta).

Uno de los principales objetivos en el diseño de una raqueta de tenis es crear un «punto dulce» lo más extenso posible. Se llama así a la zona de la raqueta que produce un golpe ideal. Para algunos jugadores, ideal significa máxima potencia, para otros vibración mínima de la raqueta. Ambos conceptos son traducibles en términos de problemas de ingeniería susceptibles de ser analizados mediante integrales definidas.

El diseño de una raqueta de tenis comienza por el estudio de la física de la colisión entre la raqueta y la bola. A gran velocidad, una pelota de tenis se aplana casi por completo y las cuerdas de la raqueta se estiran. (Una fotografía notable de este hecho se encuentra en *Stretching the Limits*, de Lee Torrey, donde también se dan más detalles acerca del punto dulce). La manera en que pelota y cordaje recuperan su forma determina las características del vuelo resultante de la pelota. Medidas detalladas proporcionan gráficas de las fuerzas y desplazamientos de las cuerdas al estirarse y al recuperar su posición natural (véase figura adjunta). Se observa que la energía perdida por rozamiento es proporcional al área entre las dos curvas. Además, el giro de la raqueta depende de su centro de masa y de su momento de inercia. Si mencionamos esto aquí es porque el área entre dos curvas, el centro de masa y el momento de inercia de la raqueta se calculan usando integrales definidas. Discutiremos el área entre curvas en la sección 5.1 y el centro de masa y los momentos en la sección 5.6.



La colisión entre una raqueta y una pelota determina la velocidad y el giro de la pelota tras ser golpeada. Estas características determinan, a su vez, la trayectoria de vuelo de la pelota (si se está acertado, una grácil curva hacia la esquina de la pista). En la sección 5.4 veremos cómo calcular la longitud de la curva, mientras que el movimiento de un proyectil (la pelota de tenis, por ejemplo) se analiza en la sección 5.5. La velocidad de la pelota depende de una cantidad llamada impulso, que introduciremos en la sección 5.6.

Este capítulo pondrá de manifiesto la versatilidad de la integral definida. Aunque será introducida como un método para calcular el área bajo una curva, veremos que se utiliza para resolver un espectro muy amplio de situaciones. Las aplicaciones contenidas en este capítulo son sólo una muestra de las que encuentra en Matemáticas, Estadística, Física e Ingeniería.

Ya hemos considerado la integral definida desde tres perspectivas: gráfica (áreas con signo), numérica (aproximación por sumas de Riemann) y teórica (teorema fundamental del Cálculo). Debe tener presentes las tres mientras analizamos cada nueva aplicación, con especial atención al papel que desempeñan en la conexión de cada nuevo problema con la integración. De ese modo se dará cuenta de que el argumento común a todas esas aplicaciones es la integral definida.

## 5.1 ÁREA ENTRE CURVAS

Inicialmente, la integral definida se ha introducido, en el Capítulo 4, para calcular el área bajo una curva. En particular, para cualquier función $f(x) \geq 0$ y continua en $[a, b]$, queríamos hallar el área bajo la curva $y = f(x)$ en el intervalo $[a, b]$. Empezábamos haciendo una **partición** del intervalo $[a, b]$ en $n$ subintervalos de igual anchura, $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$. Los puntos de la partición se denotan por $x_0 = a$, $x_1 = x_0 + \Delta x$, $x_2 = x_1 + \Delta x$, y así sucesivamente. Es decir.

$$x_i = x_0 + i\,\Delta x, \text{ para } i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

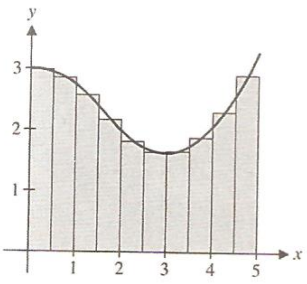



**Figura 5.1**
Aproximación del área.

En cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ construimos un rectángulo de altura $f(c_i)$ para algún $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, como indica la figura 5.5. La suma de las áreas de esos $n$ rectángulos se tomaba como aproximación del área $A$ bajo la curva:

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x.$$

Al tomar más y más rectángulos, las sumas de sus áreas se iban acercando al valor exacto del área bajo la curva y ese límite daba lo que se ha llamado integral definida:

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx.$$

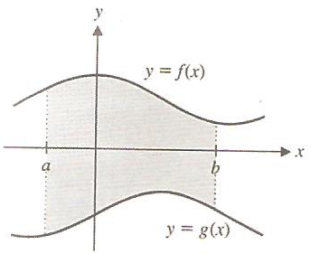



**Figura 5.2**
Área entre dos curvas.

En esta sección extenderemos esta noción. Sean $f$ y $g$ dos funciones continuas en $[a, b]$ tales que $f(x) \geq g(x)$ para todo $x$ en $[a, b]$. Deseamos hallar el área entre las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ en el intervalo $[a, b]$ (figura 5.2). Puesto que no sabemos aún cómo calcularla exactamente, vamos a aproximarla usando rectángulos.

Como antes, partimos el intervalo $[a, b]$ en $n$ subintervalos de igual anchura, $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$, tomando como puntos de la partición

$$x_i = a + i\,\Delta x, \text{ para } i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Ahora sobre cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ construimos un rectángulo desde la curva inferior $y = g(x)$ hasta la curva superior $y = f(x)$ (figura 5.3a). La figura 5.3b indica que el $i$-ésimo rectángulo tiene altura $h_i = f(c_i) - g(c_i)$, para ciertos $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Así, pues, el área del $i$-ésimo rectángulo es

$$\text{Área} = \text{longitud} \times \text{anchura} = h_i\,\Delta x = [f(c_i) - g(c_i)]\,\Delta x.$$

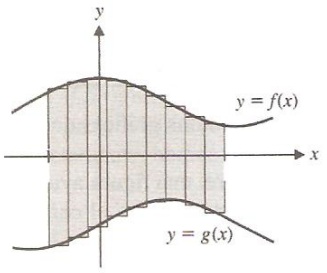



**Figura 5.3a**
Área aproximada.

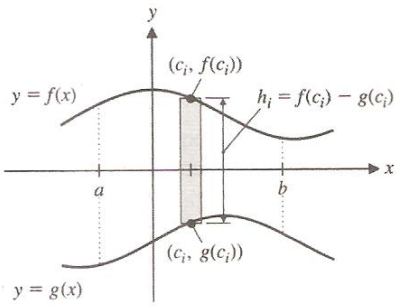



**Figura 5.3b**
Área del $i$-ésimo rectángulo.

Tomamos la suma de las áreas de los rectángulos como aproximación del valor exacto del área $A$ entre las dos gráficas:

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} [f(c_i) - g(c_i)]\,\Delta x.$$

Finalmente, si existe el límite para $n \to \infty$, dará el área exacta, lo que identificamos como una integral definida:

**Área entre dos curvas**

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} [f(c_i) - g(c_i)]\,\Delta x = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx. \tag{1.1}$$

**Nota 1.1**

La fórmula (1.1) sólo es válida si $f(x) \geq g(x)$ en el intervalo $[a, b]$. En general, el área entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ viene dada por

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx.$$

Nótese que para calcular esta integral hay que calcular primero

$$\int_c^d [f(x) - g(x)]\,dx$$

en cada uno de los subintervalos donde $f(x) \geq g(x)$, después

$$\int_c^d [g(x) - f(x)]\,dx$$

en cada uno de los subintervalos donde $g(x) \geq f(x)$ y finalmente sumar esas integrales.

## Ejemplo 1.1 Área entre dos curvas

Calcular el área acotada por las gráficas de $y = 3 - x$ e $y = x^2 - 9$ (figura 5.4).

**Solución** La región, ilustrada en la figura 5.4, viene determinada por la intersección de dos curvas. Las coordenadas $x$ de los puntos de intersección serán los límites de integración. Para hallarlas, igualamos a cero las dos funciones y resolvemos en $x$. Se tiene

$$3 - x = x^2 - 9, \text{ o sea, } 0 = x^2 + x - 12 = (x - 3)(x + 4).$$

Así, pues, las curvas se cortan en $x = -4$ y en $x = 3$. Ahora hay que ver cuál de las gráficas es la frontera superior de la región. En este caso, la curva superior es $y = 3 - x$. Por tanto, para cada valor de $x$ la altura del rectángulo indicado en la figura 5.4 es

$$h(x) = (3 - x) - (x^2 - 9).$$

No se preocupe por el hecho de que $(x^2 - 9) < 0$ en parte del intervalo. La altura de un rectángulo dado sigue siendo $h(x)$. Por (1.1), el área entre las curvas viene dada por

$$A = \int_{-4}^{3} [(3 - x) - (x^2 - 9)]\,dx$$

$$= \int_{-4}^{3} (-x^2 - x + 12) = \left[ -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 12x \right]_{-4}^{3}$$

$$= \left[ -\frac{3^3}{3} - \frac{3^2}{2} + 12(3) \right] - \left[ -\frac{(-4)^3}{3} - \frac{(-4)^2}{2} + 12(-4) \right] = \frac{343}{6}.$$

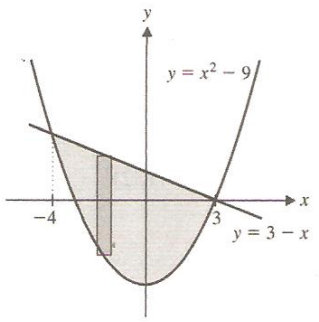



**Figura 5.4**
$y = 3 - x$ e $y = x^2 - 9$.

A veces, la gráfica de una de las funciones es curva superior en parte del intervalo e inferior en otra, como ocurre en el próximo ejemplo.

### Ejemplo 1.2 Área entre dos curvas que se cruzan

Calcular el área acotada por las gráficas de $y = x^2$ e $y = 2 - x^2$ en $0 \le x \le 2$.

**Solución** Como siempre, una figura ayuda a adoptar la estrategia adecuada. La figura 5.5 muestra que las curvas se cortan en el centro del intervalo, así que será necesario calcular dos integrales, una en el intervalo donde $2 - x^2 \ge x^2$ y otra en el intevalo donde $x^2 \ge 2 - x^2$. Parece que se cortan en $x = 1$, siendo $2 - x^2 \ge x^2$ en $0 \le x \le 1$ y $x^2 \ge 2 - x^2$ en $1 \le x \le 2$. Para hallar el punto exacto de corte resolvemos $x^2 = 2 - x^2$, o sea, $2x^2 = 2$, o $x^2 = 1$, con soluciones $x = \pm 1$. Pero $x = -1$ está fuera del intervalo en cuestión, así que el único punto de intersección que nos interesa está en $x = 1$. Por (1.1), el área es

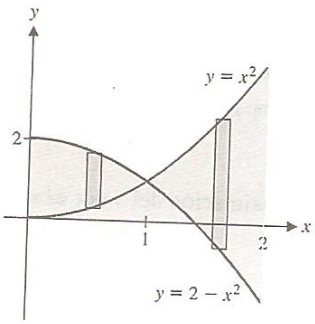



**Figura 5.5**
$y = x^2$ e $y = 2 - x^2$.

$$A = \int_0^1 [(2 - x^2) - x^2]\,dx + \int_1^2 [x^2 - (2 - x^2)]\,dx$$

$$= \int_0^1 (2 - 2x^2)\,dx + \int_1^2 (2x^2 - 2)\,dx = \left[2x - \frac{2x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{2x^3}{3} - 2x\right]_1^2$$

$$= \left(2 - \frac{2}{3}\right) - (0 - 0) + \left(\frac{16}{3} - 4\right) - \left(\frac{2}{3} - 2\right) = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = 4.$$

En el ejemplo 1.2, aunque $2 - x^2 < 0$ en una parte del intervalo, el cálculo del área depende sólo de que $2 - x^2 \ge x^2$ o $x^2 \ge 2 - x^2$. Conviene advertir que ese ejemplo estaba preparado para que el punto de intersección fuera fácil de hallar. En el próximo ejemplo, por el contrario, hay que recurrir a una aproximación numérica.

### Ejemplo 1.3 Un caso en el que los puntos de intersección no se conocen exactamente

Calcular el área acotada por las gráficas de $y = \cos x$ e $y = x^2$.

**Solución** Antes de nada hemos de determinar los puntos de intersección de las curvas. La figura 5.6 indica que las intersecciones están cerca de $x = -1$ y de $x = 1$. Las intersecciones ocurren donde $\cos x = x^2$. No sabemos resolver esta ecuación, de modo que hay que usar algún método de aproximación. [Por ejemplo, se puede aplicar el método de Newton a los ceros de la ecuación $f(x) = \cos x - x^2 = 0$]. Se obtienen así los valores aproximados $x = \pm 0{,}824132$, que serán, por tanto, los límites de integración.
La gráfica muestra que, entre esos dos puntos, $\cos x \ge x^2$, así que el área buscada es

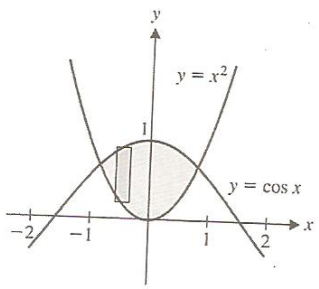



**Figura 5.6**
$y = \cos x$ e $y = x^2$.

$$A \approx \int_{-0{,}824132}^{0{,}824132} (\cos x - x^2)\,dx = \left[\operatorname{sen} x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-0{,}824132}^{0{,}824132}$$

$$= \operatorname{sen} 0{,}824132 - \frac{1}{3}(0{,}824132)^3 - \left[\operatorname{sen}(-0{,}824132) - \frac{1}{3}(-0{,}824132)^3\right]$$

$$\approx 1{,}09475.$$

Nótese que hemos aproximado tanto los límites de integración como el cálculo final.

Calcular el área de algunas regiones exige romper la integral en varias, cada una con distintas fronteras superior e inferior.

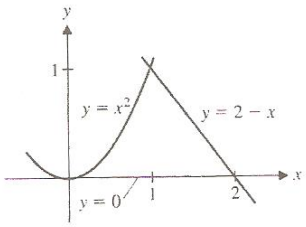



**Figura 5.7a**

$y = x^2$ e $y = 2 - x$.

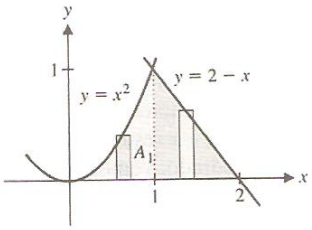



**Figura 5.7b**

$y = x^2$ e $y = 2 - x$.

## Ejemplo 1.4 Área de una región determinada por tres curvas

Hallar el área acotada por las gráficas de $y = x^2$, $y = 2 - x$ e $y = 0$.

**Solución** La figura 5.7a muestra las tres curvas. La curva superior es la parábola $y = x^2$ en la primera porción del intervalo y la recta $y = 2 - x$ en la segunda. Para determinar entre qué puntos exactamente, hemos de resolver la ecuación

$$2 - x = x^2, \quad \text{o sea,} \quad 0 = x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1).$$

Como $x = -2$ cae fuera del intervalo, la intersección buscada ocurre en $x = 1$. Eso obliga a romper la región en dos partes (figura 5.7b) y a calcular el área de cada una por separado. Por tanto, el área de la región es

$$A = A_1 + A_2 = \int_0^1 (x^2 - 0)\,dx + \int_1^2 [(2 - x) - 0]\,dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{5}{6}.$$

Aunque en el ejemplo 1.4 ha sido fácil romper la región en varios fragmentos, vamos a sugerir una alternativa sorprendentemente útil. Si mira la figura 5.7a, girando la página, con el eje $x$ en posición vertical, verá una única curva que determina las fronteras superior e inferior. Eso equivale a intercambiar los papeles de $x$ e $y$, lo cual da la clave para hallar el área de regiones de este tipo: tratar las fronteras izquierda y derecha de la región como funciones de $y$.

En general, si $f$ y $g$ son funciones continuas de $y$, con $f(y) \geq g(y)$ en el intervalo $c \leq y \leq d$, podemos extender nuestra noción de área al área entre las curvas $x = f(y)$ y $x = g(y)$. En este caso, partimos el intervalo $[c, d]$ en $n$ subintervalos de igual anchura, $\Delta y = \dfrac{d - c}{n}$ (figura 5.8a). Denotamos los puntos de la partición por $y_0 = c$, $y_1 = y_0 + \Delta y$, $y_2 = y_1 + \Delta y$, etc. Es decir,

$$y_i = c + i\,\Delta y, \text{ con } i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

En cada subintervalo $[y_{i-1}, y_i]$ (con $i = 1, 2, \ldots, n$) construimos un rectángulo de anchura $w_i = [f(c_i) - g(c_i)]$, para ciertos $c_i \in [y_{i-1}, y_i]$, como indica la figura 5.8b. El área del $i$-ésimo rectángulo viene dada por

$$\text{Área} = \text{longitud} \times \text{anchura} = [f(c_i) - g(c_i)]\,\Delta y.$$

El área total entre las dos curvas puede aproximarse por

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} [f(c_i) - g(c_i)]\,\Delta y.$$

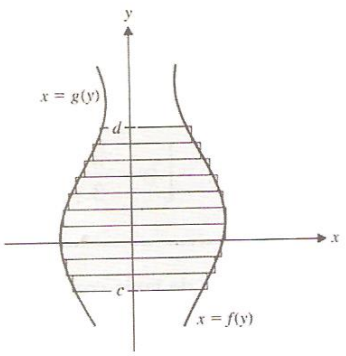



**Figura 5.8a**

Área entre $x = g(y)$ y $x = f(y)$.

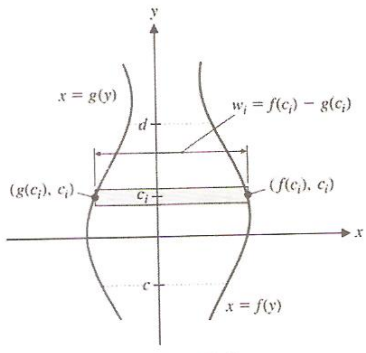



**Figura 5.8b**

Área del $i$-ésimo rectángulo.

Como otras veces, hallamos el área exacta como el límite para $n \to \infty$ y reconociendo en ese límite una integral definida. Así, se obtiene

**Área entre dos curvas**

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} [f(c_i) - g(c_i)]\,\Delta y = \int_c^d [f(y) - g(y)]\,dy. \tag{1.2}$$

## Ejemplo 1.5 Cálculo de un área como integral en $y$

Rehacer el ejemplo 1.4 integrando respecto de $y$.

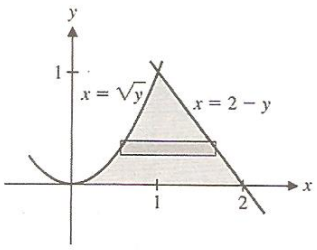



**Figura 5.9**
$y = x^2$ e $y = 2 - x$.

**Solución** La figura 5.9 muestra el área limitada por las gráficas de $y = x^2$, $y = 2 - x$ e $y = 0$. La frontera izquierda es la gráfica de $y = x^2$ y la derecha es la recta $y = 2 - x$, de manera que una sola integral en $y$ será suficiente. Pero antes hemos de escribir esas dos fronteras como funciones de $y$. A tal fin, basta despejar $x$ en $y = x^2$. Se obtiene $x = \sqrt{y}$ (nótese que sólo la mitad derecha de la parábola forma la frontera). Análogamente, de $y = 2 - x$ resulta $x = 2 - y$. Finalmente, estas curvas se cortan cuando $\sqrt{y} = 2 - y$. Elevando al cuadrado, vemos que

$$y = (2 - y)^2 = 4 - 4y + y^2,$$

es decir,

$$0 = y^2 - 5y + 4 = (y - 1)(y - 4).$$

Así, pues, las curvas se cortan en $y = 1$ y en $y = 4$. La figura 5.9 deja claro que $y = 1$ es la solución que nos interesa. (¿A qué corresponde la solución $y = 4$?). Según (1.2), el área viene dada por

$$A = \int_0^1 [(2 - y) - \sqrt{y}]\,dy = \left[2y - \frac{1}{2}y^2 - \frac{2}{3}y^{3/2}\right]_0^1 = 2 - \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{5}{6}.$$

## Ejemplo 1.6 Área de una región acotada por funciones de $y$

Calcular el área acotada por las gráficas de $x = y^2$ y $x = 2 - y^2$.

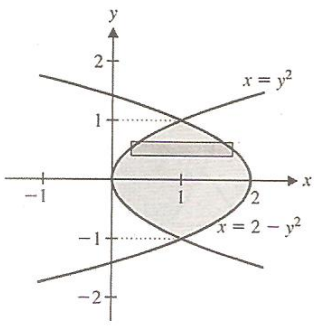



**Figura 5.10**
$x = y^2$ y $x = 2 - y^2$.

**Solución** La figura 5.10 muestra las dos parábolas, una abierta hacia la izquierda y la otra hacia la derecha. Integrar en $x$ exigiría romper en dos la región y hallar por separado las ecuaciones de las fronteras superior e inferior, así que es más fácil integrar en $y$. Para ello hemos de hallar las intersecciones de las dos curvas. Ocurren cuando $y^2 = 2 - y^2$, o sea, $y^2 = 1$, de modo que $y = \pm 1$. En el intervalo $[-1, 1]$ es $2 - y^2 \geq y^2$ (la curva $x = 2 - y^2$ está a la derecha de la curva $x = y^2$). Por tanto, según (1.2), el área es

$$A = \int_{-1}^{1} [(2 - y^2) - y^2]\,dy = \int_{-1}^{1} (2 - 2y^2)\,dy$$

$$= \left[2y - \frac{2}{3}y^3\right]_{-1}^{1} = \left(2 - \frac{2}{3}\right) - \left(-2 + \frac{2}{3}\right) = \frac{8}{3}.$$

Al golpear una pelota de tenis con una raqueta, la pelota cambia de forma: primero se comprime y después se expande. Sea $x$ la compresión de la pelota, con $0 \leq x \leq m$, y sea $f(x)$ la fuerza ejercida por la raqueta sobre la pelota. La energía transferida es proporcional al área bajo la curva $y = f(x)$. Supongamos que $f_c(x)$ es la fuerza durante la compresión y $f_e(x)$ la fuerza durante la expansión. La energía es transferida a la pelota durante la compresión y

transferida por la pelota durante la expansión, de modo que la energía perdida por la pelota en la colisión (debido al rozamiento) es proporcional a $\int_0^m [f_c(x) - f_e(x)]\,dx$. Por tanto, el porcentaje de energía perdida en la colisión viene dado por

$$100\,\frac{\int_0^m [f_c(x) - f_e(x)]\,dx}{\int_0^m f_c(x)\,dx}$$

## Ejemplo 1.7 Estimación de la energía perdida por una pelota

Se han efectuado medidas en varios golpes de tenis con los resultados de la tabla. Estimar el porcentaje de energía perdida por la pelota en la colisión con la raqueta.

| $x$ (pulg.) | 0,0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_c(x)$ (libras) | 0 | 25 | 50 | 90 | 160 |
| $f_e(x)$ (libras) | 0 | 23 | 46 | 78 | 160 |

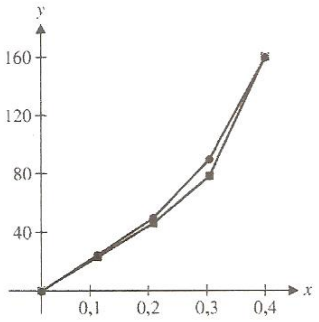



**Figura 5.11**
Fuerza ejercida sobre una pelota de tenis.

**Solución** La figura 5.11 muestra los puntos correspondientes a esos datos conectados por segmentos rectos.

Necesitamos estimar el área entre las dos curvas y el área bajo la curva superior. Como no tenemos una fórmula para ninguna de las dos funciones, tenemos que recurrir a un método numérico. Con el método de Simpson aplicado a $\int_0^{0,4} f_c(x)\,dx$, obtenemos

$$\int_0^{0,4} f_c(x)\,dx \approx \frac{0,1}{3}\,[0 + 4(25) + 2(50) + 4(90) + 160] = 24.$$

Con el fin de aproximar $\int_0^{0,4} [f_c(x) - f_e(x)]\,dx$, por el método de Simpson, necesitamos una tabla de valores de $f_c(x) - f_e(x)$. Restando, vemos que

| $x$ | 0,0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_c(x) - f_e(x)$ | 0 | 2 | 4 | 12 | 0 |

de donde deducimos, por la regla de Simpson.

$$\int_0^{0,4} [f_c(x) - f_e(x)]\,dx \approx \frac{0,1}{3}\,[0 + 4(2) + 2(4) + 4(12) + 0] = \frac{6,4}{3}.$$

Así, pues, el porcentaje de energía perdido es $\dfrac{100(6,4/3)}{24} = 8,9\%$. Con más de un 90% de su energía retenida tras la colisión, es una pelota muy «viva».

# EJERCICIOS 5.1

1. Supongamos que las funciones $f$ y $g$ satisfacen $f(x) \geq g(x) \geq 0$ en todo $x$ del intervalo $[a, b]$. Explicar, en términos de las áreas $A_1 = \int_a^b f(x)\,dx$ y $A_2 = \int_a^b g(x)\,dx$, por qué el área entre las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ viene dada por $\int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$.

2. Supongamos que las funciones $f$ y $g$ satisfacen $f(x) \leq g(x) \leq 0$ en todo $x$ del intervalo $[a, b]$. Explicar, en términos de las áreas $A_1 = \int_a^b f(x)\,dx$ y $A_2 = \int_a^b g(x)\,dx$, por qué el área entre las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ viene dada por $\int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$.

3. Las velocidades de dos automóviles $A$ y $B$ son $v_A(t)$ y $v_B(t)$ mph, respectivamente. Si $v_A(t) \geq v_B(t)$ para todo $t$, $v_A(0) = v_B(0)$, y la carrera transcurre entre $t = 0$ y $t = 2$ horas, explicar por qué $A$ ganará con una ventaja de $\int_0^2 [v_A(t) - v_B(t)]\,dt$ millas.

4. Las velocidades de dos automóviles $A$ y $B$ son $v_A(t)$ y $v_B(t)$ mph, respectivamente. Si $v_A(t) \geq v_B(t)$ en $0 \leq t \leq 0{,}5$ y $1{,}1 \leq t \leq 1{,}6$, mientras que $v_B(t) \geq v_A(t)$ en $0{,}5 \leq t \leq 1{,}1$ y en $1{,}6 \leq t \leq 2$, describir la diferencia entre $\int_0^2 |v_A(t) - v_B(t)|\,dt$ y $\int_0^2 [v_A(t) - v_B(t)]\,dt$. ¿Qué integral dice quién es el ganador?

**En los ejercicios 5-12, calcular el área entre las curvas en el intervalo que se especifica.**

5. $y = x^3$, $y = x^2 - 1$, $1 \leq x \leq 3$

6. $y = \cos x$, $y = x^2 + 2$, $0 \leq x \leq 2$

7. $y = e^x$, $y = x - 1$, $-2 \leq x \leq 0$

8. $y = e^{-x}$, $y = x^2$, $1 \leq x \leq 4$

9. $y = x^2 - 1$, $y = 1 - x$, $0 \leq x \leq 2$

10. $y = x^2 - 3$, $y = x - 1$, $0 \leq x \leq 3$

11. $y = x^3 - 1$, $y = 1 - x$, $-2 \leq x \leq 2$

12. $y = x^4 + x - 2$, $y = x - 1$, $-2 \leq x \leq 2$

**En los ejercicios 13-20, hacer un esbozo de la región determinada por las intersecciones de las curvas y calcular su área.**

13. $y = x^2 - 1$, $y = 7 - x^2$

14. $y = x^2 - 1$, $y = \frac{1}{2}x^2$

15. $y = x^2 + 1$, $y = 3x - 1$

16. $y = x^2 - x - 4$, $y = x + 4$

17. $y = x^3$, $y = 3x + 2$

18. $y = x^3 - 2x^2$, $y = x^2$

19. $y = x^3$, $y = x^2$

20. $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$

**En los ejercicios 21-26, esbozar y estimar el área de la región determinada por las intersecciones de las curvas.**

21. $y = e^x$, $y = 1 - x^2$

22. $y = x^4$, $y = 1 - x$

23. $y = \operatorname{sen} x$, $y = x^2$

24. $y = \cos x$, $y = x^4$

25. $y = x^4$, $y = 2 + x$

26. $y = \ln x$, $y = x^2 - 2$

**En los ejercicios 27-34, hacer un esbozo de la región acotada por las curvas dadas y calcular su área. Elegir la variable independiente que permita expresar el área mediante una única integral.**

27. $y = x$, $y = 2 - x$, $y = 0$

28. $y = 2x (x > 0)$, $y = 3 - x^2$, $x = 0$

29. $y = 3y$, $x = 2 + y^2$

30. $x = y^2$, $x = 1$

31. $x = y$, $x = -y$, $x = 1$

32. $y = x$, $y = -x$, $y = 2$

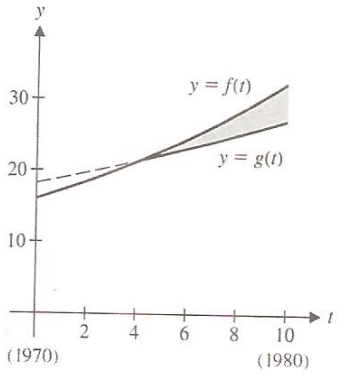
33. $y = x$, $y = 2$, $y = 6 - x$, $y = 0$

34. $x = y^2$, $x = 4$

35. El valor medio de una función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ es $A = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$. Calcular el valor medio de $f(x) = x^2$ en $[0, 3]$ y probar que el área comprendida entre $y = A$ e $y = f(x)$ es igual al área comprendida entre $y = A$ y el eje $x$.

36. Demostrar que el resultado del ejercicio 35 es siempre cierto, probando que $\int_a^b [f(x) - A]\,dx = 0$.

37. El consumo de petróleo en Estados Unidos en los años 1970-1974 siguió el modelo $f(t) = 16{,}1e^{0{,}07t}$ (millones de barriles anuales), donde $t = 0$ corresponde a 1970. A causa de la crisis de 1974, el consumo cambió al modelo $g(t) = 21{,}3e^{0{,}04(t-4)}$, $t \geq 4$. Probar que $f(4) \approx g(4)$ y explicar qué representa este número. Calcular el área entre $f(t)$ y $g(t)$ en $4 \leq t \leq 10$. Usar este número para estimar el número de barriles ahorrados por la reducción de consumo entre 1974 y 1980.




38. Supongamos que el consumo de madera en un país sigue el modelo $76e^{0{,}03t}$ m$^3$/año y el crecimiento de árboles nuevos produce $50 - 6e^{0{,}09t}$ m$^3$/año. Calcular e interpretar el área entre las curvas en $0 \leq t \leq 10$.

39. En una población hay $b(t) = 2e^{0{,}04t}$ millones de nacimientos al año y $d(t) = 2e^{0{,}02t}$ millones de defunciones. Probar que $b(t) \geq d(t)$ para $t \geq 0$ y explicar por qué el área entre las dos curvas representa el incremento de la población. Calcular ese incremento en el período $0 \leq t \leq 10$.

40. En una población hay $b(t) = 2e^{0.04t}$ millones de nacimientos al año y $d(t) = 3e^{0.02t}$ millones de defunciones. Hallar la intersección $T$ de las curvas ($T > 0$). Interpretar el área entre las curvas en $0 \le t \le T$ y en $T \le t \le 30$. Calcular el cambio neto de población en $0 \le t \le 30$.

41. De forma análoga a la compresión y expansión de una pelota de tenis, la fuerza ejercida por un tendón como función de su extensión determina la pérdida de energía. Sean $x$ la extensión, $f_s(x)$ la fuerza durante la extensión y $f_r(x)$ la fuerza durante la distensión del tendón. Los datos de la tabla corresponden al tendón posterior de un ualabí (véase el libro *Exploring Biomechanics*, de Alexander):

| $x$ (mm) | 0 | 0,75 | 1,5 | 2,25 | 3,0 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_s(x)$ (N) | 0 | 110 | 250 | 450 | 700 |
| $f_r(x)$ (N) | 0 | 100 | 230 | 410 | 700 |

Usando la regla de Simpson, estimar la proporción de energía devuelta por el tendón.

42. El arco del pie humano actúa como un muelle al caminar o al saltar, almacenando energía cuando el pie se estira (cuando el arco se pone plano) y devolviéndola cuando el pie se distiende. En los datos, $x$ es el desplazamiento vertical del arco, $f_s(x)$ la fuerza durante la extensión y $f_r(x)$ la fuerza durante la distensión (véase el libro *Exploring Biomechanics*, de Alexander):

| $x$ (mm) | 0 | 2,0 | 4,0 | 6,0 | 8,0 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_s(x)$ (N) | 0 | 300 | 1.000 | 1.800 | 3.500 |
| $f_r(x)$ (N) | 0 | 150 | 700 | 1.300 | 3.500 |

Usando la regla de Simpson, estimar la proporción de energía devuelta por el arco.

43. Las velocidades de dos objetos que caen por efecto de la gravedad vienen dadas por $f(t) = -40 - 32t$ pies/s y $g(t) = -30 - 32t$ pies/s. Si los dos objetos parten de la misma altura en $t = 0$, calcular e interpretar el área entre las curvas para $0 \le t \le 10$.

44. Las velocidades de dos atletas vienen dadas por $f(t) = 10$ mph y $g(t) = 10 - \text{sen } t$ mph. Evaluar e interpretar las integrales $\int_0^{\pi} [f(t) - g(t)]\,dt$ y $\int_0^{2\pi} [f(t) - g(t)]\,dt$.

45. Las velocidades de dos automóviles $A$ y $B$ vienen dadas por $f(t) = 40(1 - e^{-t})$ mph y $g(t) = 20t$ mph, respectivamente. Ambos arrancan en $t = 0$ desde el mismo lugar. Estimar (a) la máxima ventaja de $A$, (b) el instante en que $B$ le alcanza.

46. Ya está en disposición de calcular áreas de regiones planas «simples». Para una región general acotada a la izquierda por una función $x = i(y)$, a la derecha por $x = d(y)$, arriba por una función $y = t(x)$ y por abajo por $y = b(x)$, escribir el área como suma de integrales. (Ayuda: Divida la región en subregiones cuyas áreas se puedan expresar como integral de $i(y) - d(y)$ o de $t(x) - b(x)$).

## 5.2 VOLUMEN

A lo largo de este capítulo tendremos ocasión de comprobar la sorprendente versatilidad de la integral. En la sección 5.1 se ha utilizado para calcular el área una medida del tamaño de una región bidimensional. En esta sección, las usaremos para calcular el volumen una medida del tamaño de las regiones tridimensionales. Empezamos con un problema sencillo.

Una piscina tiene su parte superior rectangular, de 50 por 15 metros. Si orientamos los ejes como indica la figura 5.12, la superficie superior de la piscina viene dada por $y = 0$. Su fondo tiene por ecuación $y = \dfrac{1}{165.000}(x^4 - 67x^3) - 3$. (Nótese que la profundidad en un punto es $-y$). Calcular el volumen de agua necesario para llenar la piscina hasta el nivel $y = 0$.

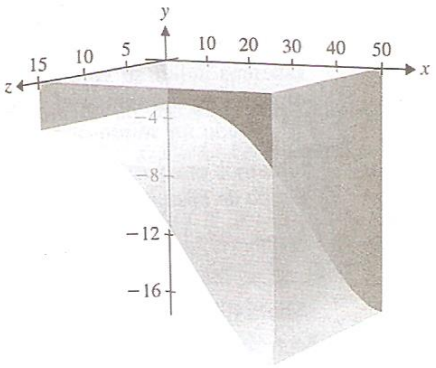



**Figura 5.12**

Vista lateral de una piscina.

Antes una pregunta previa: ¿de qué sólidos sabe calcular el volumen en este momento? Tal vez su respuesta sea: caja rectangular ($V$ = longitud × anchura × altura), esfera ($V = \frac{4}{3}\pi r^3$) y cilindro circular recto ($V = \pi r^2 h$). En cierto sentido, el primero y el tercero son del mismo tipo: **cilindros**. En efecto, un cilindro es *cualquier* sólido cuyas secciones (perpendiculares a alguna recta fija) son idénticas. Así, pues, la caja rectangular es un cilindro con secciones rectangulares.

Es interesante advertir la conexión entre las fórmulas de esos dos tipos de cilindros. El volumen de un cilindro circular recto es

$$V = \underbrace{(\pi r^2)}_{\text{área de la sección}} \times \underbrace{h}_{\text{altura}}.$$

Y el de la caja

$$V = \underbrace{\text{longitud} \times \text{anchura}}_{\text{área de la sección}} \times \text{altura}$$

En general, el volumen de cualquier cilindro se calcula así:

$$V = (\text{área de la sección}) \times (\text{altura}).$$

En la figura 5.12 vemos que la piscina es también un cilindro, ya que todas las secciones perpendiculares al eje $x$ son idénticas. Por tanto, su volumen es el producto del área (constante) de una de sus secciones por la anchura (15 metros). El área de la sección es la comprendida entre las curvas $y = 0$ e $y = \frac{1}{165.000}(x^4 - 67x^3) - 3$. Por (1.1),

$$A = \int_0^{50} \left\{ 0 - \left[ \frac{1}{165.000}(x^4 - 67x^3) - 3 \right] \right\} dx$$

y, en consecuencia, el volumen $V$ viene dado por

$$V = \text{Área} \times 15 = -15 \int_0^{50} \left[ \frac{1}{165.000}(x^4 - 67x^3) - 3 \right] dx$$

$$= \left[ \frac{-1}{55.000}x^5 + \frac{67}{44.000}x^4 + 45x \right]_0^{50} \approx 6.085 \text{ m}^3$$

## Notas históricas

**Arquímedes (*ca.* 287-212 a.C.).** Matemático y científico griego, fue el primero en deducir fórmulas para áreas y volúmenes. Arquímedes es famoso por haber descubierto las leyes fundamentales de la Hidrostática (el célebre «¡Eureka!» y su salida precipitada de la bañera para compartir, a voz en grito, su descubrimiento por las calles) y las palancas («Dadme un punto de apoyo y moveré la Tierra»). Ingeniero de inventiva admirable, sus catapultas, grúas y espejos aterrorizaron a un masivo ejército romano cuando intentó la conquista de Siracusa, su ciudad natal. El día en que el asedio romano concluyó, a los tres años, Arquímedes se hallaba estudiando unos dibujos geométricos trazados sobre la arena. Un soldado romano intentó arrestarlo. Las últimas palabras de Arquímedes fueron: «No destruyas mis círculos».

## Volumen por rodajas (o rebanadas)

Si el área de la sección o la anchura de un sólido no son constantes, tenemos que modificar nuestro método. Por ejemplo, consideremos una piscina en forma de reloj de arena (figura 5.13). Salvo que su profundidad sea constante, la piscina no es un cilindro, así que no sabemos hallar su volumen. Adoptaremos, por tanto, la estrategia que ya hemos utilizado otras veces: aproximar el volumen y mejorar después esas aproximaciones.

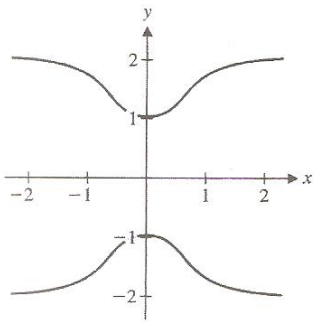



**Figura 5.13**
Piscina (vista desde arriba).

Dado un sólido que se extiende desde $x = a$ hasta $x = b$, con secciones de área $A(x)$, tomamos una partición del intervalo $[a, b]$ en $n$ subintervalos de igual anchura, $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Como de costumbre, denotamos $x_0 = a$, $x_1 = a + \Delta x$, y así sucesivamente, es decir,

$$x_i = a + i\,\Delta x, \text{ con } i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Ahora dividimos el sólido en rodajas perpendiculares al eje $x$ cortando por cada uno de los $(n - 1)$ puntos $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ (figura 5.14a). Necesitamos aproximar el volumen de cada rodaja. Si las rodajas son finas, el área de sus secciones es casi constante. De hecho, la rodaja entre $x_{i-1}$ y $x_i$ es casi un cilindro (figura 5.14b). Así que si $c_i$ denota cualquier punto del intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, el área de cada sección en ese intervalo es aproximadamente $A(c_i)$.

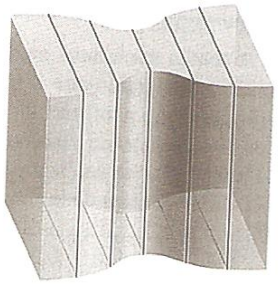


Figura 5.14a
Sólido en rebanadas.

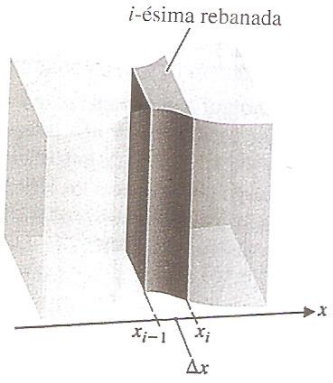



Figura 5.14b
*i*-ésima rebanada.

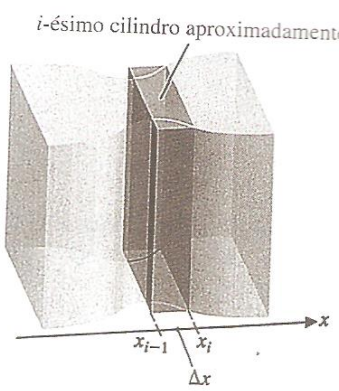



Figura 5.14a
*i*-ésimo cilindro aproximante.

Por tanto, podemos aproximar el volumen $V_i$ de la $i$-ésima rodaja por el de un cilindro de área de sección constante $A(c_i)$ en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ (figura 5.14c):

$$V_i \approx \underbrace{A(c_i)}_{\text{área de la sección}} \underbrace{\Delta x_i}_{\text{anchura}}$$

donde $\Delta x$ es la anchura de la rodaja.

Repitiendo este proceso para las $n$ rodajas, podemos aproximar el volumen total $V$ del sólido por

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} A(c_i)\,\Delta x.$$

Al tomar un número mayor de rodajas, cada vez más estrechas, la aproximación mejorará. De esa forma obtenemos el valor exacto del volumen como el límite

$$V = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} A(c_i)\,\Delta x,$$

supuesto que exista ese límite. Reconocemos inmediatamente esas sumas como sumas de Riemann, de manera que el límite define una integral. La fórmula para el volumen exacto es, finalmente,

**Volumen de un sólido con secciones de área $A(x)$**

$$\boxed{V = \int_a^b A(x)\,dx.} \qquad (2.1)$$

**Nota 2.1**

Seguiremos un proceso análogo al anterior para deducir muchas fórmulas importantes: área, volumen, longitud de arco, área de una superficie. Dividimos un objeto en $n$ fragmentos, aproximamos la cantidad de interés para cada uno de ellos, sumamos las aproximaciones y tomamos el límite para acabar reconociendo una integral al final del camino. Por eso es fundamental comprender la idea que se esconde detrás de la fórmula (2.1). Memorizar la fórmula no le ayudará en ese aspecto. Pero si entiende las piezas del rompecabezas y cómo encajan (partición, aproximación, suma y límite hasta dar con la integral definida), dominará el resto de este capítulo sin dificultad.

## Ejemplo 2.1 Cálculo del volumen por áreas de secciones

Supongamos que la piscina de la figura 5.13, en forma de reloj de arena, está definida por las curvas $y(x) = \pm\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^4+1}} + 1\right)$ metros, en $-3 \le x \le 3$ y que su profundidad es $d(x) = 6 + x$ metros. Calcular su volumen.

**Solución** Para todo $x$, la sección de la piscina perpendicular al eje $x$ es un rectángulo de dimensiones $2\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^4+1}} + 1\right)$ por $6 + x$. Por (2.1), el volumen viene dado por

$$V = \int_{-3}^{3} \underbrace{2\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^4+1}} + 1\right)}_{\text{área de la sección}} (6 + x)\,dx \approx 123{,}81 \text{ m}^3,$$

donde hemos calculado la integral numéricamente. (Se puede usar la regla de Simpson o un PCS).

En el ejemplo 2.1 sabíamos cómo calcular el área de la sección exactamente. En muchas aplicaciones importantes no conocemos el área exacta de la sección y hay que aproximarla realizando medidas. En tales circunstancias, podremos hallar el volumen por integración numérica.

### Ejemplo 2.2 Estimación del volumen con áreas medidas experimentalmente

En la tomografía computarizada o en la IRM se toman numerosas medidas y se procesan en un ordenador para producir una imagen tridimensional del tejido que el médico desea analizar. Es un proceso parecido al de las rodajas que hemos utilizado para calcular el volumen de un sólido. Sin embargo, en este caso las representaciones matemáticas de varias capas del tejido se combinan para producir una imagen tridimensional que pueda ser analizada por el médico. Supongamos que un barrido de IRM da los siguientes valores del área de las secciones de un tumor.

| $x$ (cm) | 0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A(x)$ (cm$^2$) | 0,0 | 0,1 | 0,4 | 0,3 | 0,6 | 0,9 | 1,2 | 0,8 | 0,6 | 0,2 | 0,1 |

Estimar el volumen del tumor.

**Solución** Para calcular el volumen del tumor tenemos que usar (de acuerdo con (2.1)) la integral

$$V = \int_0^1 A(x)\,dx,$$

pero ahora sólo conocemos $A(x)$ en unos cuantos puntos. ¿Es suficiente para nuestro objetivo? Sí, ya que podemos aproximar la integral por la regla de Simpson (sección 4.7) con $\Delta x = 0{,}1$:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 A(x)\,dx \\ &\approx \frac{b-a}{3n}\left[A(0) + [4A(0{,}1) + 2A(0{,}2) + 4A(0{,}3) + 2A(0{,}4) + 4A(0{,}5) \right. \\ &\qquad \left. + 2A(0{,}6) + 4A(0{,}7) + 2A(0{,}8) + 4A(0{,}9) + A(1)\right] \\ &= \frac{0{,}1}{3}(0 + 0{,}4 + 0{,}8 + 1{,}2 + 1{,}2 + 3{,}6 + 2{,}4 + 3{,}2 + 1{,}2 + 0{,}8 + 0{,}1) \\ &= 0{,}49667 \text{ cm}^3. \end{aligned}$$

En el ejemplo 2.1, el área de las secciones era fácil de calcular porque eran rectángulos. Dedicaremos un notable esfuerzo a otra situación favorable en ese aspecto: los sólidos generados al hacer girar una curva en torno a una recta, cuyas secciones son discos circulares. Tales sólidos, llamados **sólidos de revolución**, son comunes en la Naturaleza y en los objetos de fabricación industrial.

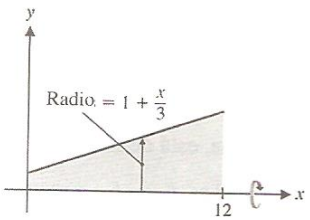



**Figura 5.15a**
Girar en torno al eje $x$.

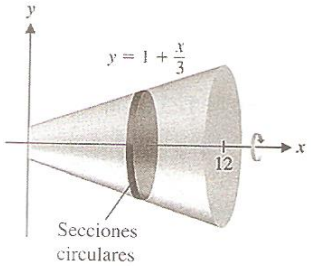



**Figura 5.15b**
Sólido de revolución.

### Ejemplo 2.3 Volumen de un sólido de revolución

Se hace girar el segmento de recta $y = 1 + \frac{x}{3}$, $0 \le x \le 12$ (figura 5.15a) en torno al eje $x$. El sólido resultante tiene forma de megáfono (figura 5.15b). Calcular su volumen.

**Solución** Para todo $x$ de ese intervalo, la sección perpendicular al eje $x$ es un disco circular de radio $r = 1 + \frac{x}{3}$. (¡Piense en esto!). El área de esa sección circular es

$$A(x) = \pi r^2 = \pi\left(1 + \frac{x}{3}\right)^2.$$

De (2.1) se sigue que el volumen de ese sólido de revolución es

$$V = \int_0^{12} \overbrace{\pi\left(1 + \frac{x}{3}\right)^2}^{\text{área de la sección} = \pi r^2}\,dx = \int_0^{12} \pi\left(1 + \frac{2x}{3} + \frac{x^2}{9}\right)dx$$

$$= \pi\left[x + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{27}\right]_0^{12} = \pi(12 + 48 + 64) = 124\pi.$$

El ejemplo 2.3 ilustra lo que se conoce como **método de los discos** para calcular el volumen de un sólido generado por una curva que gira en torno a una recta vertical u horizontal. A continuación presentamos el método en general.

## El método de los discos

Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $[a, b]$, con $f(x) \geq 0$ en todo $x$ de $[a, b]$. Hagamos girar, en torno al eje $x$, la región acotada por la curva $y = f(x)$ y el eje $x$ en $a \leq x \leq b$. Se genera así un sólido de revolución (figuras 5.16a y 5.16b).

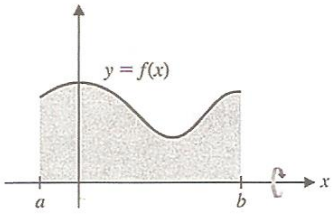



**Figura 5.16a**
$y = f(x) \geq 0$.

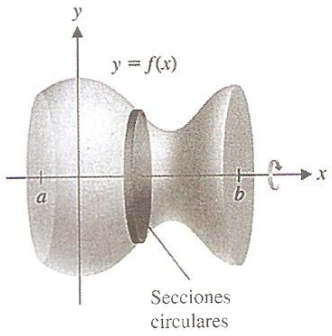



**Figura 5.16b**
Sólido de revolución.

Podemos calcular su volumen haciendo en él cortes perpendiculares al eje $x$ cuyas secciones son discos circulares de radio $r = f(x)$ (figura 5.16b). Por (2.1), el volumen del sólido viene dado por

**Volumen de un sólido de revolución (método de los discos)**

$$V = \int_a^b \underbrace{\pi [f(x)]^2}_{\text{área de la sección} = \pi r^2} dx. \tag{2.2}$$

Como las secciones de este sólido de revolución son todas discos circulares, nos referiremos a este método como el método de los discos.

### Ejemplo 2.4 Cálculo del volumen por el método de los discos

Calcular el volumen del sólido de revolución generado al hacer girar la curva $y = \sqrt{x}$, en el intervalo $[0, 4]$, en torno al eje $x$.

**Solución** Es importante hacer un esbozo de la región y del sólido que genera con el fin de tener una idea clara de cuál es el radio de las secciones circulares. En las figuras 5.17a y 5.17b vemos que el radio de cada sección circular es $r = \sqrt{x}$. Por (2.2), el volumen es

$$V = \int_0^4 \underbrace{\pi[\sqrt{x}]^2}_{\text{área de la sección} = \pi r^2}\, dx = \pi \int_0^4 x\, dx = \pi \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^4 = 8\pi.$$

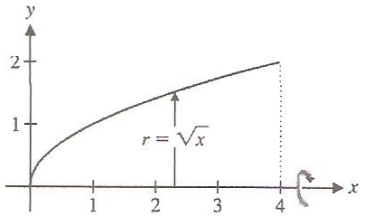



**Figura 5.17a**
$y = \sqrt{x}$.

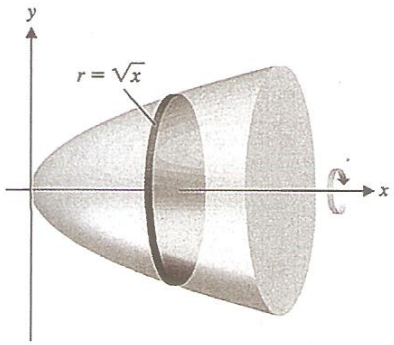



**Figura 5.17b**
Sólido de revolución.

Análogamente, si $g(y) \geq 0$ y $g$ es continua en el intervalo $[c, d]$, al hacer girar la región acotada por la curva $x = g(y)$ y el eje $y$, en $c \leq y \leq d$, en torno al eje $y$, se genera un sólido de revolución (figuras 5.18a y 5.18b). Como muestra la figura 5.18b, las secciones son discos circulares de radio $r = g(y)$. Lo único que ha cambiado es el papel de las variables $x$ e $y$. Así, pues, el volumen de este sólido viene dado por

**Volumen de un sólido de revolución (método de los discos)**

$$V = \int_c^d \underbrace{\pi[g(x)]^2}_{\text{área de la sección} = \pi r^2}\, dx. \tag{2.3}$$

### Nota 2.2

Al usar el método de los discos, que la variable de integración sea $x$ o $y$ **no** depende de la geometría de la región (como sucedía al hallar el área entre dos curvas en la sección 5.1), sino de cuál es el eje de giro: si es el eje $x$, hay que integrar en $x$; si es el eje $y$, hay que integrar en $y$. Es fácil saberlo por simple inspección de un esbozo del sólido. No tome la primera que se le ocurra. Eso es preludio de desastre, ya que en el resto del capítulo va a tener que tomar decisiones análogas, cada una de ellas acorde a las exigencias concretas del problema entre manos.

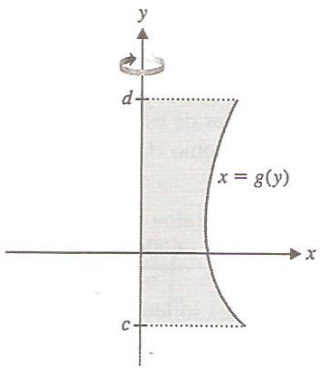



**Figura 5.18a**
Girar en torno al eje $y$.

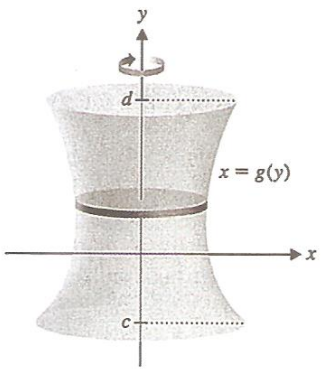



**Figura 5.18b**
Sólido de revolución.

**Ejemplo 2.5** **El método de los discos con $y$ como variable independiente**

Calcular el volumen del sólido resultante al girar la porción de las curva $y = 2 - \frac{x^2}{2}$, entre $x = 0$ y $x = 2$, en torno al eje $y$.

**Solución** Las figuras 5.19a y 5.19b muestran la región que gira y el sólido generado.

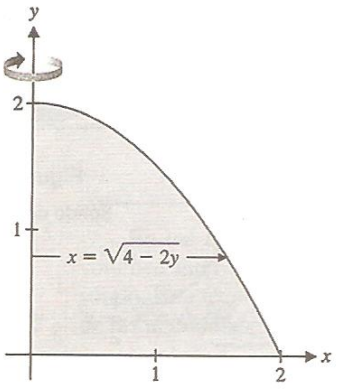



**Figura 5.19a**

$y = 2 - \frac{x^2}{2}$.

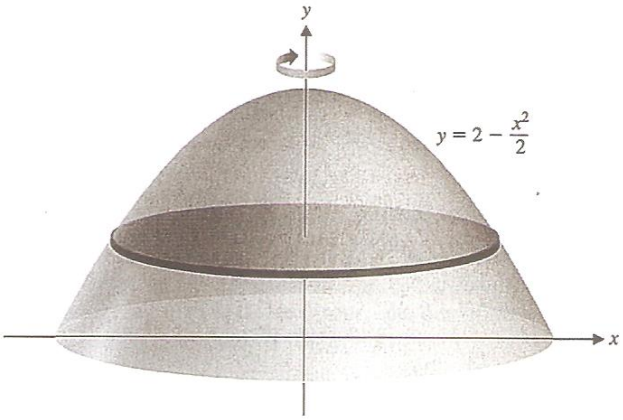



**Figura 5.19b**

Sólido de revolución

Vemos en ellas que el radio de cualquier sección circular viene dado por $x$. Despejando $x$ en $y = 2 - \frac{x^2}{2}$, obtenemos $x = \sqrt{4 - 2y}$. Como la superficie se extiende desde $y = 0$ hasta $y = 2$, el volumen del sólido es, según (2.3),

$$V = \int_0^2 \underbrace{\pi(\sqrt{4 - 2y})^2}_{\pi r^2}\, dy = \int_0^2 \pi(4 - 2y)\, dy$$

$$= \pi \left[ 4y - 2\frac{y^2}{2} \right]_0^2 = \pi(8 - 2^2) = 4\pi.$$

## El método de las arandelas

Respecto de lo visto hasta ahora, en el cálculo del volumen se pueden presentar dos dificultades adicionales. En primer lugar, podemos estar interesados en calcular el volumen de un sólido que tiene un «hueco» o «cavidad» en su interior. Y, en segundo lugar, a veces se hace girar una cierta región respecto de una recta que no es ni el eje $x$ ni el eje $y$. En ambos casos, una mirada a las figuras apropiadas enseña que no suponen obstáculos insalvables. Ilustramos esos casos en los ejemplos que siguen.

**Ejemplo 2.6** **Volumen de sólidos con $y$ sin cavidad interior**

Sea $R$ la región acotada por las gráficas de $y = x^2$, $x = 0$ e $y = 1$. Calcular el volumen de los sólidos generados al girar $R$ en torno a (a) el eje $y$, (b) el eje $x$, (c) la recta $y = 2$.

**Solución** (a) La figura 5.20a muestra la región $R$ y la 5.20b el sólido generado por $R$ al girar en torno al eje $y$. Nótese que esta parte del problema es semejante al ejemplo 2.5.

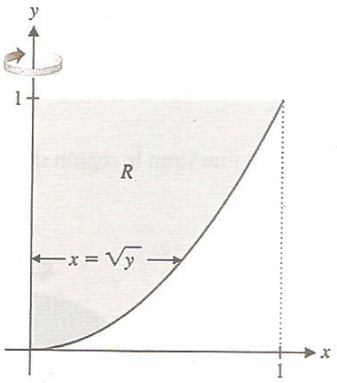



**Figura 5.20a**
$x = \sqrt{y}$.

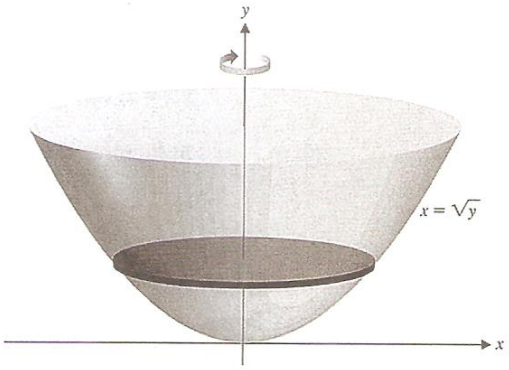



**Figura 5.20b**
Sólido de revolución.

Según (2.3), el volumen viene dado por

$$V = \int_0^1 \underbrace{\pi(\sqrt{y})^2}_{\pi r^2}\, dy = \pi \frac{1}{2} y^2 \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

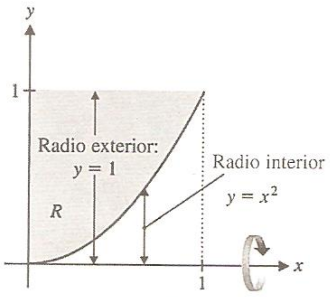



**Figura 5.21a**
$x = \sqrt{y}$.

(b) Esta parte es distinta de todo lo anterior, porque al girar en torno al eje $x$, la región $R$ deja una cavidad dentro del sólido. Las figuras 5.21a y 5.21b muestran una gráfica de $R$ y el sólido generado. La estrategia para hallar el volumen de ese sólido consiste en calcular el volumen del sólido completo (como si no tuviera cavidad) y restarle el volumen de la cavidad. Antes de hacer cálculos observe la geometría del problema. La superficie exterior del sólido se forma haciendo girar la recta $y = 1$ en torno al eje $x$. La cavidad se forma haciendo girar la curva $y = x^2$ en torno al eje $x$. Intente visualizar todo esto con claridad en las figuras. El radio exterior $r_{ext}$ es la distancia de la recta $y = 1$ al eje $x$, o sea, $r_{ext} = 1$. El radio interior $r_{int}$ es la distancia de la curva $y = x^2$ al eje $x$, o sea, $r_{int} = x^2$. Aplicando (2.2) dos veces, vemos que el volumen buscado viene dado por

$$V = \int_0^1 \underbrace{\pi(1)^2}_{\pi\,(\text{radio exterior})^2}\, dx - \int_0^1 \underbrace{\pi(x^2)^2}_{\pi\,(\text{radio interior})^2}\, dx \qquad \text{Método de las arandelas}$$

$$= \pi \int_0^1 (1 - x^4)\, dx = \pi \left( x - \frac{1}{5} x^5 \right) \Big|_0^1 = \pi \left( 1 - \frac{1}{5} \right) = \frac{4}{5} \pi.$$

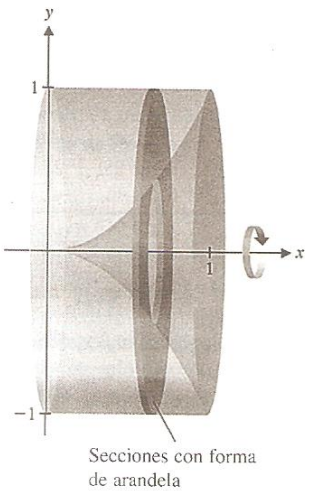



**Figura 5.21b**
Sólido de revolución.

(c) Ahora, al girar la región $R$ en torno a la recta $y = 2$, se forma un sólido con un hueco cilíndrico que lo atraviesa por su centro. Las figuras 5.22a y 5.22b muestran la región y el sólido que genera.

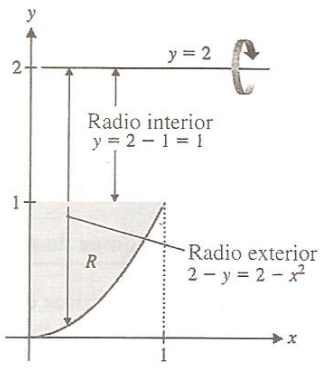



**Figura 5.22a**
Gira en torno a $y = 2$.

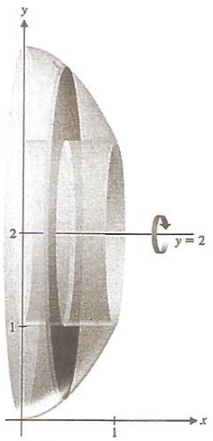



**Figura 5.22b**
Sólido de revolución.

El volumen se calcula como en el apartado (b), restando el volumen de la cavidad del sólido completo. Si mira con atención las figuras verá que el radio exterior es la distancia entre la recta $y = 2$ y la curva $y = x^2$, es decir, $r_{ext} = 2 - x^2$. El radio del orificio interior es la distancia entre las rectas $y = 2$ e $y = 1$, o sea, $r_{int} = 2 - 1 = 1$.
Por (2.2), el volumen resulta ser

$$V = \int_0^1 \underbrace{\pi(2 - x^2)^2}_{\pi\,(\text{radio exterior})^2}\,dx - \int_0^1 \underbrace{\pi(2-1)^2}_{\pi\,(\text{radio interior})^2}\,dx$$

$$= \pi \int_0^1 [(4 - 4x^2 + x^4) - 1]\,dx = \pi\left[3x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5\right]_0^1$$

$$= \pi\left(3 - \frac{4}{3} + \frac{1}{5}\right) = \frac{28}{15}\pi.$$

En los apartados (b) y (c) del ejemplo 2.6 hemos calculado el volumen restando un volumen interior del volumen exterior para tener en cuenta el hueco que había dentro del sólido. Esta técnica es una generalización del método de los discos, que llamaremos **método de las arandelas**, debido a la forma que tiene cada sección del sólido.

### Ejemplo 2.7 Una región que gira respecto de distintas rectas

Sea $R$ la región acotada por $y = 4 - x^2$ e $y = 0$. Calcular el volumen de los sólidos generados por $R$ al girar en torno a (a) el eje $y$, (b) la recta $y = -3$, (c) la recta $y = 7$, (d) la recta $x = 3$.

**Solución** (a) Las figuras 5.23a y 5.23b muestran la región $R$ y el sólido de revolución generado.

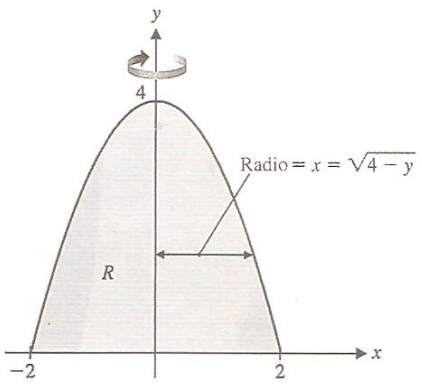



**Figura 5.23a**
Gira en torno al eje $y$.

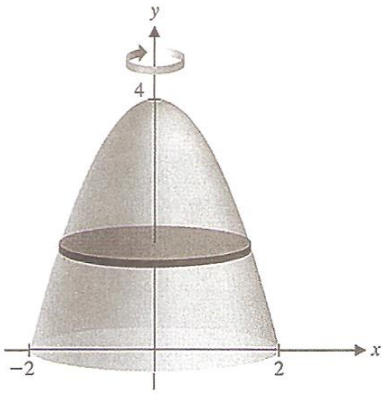



**Figura 5.23b**
Sólido de revolución.

En ellas vemos que la sección es un disco circular de radio igual a la distancia entre la gráfica de $y = 4 - x^2$ y el eje $y$, es decir, $x$. Despejando $x$, se tiene $x^2 = 4 - y$, o sea, $x = \sqrt{4 - y}$, donde hemos elegido $x$ positivo, ya que $x$ representa una distancia. Por (2.3), el volumen del sólido viene dado por

$$V = \int_0^4 \underbrace{\pi\,(\sqrt{4-y})^2}_{\pi\,(\text{radio})^2}\,dy = \pi \int_0^4 (4 - y)\,dy$$

$$= \pi\left[4y - \frac{y^2}{2}\right]_0^4 = 8\pi.$$

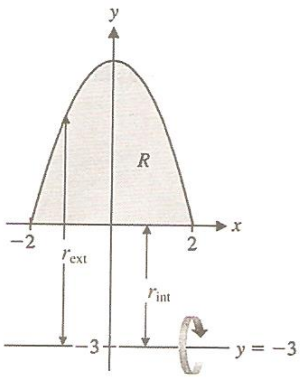



**Figura 5.24a**
Gira en torno a $y = -3$.

Un error frecuente es tomar $2\sqrt{4-y}$ como radio. (¿Qué volumen se obtendría así?).

(b) Las figuras 5.24a y 5.24b muestran la región $R$ y el sólido de revolución generado. Las secciones tienen aspecto de arandelas. Vemos además que el radio exterior $r_{ext}$ es la distancia al eje de giro $y = -3$ de la curva $y = 4 - x^2$. Esto es,

$$r_{ext} = y - (-3) = (4 - x^2) - (-3) = 7 - x^2.$$

Y el radio interior es la distancia desde el borde inferior (el eje $x$) a la recta $y = -3$. Esto es,

$$r_{int} = 0 - (-3) = 3.$$

De acuerdo con (2.2), el volumen viene dado por

$$V = \int_{-2}^{2} \underbrace{\pi(7 - x^2)^2}_{\pi \text{ (radio exterior)}^2}\, dx - \int_{-2}^{2} \underbrace{\pi(3)^2}_{\pi \text{ (radio interior)}^2}\, dx = \frac{1.472}{15}\pi.$$

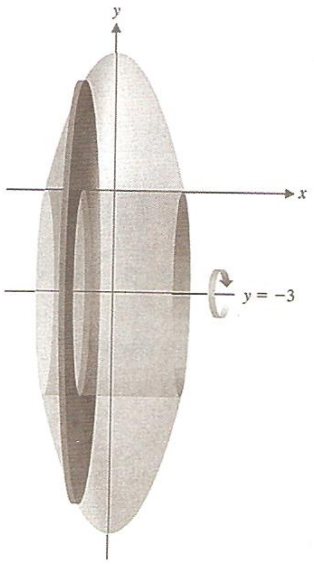



**Figura 5.24b**
Sólido de revolución.

Dejamos los detalles del cálculo como ejercicio.

(c) La situación, con la recta $y = 7$ como eje de giro, es parecida a la parte (b). La región y el sólido generado pueden verse en las figuras 5.25a y 5.25b.

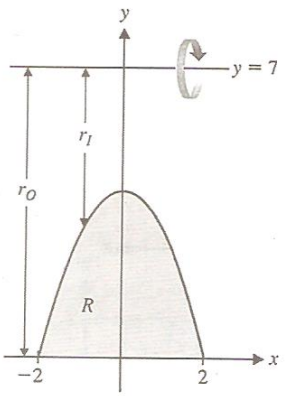



**Figura 5.25a**
Gira en torno a $y = 7$.

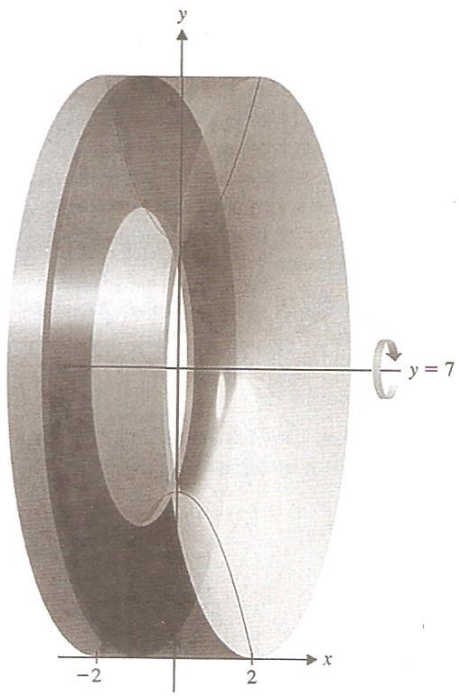



**Figura 5.25b**
Sólido de revolución.

De nuevo, las secciones son arandelas. Esta vez, el radio exterior es la distancia de la recta $y = 7$ al eje $x$, es decir, $r_{ext} = 7$. El radio interior es la distancia de la recta $y = 7$ a la curva $y = 4 - x^2$, es decir,

$$r_{int} = 7 - (4 - x^2) = 3 + x^2.$$

Por (2.2), el volumen del sólido es

$$V = \underbrace{\int_{-2}^{2} \pi(7)^2\,dx}_{\pi\,(\text{radio exterior})^2} - \underbrace{\int_{-2}^{2} \pi(3+x^2)^2\,dx}_{\pi\,(\text{radio interior})^2} = \frac{576}{5}\pi.$$

Dejamos los detalles del cálculo como ejercicio.

(d) La región y el sólido que genera al girar en torno a la recta $x = 3$ se pueden ver en las figuras 5.26a y 5.26b. En este caso, las secciones son arandelas, pero los radios exterior e interior son algo más difíciles de determinar. Mirando con cuidado las figuras 5.26a y 5.26b se observa que el radio exterior es la distancia entre la recta $x = 3$ y la mitad **izquierda** de la parábola, mientras que el radio interior es la distancia entre la recta $x = 3$ y la mitad **derecha** de la parábola. La parábola tiene ecuación $y = 4 - x^2$, o sea, $x^2 = 4 - y$, así que

$$x = \pm\sqrt{4-y}.$$

Aquí $x = \sqrt{4-y}$ corresponde a la mitad derecha de la parábola, mientras que $x = -\sqrt{4-y}$ describe su mitad izquierda. Por tanto,

$$r_{\text{int}} = 3 - \sqrt{4-y} \quad \text{y} \quad r_{\text{ext}} = 3 - (-\sqrt{4-y}) = 3 + \sqrt{4-y}.$$

En consecuencia, el volumen resulta ser

$$V = \underbrace{\int_{0}^{4} \pi(3+\sqrt{4-y})^2\,dy}_{\pi\,(\text{radio exterior})^2} - \underbrace{\int_{0}^{4} \pi(3-\sqrt{4-y})^2\,dy}_{\pi\,(\text{radio interior})^2} = 64\pi,$$

donde dejamos de nuevo los detalles del cálculo, algo tediosos, al cuidado del lector. (En esta ocasión conviene usar un PCS). En la sección 5.3 presentamos un método para calcular el volumen que produce en este último caso integrales mucho más fáciles.

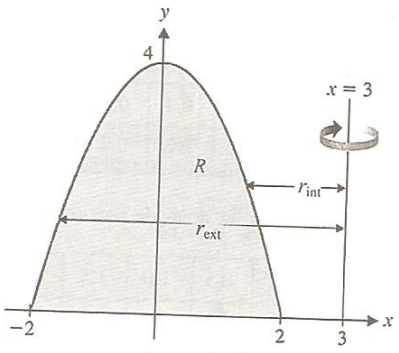



**Figura 5.26a**

Gira en torno a $x = 3$.

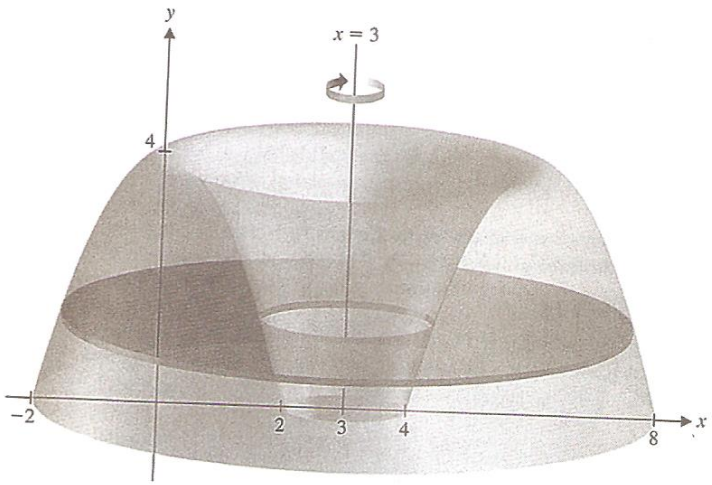



**Figura 5.26b**

Sólido de revolución.

## Nota 2.3

Buena parte del éxito en el cálculo del volumen de sólidos de revolución radica en una figura razonable. Merece la pena perder tiempo en eso y en indicar en ella las curvas con cuidado. Sólo hay que tener presente cómo se calcula el área de la sección. La integración hace el resto. ¡Tenga cuidado!

# EJERCICIOS 5.2

1. Discutir la relación (perpendicularidad o paralelismo) con los ejes $x$ e $y$ de los discos de los ejemplos 2.4 y 2.5. Explicar cómo esa relación permite determinar la variable de integración correcta.

2. Los métodos de los discos y de las arandelas son casos particulares de una fórmula general para el volumen. Discutir las ventajas de aprender fórmulas separadas frente a la posibilidad de deducirlas de una fórmula general en cada ejemplo. ¿Le parece preferible aprender fórmulas extra o elaborar cada problema a partir de principios básicos? ¿Cuántas fórmulas le parecerían demasiadas?

3. Explicar por qué se usaría $y$-integración para calcular el área de un triángulo de la forma $\Delta$ en la sección 5.1. En esta sección, ¿hubiera sido más fácil hallar el volumen girando ese triángulo en torno al eje $x$ o en torno al eje $y$? Explicar la respuesta.

4. En el apartado (a) del ejemplo 2.7, la figura 5.23a se extiende desde $x = -\sqrt{4 - y}$ hasta $x = \sqrt{4 - y}$, pero hemos tomado $\sqrt{4 - y}$ como radio. Explicar por qué ése es el radio correcto y no $2\sqrt{4 - y}$.

**En los ejercicios 5-8, calcular el volumen del sólido con secciones de área $A(x)$.**

5. $A(x) = x + 2, -1 \le x \le 3$

6. $A(x) = 10e^{0,01x}, 0 \le x \le 10$

7. $A(x) = \pi(4 - x)^2, 0 \le x \le 2$

8. $A(x) = 2(x + 1)^2, 1 \le x \le 4$

**En los ejercicios 9-16, escribir una integral apropiada y calcular el volumen.**

9. Una piscina tiene perfil $y = \pm\left(\dfrac{x^2}{\sqrt{x^4 + 1}} + 1\right)$, con $-3 \le x \le 3$ (todas las unidades en pies). Su profundidad es $6 + 3 \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{6}x\right)$. Esbozar una figura de la piscina y calcular el volumen.

10. Una piscina con el mismo perfil que la del ejercicio 9 tiene 3 pies de profundidad en $-3 \le x \le -1$ y 9 pies en $1 \le x \le 3$, y crece linealmente en $-1 \le x \le 1$. Esbozar una figura y calcular el volumen.

11. La gran pirámide de Gizeh tiene 750 pies de lado en su base cuadrada y 500 pies de altura. Calcular su volumen por integración. ¿Coincide su cálculo con lo que da la fórmula geométrica?

12. Si en lugar de terminar la pirámide los constructores de Gizeh se hubieran detenido a 250 pies de altura (con un cuadrado superior de 375 pies de lado), calcular el volumen de esa estructura. Explicar por qué el volumen es mayor que la mitad del de la pirámide completa.

13. La aguja de la torre de una iglesia mide 30 pies de altura y tiene secciones cuadradas, cuyo lado varía linealmente desde 3 pies en la base hasta 6 pulgadas en lo alto. Calcular su volumen.

14. Un ático tiene secciones rectangulares paralelas al suelo y secciones triangulares perpendiculares al suelo. El rectángulo de la base mide 30 por 60 pies y los triángulos tienen 30 pies de base y 10 de altura. Calcular el volumen del ático.

15. Un jarrón tiene secciones circulares de radio $4 + \operatorname{sen}\dfrac{x}{2}$ pulgadas, en $0 \le x \le 2\pi$. Dibujar un esbozo del jarrón y calcular su volumen.

16. Un jarrón tiene secciones circulares de radio $4 - \operatorname{sen}\dfrac{x}{2}$ pulgadas, en $0 \le x \le 2\pi$. Dibujar un esbozo del jarrón y calcular su volumen.

17. La tabla muestra las áreas de las secciones adyacentes de un tumor, medidas en una IRM. Estimar su volumen por la regla de Simpson.

| $x$ (cm) | 0,0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A(x)$ (cm$^2$) | 0,0 | 0,1 | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,4 |

| $x$ (cm) | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1,0 |
|---|---|---|---|---|---|
| $A(x)$ (cm$^2$) | 0,3 | 0,2 | 0,2 | 0,1 | 0,0 |

18. La tabla muestra las áreas de las secciones adyacentes de un tumor, medidas en una IRM. Estimar su volumen por la regla de Simpson.

| $x$ (cm) | 0,0 | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 1,0 | 1,2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A(x)$ (cm$^2$) | 0,0 | 0,2 | 0,3 | 0,2 | 0,4 | 0,2 | 0,0 |

19. Estimar el volumen con las áreas de secciones que se indican.

| $x$ (pies) | 0,0 | 0,5 | 1,0 | 1,5 | 2,0 |
|---|---|---|---|---|---|
| $A(x)$ (pies$^2$) | 1,0 | 1,2 | 1,4 | 1,3 | 1,2 |

20. Estimar el volumen con las áreas de secciones que se indican.

| $x$ (m) | 0,0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $A(x)$ (m$^2$) | 2,0 | 1,8 | 1,7 | 1,6 | 1,8 |

| $x$ (m) | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 |
|---|---|---|---|---|
| $A(x)$ (m$^2$) | 2,0 | 2,1 | 2,2 | 2,4 |

**En los ejercicios 21-28, hallar el volumen del sólido generado por la región dada al girar en torno a la recta que se especifica.**

21. Región acotada por $y = 2 - x$, $y = 0$ y $x = 0$ en torno a (a) el eje $x$; (b) $y = 3$

22. Región acotada por $y = x^2$, $y = 0$ y $x = 2$ en torno a (a) el eje $x$; (b) $y = 4$

23. Región acotada por $y = \sqrt{x}$, $y = 2$ y $x = 0$ en torno a (a) el eje $y$; (b) $x = 4$

24. Región acotada por $y = 2x$, $y = 2$ y $x = 0$ en torno a (a) el eje $y$; (b) $x = 1$

25. Región acotada por $y = e^x$, $x = 0$, $x = 2$ y $y = 0$ en torno a (a) el eje $y$; (b) $y = -2$. Estimar numéricamente.

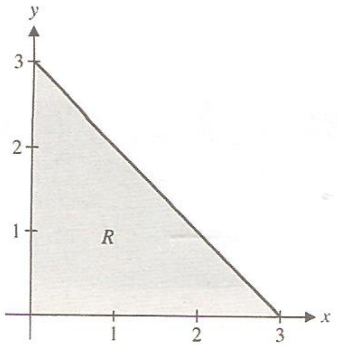
26. Región acotada por $y = \cos x$, $x = 0$ y $y = 0$ en torno a (a) $y = 1$; (b) $y = -1$

27. Región acotada por $y = x^3$, $y = 0$ y $x = 1$ en torno a (a) el eje $y$; (b) el eje $x$

28. Región acotada por $y = x^3$, $y = 0$ y $x = 1$ en torno a (a) $x = 1$; (b) $y = -1$

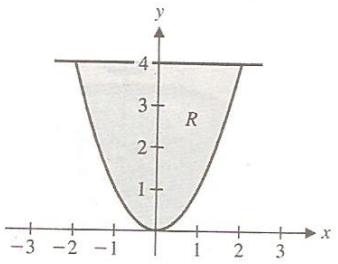
29. Sea $R$ la región acotada por $y = 3 - x$, el eje $x$ y el eje $y$. Calcular el volumen del sólido que genera al girar en torno a la recta indicada.

(a) El eje $y$ (b) El eje $x$ (c) $y = 3$
(d) $y = -3$ (e) $x = 3$ (f) $x = -3$




30. Sea $R$ la región acotada por $y = x^2$ e $y = 4$. Calcular el volumen del sólido que genera al girar en torno a la recta indicada.

(a) $y = 4$ (b) El eje $y$
(c) $y = 6$ (d) $y = -2$




(a) El eje $y$ (b) El eje $x$ (c) $x = 1$
(d) $y = 1$ (e) $x = -1$ (f) $y = -1$

31. Sea $R$ la región acotada por $y = x^2$, $y = 0$ y $x = 1$. Calcular el volumen del sólido que genera $R$ al girar en torno a la recta dada.

32. Sea $R$ la región acotada por $y = x$, $y = -x$ y $x = 1$. Calcular el volumen del sólido que genera $R$ al girar en torno a la recta dada.

(a) El eje $x$ (b) El eje $y$
(c) $y = 1$ (d) $y = -1$

33. Sea $R$ la región acotada por $y = ax^2$, $y = h$ y el eje $y$ ($h$ y $a$ son constantes positivas). Calcular el volumen del sólido generado por $R$ al girar en torno al eje $y$. Probar que la respuesta es igual al volumen del cilindro de altura $h$ y radio $\sqrt{h/a}$. Esbozar una figura para ilustrar esto.

34. Usar el resultado del ejercicio 33 para escribir inmediatamente el volumen del sólido generado al hacer girar la región acotada por $y = ax^2$, $x = \sqrt{h/a}$ en torno al eje $x$ y en torno al eje $y$.

35. El cuadrado $-1 \le x \le 1$ y $-1 \le y \le 1$ gira en torno al eje $y$. Probar que el volumen del sólido resultante es $2\pi$.

36. El círculo limitado por $x^2 + y^2 = 1$ gira en torno al eje $y$. Comprobar que el volumen del sólido resultante es $\frac{4}{3}\pi$.

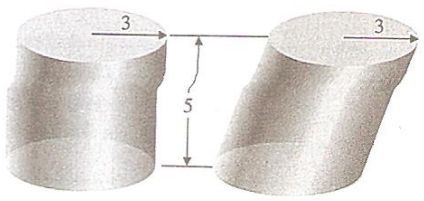
37. El triángulo de vértices $(-1, -1)$, $(0, 1)$ y $(1, -1)$ gira en torno al eje $y$. Probar que el volumen del sólido generado es $\frac{2}{3}\pi$.

38. Dibujar el cuadrado, el círculo y el triángulo de los ejercicios 35-37 en unos mismos ejes. Probar que los volúmenes relativos de los sólidos generados al girar esas regiones en torno al eje $y$ están en la relación 3:2:1.

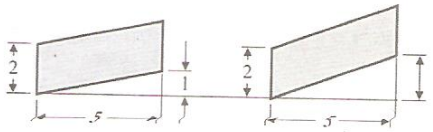
39. Verificar la fórmula para el volumen de una esfera haciendo girar el círculo interior a $x^2 + y^2 = r^2$ en torno al eje $y$.

40. Verificar la fórmula para el volumen de un cono haciendo girar el segmento recto $y = -\frac{h}{r}x + h$, $0 \le x \le r$, en torno al eje $y$.

41. Sea A un cilindro circular recto de radio 3 y altura 5. Sea $B$ un cilindro circular inclinado de radio 3 y altura 5. ¿Tienen $A$ y $B$ el mismo volumen?




42. Averiguar si los dos paralelogramos de la figura tienen la misma área.



43. Generalizar el resultado del ejercicio 38 a cualquier rectángulo. Es decir, dibujar el rectángulo $-a \le x \le a$ y $-b \le y \le b$, la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ y el triángulo de vértices $(-a, -b)$, $(0, b)$ y $(a, -b)$. Probar que los volúmenes relativos de los sólidos generados al girar esas regiones en torno al eje $y$ están en la relación 3:2:1.

44. El sólido, en forma de rosquilla, generado por el círculo interior a $(x-2)^2 + y^2 = 1$ en torno al eje $y$ recibe en Matemáticas el nombre de **toro**. Calcular su volumen y probar que es igual al producto del área del círculo multiplicada por la distancia recorrida por el centro del círculo. Éste es un caso particular del **teorema de Pappus** (s. IV a.C.). Verificar que este resultado es válido, asimismo, para el triángulo del ejercicio 32, apartados (c) y (d).

## 5.3 VOLUMEN POR CAPAS CILÍNDRICAS

Vamos a presentar un método alternativo al de las arandelas (sección 5.2) que ayudará en situaciones como la del ejemplo 2.7 (d), donde el de las arandelas produce una integral desagradable. Más que los detalles del cálculo importa aprender cómo la geometría del problema indica el método conveniente.

Como motivación, volvamos al ejemplo 2.7 (d), donde $R$ era la región acotada por $y = 4 - x^2$ e $y = 0$ (figura 5.27a) desde $x = -2$ hasta $x = 2$. Si $R$ gira, como indica la figura 5.27a, en torno a la recta $x = 3$, ¿cómo calcular el volumen del sólido generado (figura 5.27b)? La geometría de $R$ hace molesto integrar en $y$ porque sus fronteras izquierda y derecha son las dos mitades de la parábola. Por otra parte, como $R$ está limitada arriba simplemente por $y = 4 - x^2$ y abajo por $y = 0$, sería más fácil integrar en $x$. Por desgracia, en este caso el método de las arandelas exige integrar en $y$. La solución está en un método alternativo que utiliza la variable de integración opuesta.

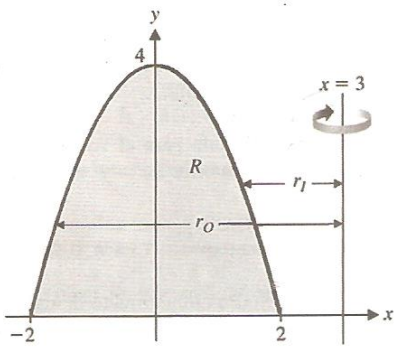



**Figura 5.27a**

Gira en torno a $x = 3$.

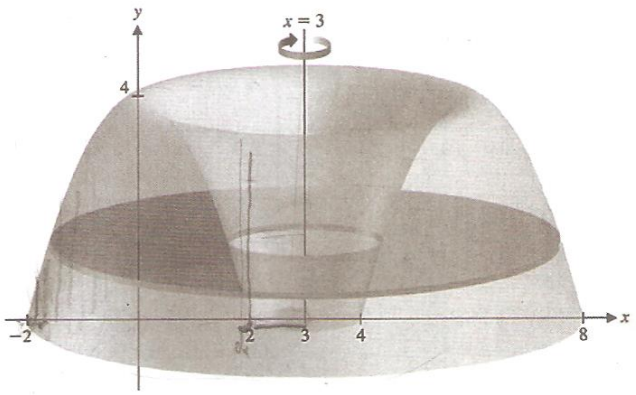



**Figura 5.27b**

Sólido de revolución.

Antes de retomar el ejemplo, consideremos el caso general de una región que gira en torno al eje $y$. Sea $R$ la región acotada por la gráfica de $y = f(x)$ y el eje $x$, en el intervalo $[a, b]$, con $0 < a < b$ y $f(x) \ge 0$ en $[a, b]$ (figura 5.28a). Al girar en torno al eje $y$, genera el sólido de la figura 5.28b.

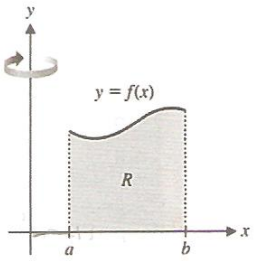



**Figura 5.28a**

Gira en torno al eje $y$.

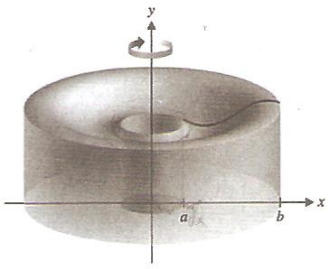



**Figura 5.28b**

Sólido de revolución.

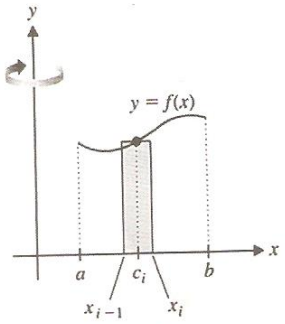



**Figura 5.29a**

$i$-ésimo rectángulo.

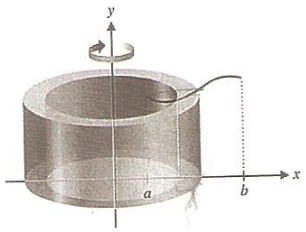



**Figura 5.29b**

Capa cilíndrica.

Partimos $[a, b]$ en $n$ subintervalos de igual anchura $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$. En cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ tomamos un punto $c_i$ y construimos un rectángulo de altura $f(c_i)$ (figura 5.29a). Al girar este rectángulo en torno al eje $y$, genera una fina capa cilíndrica (es decir, un cilindro hueco, como un trozo de tubo), como muestra la figura 5.29b.

Para hallar el volumen de esta capa cilíndrica, imagine que cortamos el cilindro desde arriba hasta abajo y lo aplanamos formando una lámina rectangular (figura 5.29c).

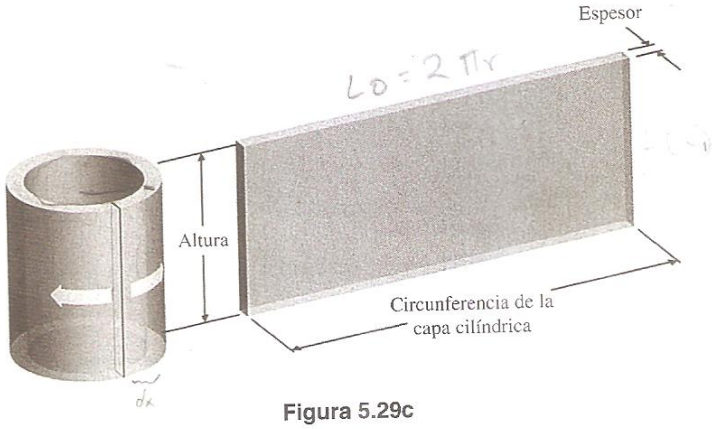



**Figura 5.29c**

Capa cilíndrica aplanada.

La longitud de esa lámina es la circunferencia de la capa cilíndrica, o sea, $2\pi \cdot \text{radio} = 2\pi c_i$. Por tanto, el volumen $V_i$ de la $i$-ésima capa cilíndrica es aproximadamente

$$\begin{aligned} V_i &\approx \text{longitud} \times \text{anchura} \times \text{altura} \\ &= (2\pi \times \text{radio}) \times \text{espesor} \times \text{altura} \\ &= (2\pi c_i)\, \Delta x\, f(c_i). \end{aligned}$$

El volumen $V$ del sólido se puede aproximar mediante la suma de los volúmenes de las $n$ capas cilíndricas:

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} 2\pi \underbrace{c_i}_{\text{radio}} \underbrace{f(c_i)}_{\text{altura}} \underbrace{\Delta x.}_{\text{espesor}}$$

Como ya hemos hecho otras veces, podemos obtener el valor exacto del volumen del sólido tomando el límite $n \to \infty$ e identificando el resultado como una integral definida.

**Volumen de un sólido de revolución (capas cilíndricas)**

$$V = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi c_i f(c_i)\, \Delta x = \int_a^b 2\pi \underbrace{x}_{\text{radio}} \underbrace{f(x)}_{\text{altura}} \underbrace{dx.}_{\text{espesor}} \qquad (3.1)$$

**Advertencia**

No se limite a memorizar la fórmula (3.1). Una vez más, debe entender el significado de sus ingredientes. Es fácil si observa cómo se corresponden con el volumen de una capa cilíndrica: $2\pi$(radio)(altura)(espesor). Si piensa así en el volumen, resolverá sin dificultad cualquier problema de este tipo.

**Ejemplo 3.1** **El método de capas (cilíndricas)**

Hallar el volumen del sólido de revolución generado por la porción del primer cuadrante de la región acotada por las gráficas de $y = x$ e $y = x^2$ al girar en torno al eje $y$.

**Solución** La región (figura 5.30a) tiene $y = x$ como frontera superior e $y = x^2$ como frontera inferior. Se extiende desde $x = 0$ hasta $x = 1$.

La figura 5.30a muestra un rectángulo típico y la capa cilíndrica que genera. El sólido de revolución resultante se puede ver en la figura 5.30b.

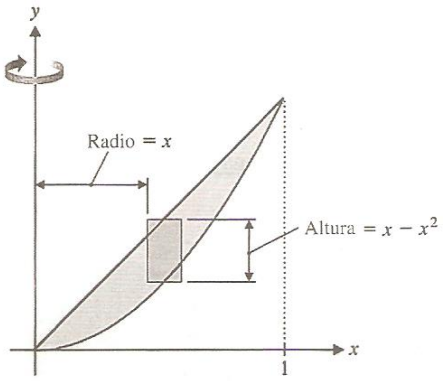



**Figura 5.30a**

Un rectángulo típico y la capa cilíndrica que genera.

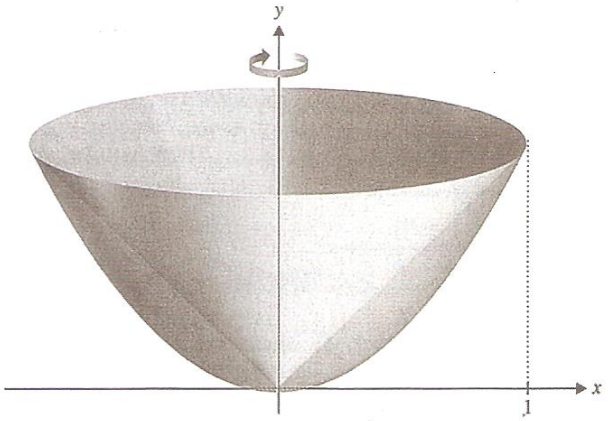



**Figura 5.30b**

Sólido de revolución.

Podemos escribir una integral para el volumen analizando las diversas componentes del sólido en las figuras 5.30a y 5.30b. De (3.1) se deduce que

$$V = \int_0^1 2\pi \underbrace{x}_{\text{radio}} \underbrace{(x - x^2)}_{\text{altura}} \underbrace{dx}_{\text{espesor}}$$

$$= 2\pi \int_0^1 (x^2 - x^3)\, dx = 2\pi \left( \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}.$$

---

Ahora ya podemos aplicar este método para resolver el ejemplo antes citado como motivación.

**Ejemplo 3.2** **Un volumen en el que las capas son preferibles a las arandelas**

Calcular el volumen del sólido generado por la región acotada por las gráficas de $y = 4 - x^2$ y el eje $x$ en torno a la recta $x = 3$.

**Solución** Mire con tranquilidad la figura 5.31a, que muestra un rectángulo que genera una capa cilíndrica, y el sólido de la figura 5.31b. Observará que el radio de la capa cilíndrica es la distancia de la recta $x = 3$ a la capa:

$$r = 3 - x.$$

Eso da para el volumen

$$V = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi \underbrace{(3 - c_i)}_{\text{radio}} \underbrace{(4 - c_i^2)}_{\text{altura}} \underbrace{\Delta x}_{\text{espesor}}$$

$$= \int_{-2}^{2} 2\pi \underbrace{(3 - x)}_{\text{radio}} \underbrace{(4 - x^2)}_{\text{altura}} \underbrace{dx}_{\text{espesor}}$$

$$= 2\pi \int_{-2}^{2} (x^3 - 3x^2 - 4x + 12)\, dx = 64\pi,$$

donde los detalles del cálculo se dejan como ejercicio.

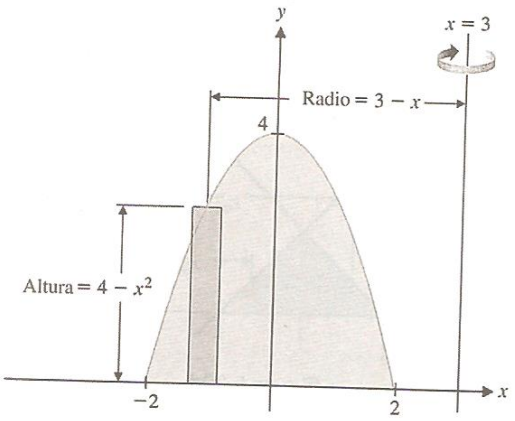



**Figura 5.31a**

Un rectángulo típico y la capa cilíndrica que genera.

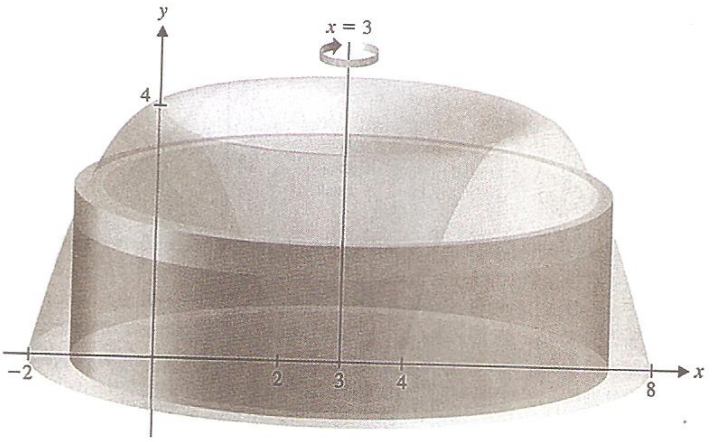



**Figura 5.31b**

Sólido de revolución.

Con el método de capas como complemento al de arandelas, lo primero que hay que hacer en el cálculo de un volumen es analizar la geometría del sólido para decidir si es más fácil integrar en $x$ o en $y$. Para un sólido dado, la variable de integración del método de capas es exactamente la **opuesta** a la del método de arandelas. Debe elegirse el método que mejor se adapte al problema en cuestión.

### Ejemplo 3.3 Cálculo del volumen por los métodos de capas y de arandelas

Sea $R$ la región acotada por las gráficas de $y = x$, $y = 2 - x$ e $y = 0$. Calcular el volumen de los sólidos generados al girar $R$ en torno a las rectas (a) $y = 2$, (b) $y = -1$, (c) $x = 3$.

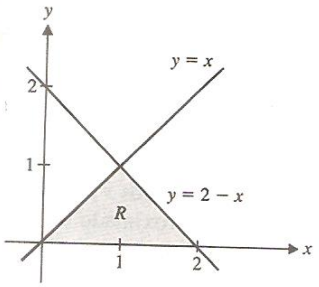



**Figura 5.32a**

$y = x$ e $y = 2 - x$.

**Solución** La región se muestra en la figura 5.32a. Observe con atención las diferencias entre los tres volúmenes.

(a) Al girar en torno a la recta $y = 2$, el radio de una capa cilíndrica es la distancia de la recta $y = 2$ a la capa: $2 - y$, para $0 \le y \le 1$ (figura 5.32b). La altura es la diferencia de los valores $x$ de las dos curvas: despejando $x$ se tiene $x = y$ y $x = 2 - y$. Por (3.1), el volumen viene dado por

$$V = \int_0^1 2\pi \underbrace{(2-y)}_{\text{radio}} \underbrace{[(2-y)-y]}_{\text{altura}} \underbrace{dy}_{\text{espesor}} = \frac{10}{3}\pi,$$

donde *dejamos al cuidado del lector los detalles del cálculo.*

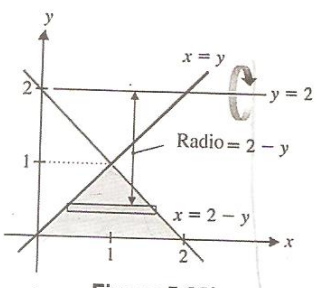



**Figura 5.32b**

Gira en torno a $y = 2$.

(b) Al girar en torno a la recta $y = -1$, la altura de las capas cilíndricas es la misma que en (a), pero el radio $r$ es la distancia de la recta $y = -1$ a la capa: $r = y - (-1) = y + 1$ (figura 5.32c). Eso da para el volumen

$$V = \int_0^1 2\pi \underbrace{[y-(-1)]}_{\text{radio}} \underbrace{[(2-y)-y]}_{\text{altura}} \underbrace{dy}_{\text{espesor}} = \frac{8}{3}\pi.$$

(c) Al girar en torno a la recta $x = 3$ para hallar el volumen mediante capas cilíndricas tenemos que romper el cálculo en varios trozos, ya que la altura de las capas en $[0, 1]$ y en $[1, 2]$ es diferente. (Piense en esto). Por otra parte, con el método de las arandelas el cálculo

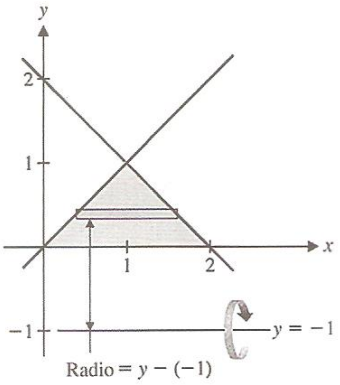



**Figura 5.32c**

Gira en torno a $y = -1$.

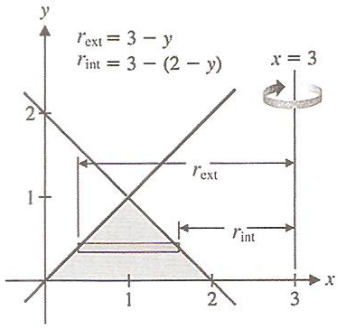



**Figura 5.32d**

Gira en torno a $x = 3$.

es fácil. El radio exterior es la distancia de la recta $x = 3$ a la recta $x = y$ : $r_{ext} = 3 - y$, y el radio interior es la distancia de la recta $x = 3$ a la recta $x = 2 - y$ : $r_{int} = 3 - (2 - y)$ (figura 5.32d). Eso da para el volumen

$$V = \int_0^1 \pi \left\{ \underbrace{(3-y)^2}_{\substack{\text{radio} \\ \text{exterior}^2}} - \underbrace{[3-(2-y)]^2}_{\substack{\text{radio} \\ \text{interior}^2}} \right\} dy = 4\pi.$$

Nótese la importancia de una figura en la que poder visualizar el sólido. El mayor reto en estos problemas es saber cómo plantear la integral. Mire detenidamente la figura y decida cuál es la variable de integración adecuada (es decir, decida si usa arandelas o capas). A continuación, determine los ingredientes de la integral apropiada [el radio o radios y posiblemente la altura] mirando otra vez la figura. Finalmente, calcule la integral. Si no sabe cómo, puede recurrir a un PCS o a una aproximación numérica (la regla de Simpson, por ejemplo).

## Ejemplo 3.4 Aproximación de un volumen por capas y arandelas

Sea $R$ la región acotada por las gráficas de $y = \cos x$ e $y = x^2$. Calcular el volumen de los sólidos generados por $R$ al girar en torno a las rectas (a) $x = 2$, (b) $y = 2$.

**Solución** Para empezar, hacemos un esbozo de $R$ (figura 5.33a). Como las fronteras superior e inferior de $R$ están dadas por curvas de la forma $y = f(x)$, interesa integrar en $x$. A continuación, buscamos los puntos de intersección de las dos curvas, resolviendo $\cos x = x^2$. No sabemos resolver esa ecuación exactamente, así que usamos un método aproximado (el de Newton, pongamos por caso) para encontrar $x = \pm 0{,}824132$.

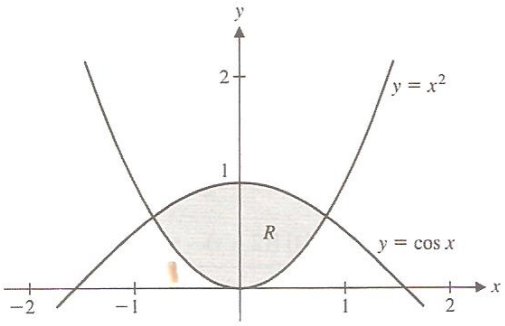



**Figura 5.33a**

$y = \cos x$, $y = x^2$.

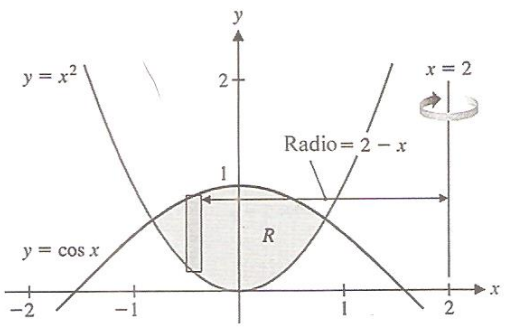



**Figura 5.33b**

Gira en torno a $x = 2$.

(a) Si giramos $R$ en torno a la recta $x = 2$, debemos usar capas cilíndricas (figura 5.33b). En este caso, el radio $r$ de una capa es la distancia de la recta $x = 2$ a la capa: $r = 2 - x$, y la altura de la capa es $\cos x - x^2$. Por tanto,

$$V \approx \int_{-0,824132}^{0,824132} 2\pi \underbrace{(2 - x)}_{\text{radio}} \underbrace{(\cos x - x^2)}_{\text{altura}} dx \approx 13,757,$$

donde hemos aproximado el valor de la integral numéricamente. (De momento no conocemos una primitiva del integrando, pero veremos cómo hallarla en el Capítulo 7).

(b) Si giramos $R$ en torno a la recta $y = 2$ (figura 5.33c), usamos el método de las arandelas. El radio exterior de una arandela es la distancia de la recta $y = 2$ a la curva $y = x^2$ : $r_{\text{ext}} = 2 - x^2$, y el radio interior es la distancia de la recta $y = 2$ a la curva $y = \cos x$ : $r_{\text{int}} = 2 - \cos x$ (figura 5.33c). Así, pues, el volumen viene dado por

$$V \approx \int_{-0,824132}^{0,824132} \pi \left[ \underbrace{(2 - x^2)^2}_{\substack{\text{radio} \\ \text{exterior}^2}} - \underbrace{(2 - \cos x)^2}_{\substack{\text{radio} \\ \text{interior}^2}} \right] dx \approx 10,08,$$

donde hemos aproximado numéricamente el valor de la integral.

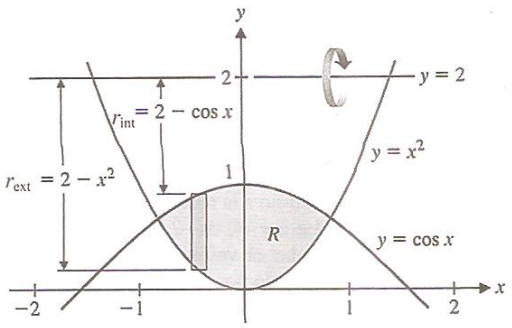



**Figura 5.33c**

Gira en torno a $y = 2$.

Cerramos la sección con un resumen de las estrategias para calcular el volumen de sólidos de revolución.

## VOLUMEN DE UN SÓLIDO DE REVOLUCIÓN

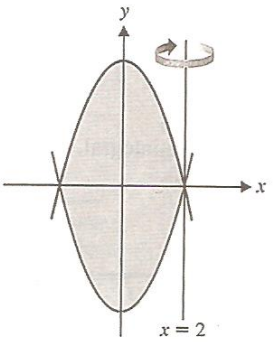
- Dibujar un esbozo de la región que gira.
- Determinar la variable de integración ($x$ si la región tiene partes superior e inferior bien definidas, $y$ si tiene las fronteras izquierda y derecha bien definidas).
- Según el eje de giro y la variable de integración, decidir qué método conviene (el de discos o arandelas para integración en $x$ con eje horizontal o en $y$ con eje vertical, y el de capas para integración en $x$ con eje vertical o en $y$ con eje horizontal).
- Marcar en la figura los radios interiores y exteriores de discos o arandelas, o bien el radio y la altura de las capas cilíndricas.
- Escribir la integral adecuada y evaluarla.

# EJERCICIOS 5.3

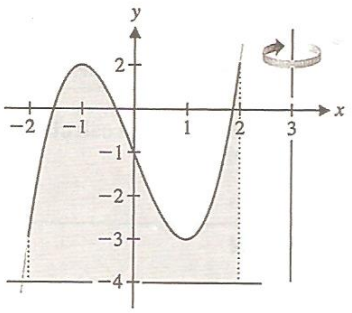
1. Explicar por qué el método de capas produce una integral en $x$ cuando el eje de giro es vertical. (Describir cómo están situadas las capas y en qué dirección hay que desplazarse para pasar de una capa a otra).

2. Explicar por qué el método de capas tiene la misma forma, independientemente de que el sólido tenga una cavidad o no. Es decir, no son necesarios métodos separados como sucede con discos y arandelas.

3. Supongamos que se hace girar, en torno a la recta $x = 2$, la región acotada por $y = x^2 - 4$ e $y = 4 - x^2$. Argumentar qué método (discos, arandelas o capas) sería el más fácil para calcular el volumen del sólido generado.




4. Supongamos que se hace girar, en torno a la recta $x = 3$, la región acotada por $y = x^3 - 3x - 1$ e $y = -4$, en $-2 \le y \le 2$. Explicar qué sería necesario para calcular el volumen por el método de las arandelas y qué para calcularlo por el método de capas. ¿Qué método preferiría? ¿Por qué?




**En los ejercicios 5-12, dibujar un esbozo de la región y una capa cilíndrica. Identificar el radio y la altura de las capas y calcular el volumen.**

5. La región acotada por $y = x^2$ y el eje $x$, $-1 \le x \le 1$, gira en torno a $x = 2$

6. La región acotada por $y = x^2$ y el eje $x$, $-1 \le x \le 1$, gira en torno a $x = 2$

7. La región acotada por $y = x$, $y = -x$ y $x = 1$ gira en torno al eje $y$.

8. La región acotada por $y = x$, $y = -x$ y $x = 1$ gira en torno a $x = 1$.

9. La región acotada por $y = x$, $y = -x$ e $y = 1$ gira en torno a $y = 2$.

10. La región acotada por $y = x$, $y = -x$ e $y = 1$ gira en torno a $y = -2$.

11. La mitad derecha de $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ gira en torno al eje $x$.

12. La mitad derecha de $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ gira en torno a $y = 2$.

**En los ejercicios 13-20, calcular el volumen por el método de las capas.**

13. La región acotada por $y = x^2$ e $y = 2 - x^2$ gira en torno a $x = -2$

14. La región acotada por $y = x^2$ e $y = 2 - x^2$ gira en torno a $x = 2$

15. La región acotada por $x = y^2$ y $x = 1$ gira en torno a $y = -2$

16. La región acotada por $x = y^2$ y $x = 1$ gira en torno a $y = 2$

17. La región acotada por $y = x$ e $y = x^2 - 2$ gira en torno a $x = 2$

18. La región acotada por $y = x$ e $y = x^2 - 2$ gira en torno a $x = 3$

19. La región acotada por $x = (y - 1)^2$ y $x = 1$ gira en torno al eje $x$

20. La región acotada por $x = (y - 1)^2$ y $x = 1$ gira en torno a $y = 2$

**En los ejercicios 21-30, usar el mejor método posible para calcular cada volumen.**

21. La región acotada por $y = 4 - x$, $y = 4$ e $y = x$ gira en torno a

    (a) el eje $x$ (b) el eje $y$ (c) $x = 4$ (d) $y = 4$

22. La región acotada por $y = x + 2$, $y = -x - 2$ y $x = 0$ gira en torno a

    (a) $y = -2$ (b) $x = -2$ (c) el eje $y$ (d) el eje $x$

23. La región acotada por $y = x$ e $y = x^2 - 6$ gira en torno a

    (a) $x = 3$ (b) $y = 3$ (c) $x = -3$ (d) $y = -6$

24. La región acotada por $x = y^2$ y $x = 2 + y$ gira en torno a

    (a) $x = -1$ (b) $y = -1$ (c) $x = -2$ (d) $y = -2$

25. La región acotada por $y = \cos x$ e $y = x^4$ gira en torno a

    (a) $x = 2$ (b) $y = 2$ (c) el eje $x$ (d) el eje $y$

26. La región acotada por $y = \operatorname{sen} x$ e $y = x^2$ gira en torno a

    (a) $y = 1$ (b) $x = 1$ (c) el eje $y$ (d) el eje $x$

27. La región acotada por $y = x^2$, $y = 2 - x$ y $x = 0$ gira en torno a

    (a) el eje $x$ (b) el eje $y$ (c) $x = 1$ (d) $y = 2$

28. La región acotada por $y = 2 - x^2$, $y = x$ $(x > 0)$ y el eje $y$ gira en torno a

(a) el eje $x$ (b) el eje $y$ (c) $x = -1$ (d) $y = -1$

29. La región acotada por $y = 2 - x$, $y = x - 2$ y $x = y^2$ gira en torno a

(a) el eje $x$ (b) el eje $y$

30. La región acotada por $y = e^x - 1$, $y = 2 - x$ y el eje $x$ gira en torno a

(a) el eje $x$ (b) el eje $y$

**En los ejercicios 31-36, la integral representa el volumen de un sólido. Dibujar un esbozo de la región y el eje de revolución.**

31. $\int_0^2 \pi(2x - x^2)^2\,dx$

32. $\int_{-2}^2 \pi[(4 - x^2 + 4)^2 - (x^2 - 4 + 4)^2]\,dx$

33. $\int_0^1 \pi[(\sqrt{y})^2 - y^2]\,dy$

34. $\int_0^2 \pi(4 - y^2)^2\,dy$

35. $\int_0^1 2\pi x(x - x^2)\,dx$

36. $\int_0^2 2\pi(4 - y)(y + y)\,dy$

37. Por un método análogo al utilizado para la ecuación (3.1), deducir el siguiente hecho acerca de un círculo de radio $R$. Área $= \pi R^2 = \int_0^R c(r)\,dr$, donde $c(r) = 2\pi r$ es la longitud de la circunferencia de radio $r$.

38. Tal vez haya observado que la longitud de la circunferencia de radio $r$ $(2\pi r)$ es igual a la derivada respecto de $r$ del área del círculo $(\pi r^2)$. Usando el ejercicio 37, explique por qué eso no es una coincidencia.

39. Un abalorio de joyería se ha formado taladrando un orificio de $\frac{1}{2}$ cm de radio por el centro de una bola de 1 cm de radio. Explicar por qué el volumen viene dado por $\int_{1/2}^1 4\pi x\sqrt{1 - x^2}\,dx$. Calcular esta integral o calcular el volumen por un método más simple.

40. Hallar el radio del orificio en el ejercicio 39 que extrae la mitad del volumen de la bola.

41. Un hormiguero tiene la forma generada por la región acotada por $y = 1 - x^2$ y el eje $x$ al girar en torno al eje $y$. Un investigador quita un cilindro centrado en el vértice. ¿Qué radio debe tener el cilindro para eliminar el 10% del hormiguero?

42. Por el centro de una bola de radio $R$ se taladra un orificio de radio $r$. Calcular el volumen que pierde la bola en términos de $R$ y $r$. Calcular la longitud del orificio en términos de $R$ y $r$. Reescribir el volumen en términos de $L$. ¿Es razonable afirmar que el volumen quitado a la bola depende de $L$, pero no de $R$?

## 5.4 LONGITUD DE ARCO Y ÁREA DE SUPERFICIES

En esta sección aplicamos la integral al estudio de otras dos medidas del tamaño. Longitud y área le serán familiares desde el punto de vista intuitivo. Sin embargo, ya hemos visto que el cálculo del área es sorprendentemente difícil para muchas formas geométricas. Pues bien, los cálculos que acometeremos aquí vienen complicados por la adición de una dimensión más. En concreto, se trata de calcular la longitud (una medida unidimensional) de una curva en dos dimensiones y el área (una medida bidimensional) de una superficie en tres dimensiones. Como siempre, preste atención a la deducción de las fórmulas. Igual que en ocasiones anteriores, partiremos de una aproximación y llegaremos al valor exacto tomando el límite.

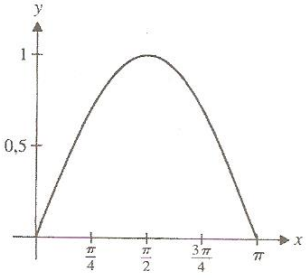



**Figura 5.34a**

$y = \text{sen } x$.

### Longitud de arco

¿Qué queremos decir cuando hablamos de la *longitud* de una porción de la curva seno de la figura 5.34a? (Llamaremos **longitud de arco** a la longitud de una curva). Si la curva es una carretera, podemos recorrerla con un automóvil y mirar la indicación del cuentakilómetros. Si es un trozo de cuerda, podemos ponerla recta y medirla con una regla o con un metro. Estas dos ideas son muy útiles a la intuición. Ambas reducen el problema de medir longitudes en dos dimensiones al problema (mucho más fácil) de medirlas en una dimensión.

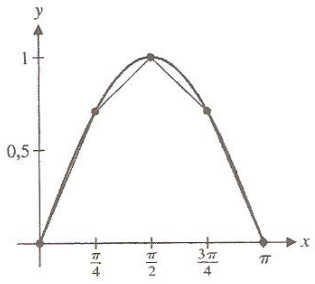



**Figura 5.34b**

Cuatro segmentos rectos aproximantes.

| *n* | Longitud |
|---|---|
| 8 | 3,8125 |
| 16 | 3,8183 |
| 32 | 3,8197 |
| 64 | 3,8201 |
| 128 | 3,8201 |

Para formular esa idea matemáticamente, empezamos aproximando la curva por varios segmentos rectos unidos como indica la figura 5.34b. Los segmentos unen los puntos (0, 0), $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$, $\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $(\pi, 0)$ de la curva $y = \text{sen } x$, Una aproximación de la longitud de la curva viene dada por la suma de las longitudes de esos segmentos:

$$s \approx \sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$+ \sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} \approx 3{,}79.$$

Este valor aproximado es demasiado pequeño (¿por qué?). Podemos mejorar esa aproximación utilizando más segmentos de menor longitud. La tabla del margen muestra estimaciones de la longitud de la curva tomando $n$ segmentos, con valores más grandes de $n$,

Cabe esperar que al usar un número de segmentos cada vez mayor y de longitud cada vez menor, la aproximación se irá acercando al valor exacto de la longitud de la curva. Ya debe sonarle familiar esta idea.

El problema general que vamos a plantearnos es el cálculo de la longitud de arco de la curva $y = f(x)$ en el intervalo $[a, b]$. Suponemos que $f$ es continua en $[a, b]$ y derivable en $(a, b)$. (¿Dónde hemos impuesto estas mismas condiciones antes de ahora?). Como de costumbre, empezamos haciendo una partición del intervalo $[a, b]$ en $n$ subintervalos de igual longitud: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, donde

$$x_i - x_{i-1} = \Delta x = \frac{b - a}{n},$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Entre cada par de puntos consecutivos de la curva, $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ y $(x_i, f(x_i))$, aproximamos la longitud de arco $s_i$ por la distancia recta entre ellos (figura 5.35). Aplicando la fórmula de la distancia entre dos puntos,

$$s_i \approx d\{(x_{i-1}, f(x_{i-1})), (x_i, f(x_i))\} = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2}.$$

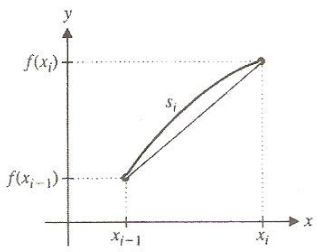



**Figura 5.35**

Aproximación de la longitud de arco por un segmento recto.

Como $f$ es continua en $[a, b]$ y derivable en $(a, b)$, $f$ es también continua en el subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ y derivable en $(x_{i-1}, x_i)$. Por el teorema del valor medio,

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(c_i)(x_i - x_{i-1}),$$

para algún $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$. Esto proporciona la aproximación

$$s_i \approx \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2}$$

$$= \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f'(c_i)(x_i - x_{i-1})]^2}$$

$$= \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\,\underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\Delta x} = \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\,\Delta x.$$

Sumando las longitudes de esos $n$ segmentos rectos, obtenemos como aproximación de la longitud de arco

$$s \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\,\Delta x.$$

Parece lógico que, al ir creciendo $n$, la aproximación debe acercarse al valor exacto de la longitud de arco, es decir,

$$s = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\,\Delta x.$$

**Nota 4.1**

La fórmula para la longitud de arco es simple, pero se puede calcular de forma exacta para muy pocas funciones. Casi siempre hay que recurrir a métodos numéricos (un PCS, por ejemplo).

Reconocemos aquí el límite de una suma de Riemann para $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$, así que la longitud de arco viene dada exactamente por una integral definida:

**Longitud del arco de $y = f(x)$ en el intervalo $[a, b]$**

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx, \tag{4.1}$$

siempre que el límite existe.

### Ejemplo 4.1 Aplicación de la fórmula para la longitud de arco

Calcular la longitud de arco de la curva $y = \text{sen } x$ en $0 \le x \le \pi$. (Hemos obtenido para esta longitud un valor aproximado 3,79 en nuestro ejemplo de introducción).

**Solución** Por (4.1), la longitud de arco es

$$s = \int_0^\pi \sqrt{1 + (\cos x)^2}\, dx.$$

Intente hallar una primitiva de $\sqrt{1 + \cos^2 x}$, pero sin perder mucho tiempo. (Un PCS contesta $\sqrt{2}$ EllipticE$[x, \frac{1}{2}]$, que no es especialmente útil). Un PCS da para esa integral el valor aproximado

$$s = \int_0^\pi \sqrt{1 + (\cos x)^2}\, dx \approx 3{,}8202.$$

Incluso para curvas sencillas, la evaluación de la integral de longitud de arco puede ser un reto nada fácil.

### Ejemplo 4.2 Estimación de una longitud de arco

Calcular la longitud de arco de la curva $y = x^2$ en $0 \le x \le 1$.

**Solución** Por la fórmula (4.1), la longitud de arco es

$$s = \int_0^1 \sqrt{1 + (2x)^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2}\, dx \approx 1{,}4789,$$

donde hemos evaluado la integral numéricamente otra vez. (En esta ocasión puede hallar una primitiva con ayuda de las tablas o de un PCS, pero la aproximación es igual de significativa a nuestros efectos).

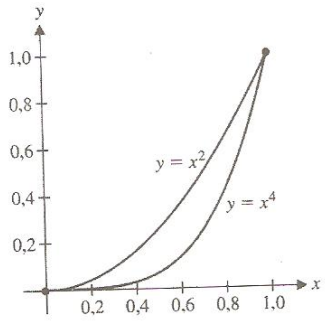



**Figura 5.36**
$y = x^2$ e $y = x^4$.

Las gráficas de $y = x^2$ e $y = x^4$ se parecen de un modo sorprendente en [0, 1] (figura 5.36). Ambas unen los puntos (0, 0) y (1, 1), son crecientes y cóncavas hacia arriba. Si las dibujamos en unos mismos ejes, vemos que $y = x^4$ empieza siendo más plana y termina más pendiente a partir de $x = 0{,}7$. (¡**Demuestre** que esto es verdad!). La longitud de arco distingue entre esas dos gráficas.

### Ejemplo 4.3 Comparación de longitudes de arco de funciones potencia

Comparar la longitud de arco de las curvas $y = x^4$ e $y = x^2$ en el intervalo [0, 1].

**Solución** Según (4.1), la longitud de arco de $y = x^4$ viene dada por

$$\int_0^1 \sqrt{1 + (4x^3)^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 16x^6}\, dx \approx 1{,}6002.$$

Es un 8% mayor que la de $y = x^2$, ya calculada en el ejemplo 4.2.

En los ejercicios se le pedirá que explore las longitudes de $y = x^6$, $y = x^8$ y otras potencias en el intervalo [0, 1]. ¿Puede adivinar qué ocurre con la longitud de arco de $y = x^n$ en [0, 1] cuando $n \to \infty$?

Al igual que con tantas otras, el uso cotidiano de la palabra *longitud* puede inducir a confusión. Así, cuando decimos que la longitud de un lanzamiento de disco fue de 20 metros nos referimos a la distancia horizontal alcanzada, no a la longitud de arco de la curva descrita por la bola. En ese caso, la distancia horizontal tiene más sentido y, de paso, es más fácil de medir. En otros muchos casos, la cantidad de interés es la longitud de arco. Por ejemplo, si alguien va a colgar una pancarta de dos postes que distan 10 metros y sólo dispone de 10 metros de cuerda, tendrá problemas. La longitud de cuerda necesaria la da la longitud de arco, no la distancia horizontal.

### Ejemplo 4.4 Longitud de un cable colgante

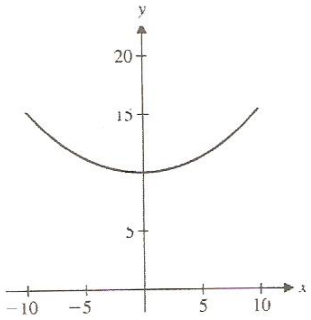



**Figura 5.37**
$y = 5(e^{x/10} + e^{-x/10})$.

Un cable cuelga de dos postes de igual altura distantes 20 metros. Se puede demostrar que un cable suspendido adopta la forma de una **catenaria**. Supongamos que en este caso la forma viene dada por $y = 5(e^{x/10} + e^{-x/10})$, $-10 \le x \le 10$ (figura 5.37). ¿Cuál es la longitud del cable?

**Solución** Por (4.1), la longitud del cable viene dada por

$$s = \int_{-10}^{10} \sqrt{1 + \left(\frac{e^{x/10}}{2} - \frac{e^{-x/10}}{2}\right)^2}\, dx$$

$$= \int_{-10}^{10} \sqrt{1 + \frac{1}{4}(e^{x/5} - 2 + e^{-x/5})}\, dx$$

$$\approx 23{,}504 \text{ metros},$$

que supera a la distancia horizontal de 20 metros en $3\frac{1}{2}$ metros.

## Área de superficies

En las secciones 5.2 y 5.3 aprendimos a calcular el volumen de un sólido de revolución. Muchas veces interesa calcular además el área de su *superficie*. Por ejemplo, al hacer girar el segmento $0 \le x \le 1$ de la recta $y = x + 1$ en torno al eje $x$, la superficie generada recuerda una porción de megáfono abierta por los dos lados (figura 5.38).

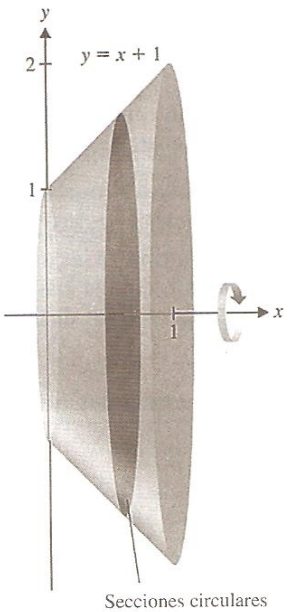



**Figura 5.38**
Superficie de revolución.

Es un tronco de cono resultado de cortar un cono por un plano paralelo a su base. Vamos a hallar el área de su superficie curvada. La figura 5.39a muestra un cono circular recto con radio $r$ en la base y de **altura oblicua** $l$. (Como veremos, en este contexto es más conveniente especificar la altura oblicua que la altura). Si cortamos el cono y lo aplanamos, obtenemos un sector circular (figura 5.39b). El área de la superficie curvada del cono es

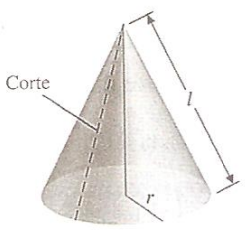



**Figura 5.39a**
Cono circular recto

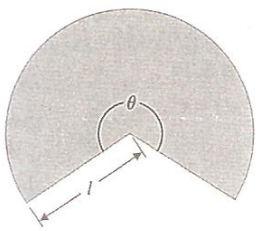



**Figura 5.39b**
Cono aplanado.

igual al área $A$ de ese sector circular. Y ésta es el área del círculo de radio $l$ multiplicada por la fracción de círculo incluida: $\theta$ radianes de los $2\pi$ del círculo completo, es decir,

$$A = \pi \text{ (radio)}^2 \frac{\theta}{2\pi} = \pi l^2 \frac{\theta}{2\pi} = \frac{\theta}{2} l^2. \tag{4.2}$$

El único problema es que no conocemos $\theta$. Pero tal como hemos construido el sector (aplanando el cono), la circunferencia del sector es la de la base del cono. Por tanto,

$$2\pi r = 2\pi l \frac{\theta}{2\pi} = l\,\theta.$$

Dividiendo entre $l$, se obtiene

$$\theta = \frac{2\pi r}{l}.$$

Según (4.2), el área de la superficie curvada del cono es

$$A = \frac{\theta}{2} l^2 = \frac{\pi r}{l} l^2 = \pi r l.$$

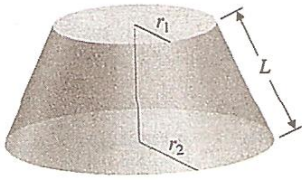



**Figura 5.40**
Tronco de cono.

En realidad, nos interesaba el área curvada de un tronco de cono (figura 5.38). Para el **tronco de cono** de la figura 5.40, el área de la superficie curvada viene dada por

$$A = \pi(r_1 + r_2)L.$$

Puede verificar esta fórmula restando el área de dos conos usando triángulos semejantes para hallar la altura del cono mayor, del cual se corta el tronco de cono. Dejamos los detalles como ejercicio.

Volviendo al problema original de hacer girar, en el intervalo [0, 1], la recta $y = x + 1$ en torno al eje $x$ (figura 5.38), se tiene $r_1 = 1$, $r_2 = 2$ y $L = \sqrt{2}$ (por el teorema de Pitágoras). El área de la superficie curvada es, pues,

$$A = \pi(1 + 2)\sqrt{2} = 3\pi\sqrt{2} \approx 13{,}329.$$

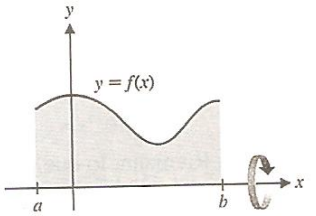



**Figura 5.41a**
Gira en torno al eje $x$.

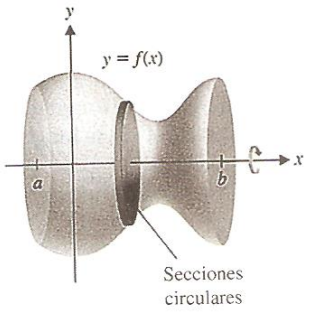



**Figura 5.41b**
Superficie de revolución.

Como problema general de cálculo del área de una superficie de revolución, consideremos una función $f(x) \geq 0$ continua en $[a, b]$ y derivable en $(a, b)$. Si hacemos girar el intervalo $[a, b]$ de su gráfica en torno al eje $x$ (figura 5.41a), generamos una superficie de revolución (figura 5.41b).

Como hemos hecho ya otras veces, partimos $[a, b]$ en $n$ subintervalos de igual longitud mediante los puntos $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, con $x_i - x_{i-1} = \Delta x = \dfrac{b-a}{n}$, para $i = 1, 2, \ldots, n$. En cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, aproximamos la curva por el segmento recto que une los puntos $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ y $(x_i, f(x_i))$, como en la figura 5.42.

Al girar en torno al eje $x$, ese segmento genera un tronco de cono. El área de la superficie de este tronco de cono nos dará un valor aproximado del área de la superficie de revolución en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. En primer lugar, observemos que la altura oblicua de ese tronco de cono es

$$L_i = d\{(x_{i-1}, f(x_{i-1})), (x_i, f(x_i))\} = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2}$$

por la fórmula usual de la distancia. Debido a nuestra hipótesis sobre $f$, podemos aplicar el teorema del valor medio, luego

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(c_i)(x_i - x_{i-1})$$

para algún número $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$. Así, se obtiene

$$L_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2} = \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\,\underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\Delta x}.$$

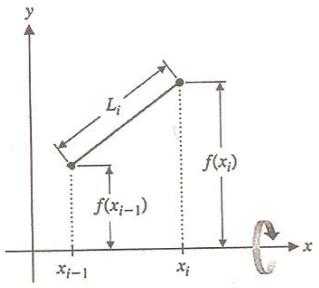



**Figura 5.42**
Gira en torno al eje $x$.

El área $S_i$ de la superficie de revolución en el subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ es aproximadamente el área del tronco de cono,

$$S_i \approx \pi[f(x_i) + f(x_{i-1})]\sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\,\Delta x$$

$$\approx 2\pi f(c_i)\sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\,\Delta x,$$

porque si $\Delta x$ es muy pequeño,

$$f(x_i) + f(x_{i-1}) \approx 2f(c_i).$$

Repitiendo ese argumento para cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, obtenemos como aproximación del área total $S$ de la superficie de revolución:

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} 2\pi f(c_i)\sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\,\Delta x.$$

Como ya hemos hecho notar varias veces, cuando $n$ crece esa aproximación mejora y tiende al valor exacto del área buscado. Tomando el límite para $n \to \infty$, resulta

$$S = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi f(c_i)\sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\,\Delta x.$$

En este límite reconocemos ya sin dificultad el límite de una suma de Riemann, lo que produce la integral

**Área de la superficie de un sólido de revolución**

$$\boxed{S = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx,} \tag{4.3}$$

siempre que esta integral existe.

Conviene advertir que el factor $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$ del integrando en (4.3) es la longitud de arco de una pequeña porción de la curva $y = f(x)$, mientras que el factor $2\pi f(x)$ es la longitud de la circunferencia del sólido de revolución. Lo cual es fácil de interpretar como sigue. Para cualquier pequeña porción de la curva, si aproximamos el área de la superficie que genera por el área de un tronco de cono,

$$S = 2\pi f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx,$$

ya que el radio, casi constante, del segmento es $f(x)$ y la altura oblicua del tronco de cono es $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$. Es mucho mejor pensar así en la fórmula del área de una superficie de revolución que memorizarla sin más.

**Nota 4.2**

Son muy pocas las funciones para las que la integral en (4.3) se puede calcular exactamente. No se preocupe; para eso están los métodos numéricos.

**Ejemplo 4.5** **Aplicación de la fórmula del área de una superficie**

Calcular el área de la superficie de revolución generada por $y = x^4$, en $0 \le x \le 1$, al girar en torno al eje $x$.

**Solución** Usando la fórmula (4.3), se tiene

$$S = \int_0^1 2\pi x^4\sqrt{1 + (4x^3)^2}\,dx = \int_0^1 2\pi x^4\sqrt{1 + 16x^6}\,dx \approx 3{,}4365,$$

donde, como de costumbre, hemos aproximado el valor de la integral mediante un método numérico.

# EJERCICIOS 5.4

1. Explicar, en palabras, cómo se deduce la integral para la longitud de arco de las longitudes de segmentos de rectas secantes.

2. Explicar por qué la suma de las longitudes de los segmentos rectos de la figura 5.34b es menor que la longitud de arco de la figura 5.34a.

3. Discutir si la integral que expresa la longitud de arco debe ser considerada una fórmula o una definición (es decir, ¿puede definir la longitud de una curva sin hacer uso de esa integral?).

4. Suponga que dibuja en un papel el trapecio acotado por $y = x + 1$, $y = -x - 1$, $x = 0$ y $x = 1$, lo recorta y lo curva. Explicar por qué no se obtendría la figura 5.38. (Ayuda: Compare las áreas y observe con atención las figuras 5.39a y 5.39b).

**En los ejercicios 5-8, aproximar la longitud de arco de la curva usando rectas secantes con $n = 2$ y $n = 4$.**

5. $y = x^2, 0 \le x \le 1$
6. $y = x^4, 0 \le x \le 1$
7. $y = \cos x, 0 \le x \le \pi$
8. $y = \ln x, 1 \le x \le 3$

**En los ejercicios 9-18, escribir la integral de la longitud de arco y aproximar su valor por un método numérico.**

9. $y = x^3, -1 \le x \le 1$
10. $y = x^3, -2 \le x \le 2$
11. $y = 2x - x^2, 0 \le x \le 2$
12. $y = \tan x, 0 \le x \le \pi/4$
13. $y = x^3 + x, 0 \le x \le 3$
14. $y = x^{1/3}, 1 \le x \le 2$
15. $y = \cos x, 0 \le x \le \pi$
16. $y = \ln x, 1 \le x \le 3$
17. $y = \int_0^x u \operatorname{sen} u \, du, 0 \le x \le \pi$
18. $y = \int_0^x e^{-u} \operatorname{sen} u \, du, 0 \le x \le \pi$
19. Se cuelga una cuerda entre dos estacas que distan 20 pies. Si la cuerda adopta la forma de la catenaria $y = 4(e^{x/10} + e^{-x/10})$, $-10 \le x \le 10$, calcular la longitud de la cuerda.
20. Se cuelga una cuerda entre dos estacas que distan 60 pies. Si la cuerda adopta la forma de la catenaria $y = 4(e^{x/30} + e^{-x/30})$, $-30 \le x \le 30$, calcular la longitud de la cuerda.
21. En el ejemplo 4.4, calcular el pandeo del cable, es decir, la diferencia de valores y en el centro ($x = 0$) y en los extremos ($x = 10$). A la vista del resultado, ¿es sorprendente la longitud hallada?
22. Calcular el pandeo en los ejercicios 19 y 20.
23. Un balón de rugby sigue la trayectoria $y = \frac{1}{15} x (60 - x)$ yardas. Esbozar su gráfica. ¿Cuánto ha recorrido horizontalmente? Calcular la longitud de arco de la trayectoria. Si el balón ha estado 4 segundos en el aire, ¿cuál ha sido su velocidad media?
24. Una pelota de béisbol sigue la trayectoria $y = \frac{1}{300} x (100 - x)$ yardas. Esbozar su gráfica. ¿Cuánto ha recorrido horizontalmente? Calcular la longitud de arco. Explicar por qué el jugador desearía una longitud de arco pequeña, mientras que el del ejercicio 23 la preferiría grande.
25. En el ejemplo 4.4 probar que la longitud de arco es exactamente $10(e - e^{-1})$.
26. Evaluar la integral del ejemplo 4.4 con un PCS. Comparar la respuesta con la del ejercicio 25 y con la forma equivalente 20 senh(1), donde $\operatorname{senh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.
27. La **integral elíptica de segunda clase** se define como $\text{EllipticE}(\phi, m) = \int_0^\phi \sqrt{1 - m \operatorname{sen}^2 u} \, du$. Con respecto al ejemplo 4.1, muchos PCS dan $\sqrt{2}\,\text{EllipticE}\left(x, \frac{1}{2}\right)$ como primitiva de $\sqrt{1 + \cos^2 x}$. Verificar que lo es.
28. Muchos PCS dan
$$\int \sqrt{1 + 16x^6}\, dx = \frac{1}{4} x \sqrt{1 + 16x^6} + \int \frac{3/4}{\sqrt{1 + 16x^6}}\, dx.$$
Verificar que es una primitiva del integrando.
29. Hallar, con un PCS, una primitiva para el ejemplo 4.2. Evaluarla en los extremos del intervalo y comparar la diferencia entre sus valores con el valor que el PCS da por integración numérica. Intente lo mismo para el ejemplo 4.3.
30. Explique brevemente qué significa la respuesta $\int f(x)\, dx$ de un PCS cuando se le pide hallar $\int f(x)\, dx$.

**En los ejercicios 31-38, escribir la integral que expresa el área de la superficie de revolución y aproximar su valor por algún método numérico.**

31. $y = x^2, 0 \le x \le 1$, gira en torno al eje $x$
32. $y = \operatorname{sen} x, 0 \le x \le \pi$, gira en torno al eje $x$
33. $y = 2x - x^2, 0 \le x \le 2$, gira en torno al eje $x$
34. $y = x^3 - 4x, -2 \le x \le 0$, gira en torno al eje $x$
35. $y = e^x, 0 \le x \le 1$, gira en torno al eje $x$
36. $y = \ln x, 1 \le x \le 2$, gira en torno al eje $x$
37. $y = \cos x, 0 \le x \le \pi/2$, gira en torno al eje $x$
38. $y = \sqrt{x}, 1 \le x \le 2$, gira en torno al eje $x$

**La longitud de arco puede dar información sobre si una curva es casi recta. En los ejercicios 39-44, calcular la longitud de arco $L_1$ de la curva y la longitud $L_2$ de la recta secante que une los puntos inicial y final de la curva. Evaluar el cociente $L_2/L_1$; cuanto más cerca esté de 1 ese número, más recta es la curva.**

39. $y = \operatorname{sen} x, -\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{6}$
40. $y = \cos x, -\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{6}$

41. $y = \operatorname{sen} x, \frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{2}$

42. $y = \cos x, \frac{\pi}{3} \le x \le \frac{2\pi}{3}$

43. $y = e^x, 3 \le x \le 5$

44. $y = e^x, -5 \le x \le -3$

45. Calcular la longitud de arco de $y = x^6$, $y = x^8$ e $y = x^{10}$ en $0 \le x \le 1$. A la vista de los ejemplos 4.2 y 4.3, identificar la pauta de la longitud de $y = x^n$, $0 \le x \le 1$, al crecer $n$. Conjeturar el límite cuando $n \to \infty$.

46. Para entender mejor el resultado del ejercicio 45, calcular $\lim_{n \to \infty} x^n$ para cada $x$ tal que $0 \le x < 1$. Calcular la longitud de esa curva límite. Si se conecta esa curva con el punto final (1, 1), ¿cuál es la longitud total?

47. Probar que $y = x^4$ es más plana que $y = x^2$ para $0 < x < \sqrt{1/2}$ y más pendiente para $x > \sqrt{1/2}$.

48. Comparar cómo son de planas o de pendientes $y = x^6$ e $y = x^4$.

49. Calcular el área de la superficie generada por el cuadrado $-1 \le x \le 1$ y $-1 \le y \le 1$ al girar en torno al eje $y$.

50. Hallar el área de la superficie generada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ al girar en torno al eje $y$.

51. Calcular el área de la superficie generada por el triángulo de vértices (–1, –1), (0, 1) y (1, –1) al girar en torno al eje $y$.

52. Dibujar, en unos mismos ejes, el cuadrado, el círculo y el triángulo de los ejercicios 49-51. Probar que las áreas relativas de los sólidos de evolución que generan (cilindro, esfera, cono) está en razón $3:2:\tau$, donde $\tau$ es la **razón áurea**, definida como $\tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

53. Esbozar la gráfica y calcular la longitud de la **astroide** $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$.

54. En los ejercicios 45 y 46 hemos investigado la longitud de $y = x^n$ en [0, 1]. Ahora consideraremos polinomios más generales en ese mismo intervalo. En primer lugar, estime cuál puede ser la longitud máxima de la gráfica de un polinomio en [0, 1]. Ahora calcule la longitud para varias parábolas. Explique por qué $f_c(x) = cx(1 - x)$ es una parábola abierta hacia abajo con $x$-intersecciones en 0 y 1 y vértice en $x = 1/2$. ¿Qué ocurre con la longitud cuando $c$ se hace muy grande? Imagine que nos restringimos a polinomios cuyos valores están entre –1 y 1.
Compruebe que en [0, 1] las funciones
$$g_2(x) = 4x(1 - x),\ g_3(x) = 20x(1/2 - x)(1 - x)$$
y
$$g_4(x) = 80x(1/3 - x)(2/3 - x)(1 - x)$$
tienen todas esta propiedad. Compare las longitudes de arco de $g_2(x)$, $g_3(x)$ y $g_4(x)$. ¿Cuál será el límite de esas longitudes? Defina una función $g_5(x)$ que continúe esa pauta.

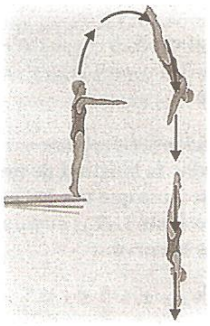
55. En este ejercicio va a enfrentarse a una famosa paradoja relativa a la **trompeta de Gabriel**. Se hace girar, en torno al eje $x$, la curva $y = 1/x$, para $1 \le x \le R$, con $R > 0$ un valor constante grande. Calcule el área y el volumen encerrado por esa superficie de revolución. (En ambos casos se pueden hallar las primitivas, aunque tal vez necesite un PCS para hallar el área). Determine el límite del área y del volumen para $R \to \infty$. Ahora vamos con la paradoja. Según sus resultados, tenemos un sólido de volumen finito y área infinita. Así, pues, ese sólido tridimensional se podría llenar completamente con una cantidad finita de pintura, pero para pintar su superficie haría falta una cantidad infinita.

## 5.5 MOVIMIENTO DE PROYECTILES

En varias secciones hemos discutido aspectos del movimiento de un móvil rectilíneo. Si conocemos la posición en función del tiempo, la derivada de la función posición es la velocidad y la derivada de la velocidad es la aceleración. Más interesante es el problema inverso: dada la aceleración, hallar la posición y la velocidad de un objeto. Matemáticamente, esto significa reconstruir una función cuya derivada se conoce. Con la integración a nuestra disposición, es fácil conseguir ese objetivo. En esta sección consideraremos el caso de un móvil que se desplaza por una *curva* en dos dimensiones en lugar del movimiento rectilíneo, más simple, considerado antes.

La conocida **segunda ley del movimiento de Newton** establece que

$$F = ma,$$



donde $F$ es la suma de las fuerzas que actúan sobre el objeto de masa $m$ y $a$ es la aceleración. Así, pues, si conocemos las fuerzas actuantes, podemos determinar la aceleración. Y lo que es más importante: una vez que sabemos algo de Cálculo, podemos hallar la velocidad y la posición a partir de su aceleración.

Imaginemos un saltador que se lanza desde un trampolín (véase figura). Durante el salto actúa sobre él la fuerza de la gravedad, es decir, su peso $W = mg$, donde $g$ denota la aceleración de la gravedad. (Suelen tomarse como valores aproximados de $g$, al nivel del mar, 32 pies/s$^2$ y 9,8 m/s$^2$). Con el fin de simplificar el problema, despreciaremos otras fuerzas, como la resistencia del aire.

Sea $h(t)$ la altura del saltador sobre el agua $t$ segundos después de saltar. La fuerza de la gravedad es $F = -mg$, donde el signo menos indica que la fuerza actúa hacia abajo, en la dirección negativa de la altura. Sabemos que la aceleración es $a(t) = h''(t)$. Por la segunda ley de Newton, $-mg = mh''(t)$, o sea,

$$h''(t) = -g.$$

Nótese que la deducción de esta ecuación está basada en el hecho de que la única fuerza actuante es la gravedad. La función posición de *cualquier* objeto (sea cual sea su masa) sujeto sólo a la acción de la gravedad satisface esa misma ecuación. Las únicas diferencias entre unas situaciones y otras son las condiciones iniciales (la posición inicial y la velocidad inicial) y las cuestiones planteadas.

### Ejemplo 5.1 Velocidad de un saltador en el momento de la inmersión

Un nadador salta desde un trampolín situado a 15 pies de altura sobre el nivel del agua con una velocidad inicial de 8 pies/s (hacia arriba). ¿Cuál es su velocidad al entrar en el agua?

**Solución** Sea $h(t)$ la altura, en pies, sobre el nivel del agua. La ley de Newton afirma que $h''(t) = -32$ (ya que la altura se da en pies). Además, tenemos como condiciones iniciales $h(0) = 15$ (altura desde la que inicia el salto) y $h'(0) = 8$. Como vamos a ver, hallar $h(t)$ se reduce a una simple integración. Se tiene

$$\int h''(t)\,dt = \int -32\,dt$$

y, por tanto,

$$h'(t) = -32t + c.$$

Por el dato de la velocidad inicial,

$$8 = h'(0) = -32(0) + c = c,$$

así que la velocidad en cualquier instante $t$ viene dada por

$$h'(t) = -32t + 8.$$

Para hallar la velocidad de inmersión necesitamos saber el instante en que impacta en el agua. Eso ocurre cuando $h(t) = 0$ (cuando la altura del nadador respecto del agua es 0), de modo que hay que efectuar otra integración para calcular la función altura. Integrando la función velocidad, obtenemos

$$\int h'(t)\,dt = \int (-32t + 8)\,dt,$$

de manera que

$$h(t) = -16t^2 + 8t + c.$$

Por el dato de la altura inicial,

$$15 = h(0) = -16(0)^2 + 8(0) + c = c,$$

así que

$$h(t) = -16t^2 + 8t + 15.$$

Eso nos da la altura en el instante $t$. La inmersión ocurre cuando

$$\begin{aligned} 0 = h(t) &= -16t^2 + 8t + 15 \\ &= -(4t + 3)(4t - 5), \end{aligned}$$

o sea, en el instante $t = \frac{5}{4}$. (Desechamos la solución $t = -\frac{3}{4}$. ¿Por qué?). Cuando $t = \frac{5}{4}$, la velocidad es $h'\left(\frac{5}{4}\right) = -32\left(\frac{5}{4}\right) + 8 = -32$ pies/s. Para pasar a millas por hora, multiplicamos por 3.600/5.280, lo que da unas 22 mph. (¡No conviene caer en mala posición a esa velocidad!).

En el ejemplo 5.1, el signo negativo de la velocidad indica que el saltador está cayendo. En muchas situaciones son importantes el movimiento hacia arriba y el movimiento hacia abajo.

### Ejemplo 5.2 Una ecuación para el movimiento vertical de una pelota

Se lanza desde el suelo hacia arriba una pelota con velocidad inicial de 64 pies/s. Despreciando la resistencia del aire, hallar una ecuación para su altura en cualquier instente $t$. Calcular la altura máxima y el tiempo que la pelota tarda en caer.

**Solución** Con la gravedad como única fuerza, la altura $h(t)$ satisface la ecuación $h''(t) = -32$. Las condiciones iniciales son $h'(0) = 64$ y $h(0) = 0$. Así, pues,

$$\int h''(t)\, dt = \int -32\, dt$$

y, por tanto,

$$h'(t) = -32t + c.$$

De la velocidad inicial se sigue que

$$64 = h'(0) = -32(0) + c = c,$$

luego

$$h'(t) = 64 - 32t.$$

Integrando otra vez, obtenemos

$$\int h'(t)\, dt = \int (64 - 32t)\, dt,$$

es decir,

$$h(t) = 64t - 16t^2 + c.$$

Ahora, de la altura inicial se deduce que

$$0 = h(0) = 64(0) - 16(0)^2 + c = c,$$

así que

$$h(t) = 64t - 16t^2.$$

Como la función altura es cuadrática, su máximo se produce cuando $h'(t) = 0$. [Piense en la Física de la situación: ¿qué sucede cuando $h'(t) = 0$?]. La solución de $64 - 32t = 0$ es $t = 2$ (el instante de máxima altura) y la altura máxima es $h(2) = 64(2) - 16(2)^2 = 64$ pies. La pelota toca el suelo cuando $h(t) = 0$. Las soluciones de

$$0 = h(t) = 64t - 16t^2 = 16t(4 - t)$$

son $t = 0$ (momento del lanzamiento) y $t = 4$ (momento en que llega al suelo). Así, pues, tarda en caer 4 segundos.

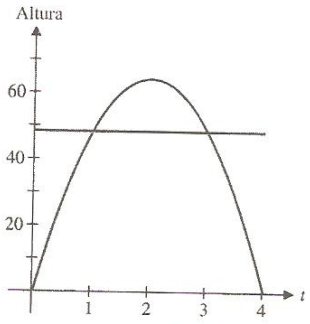



**Figura 5.43**

Altura de la pelota en el instante $t$.

Dibujando la función altura del ejemplo 5.2 junto con la recta $y = 48$ (figura 5.43) podemos observar una propiedad interesante del movimiento de proyectiles. Las dos gráficas se cortan en $t = 1$ y en $t = 3$. El intervalo $[1, 3]$ es la mitad del tiempo total que la pelota está en el aire. Eso significa que la pelota está la mitad del tiempo por encima de los tres cuartos de su máxima altura. Es increíble ver cómo algunos deportistas saltan y parece que «se detienen en el aire». Como el cálculo anterior sugiere, cualquier objeto «se detiene en el aire».

### Ejemplo 5.3 Velocidad inicial requerida para alcanzar una cierta altura

Se ha estimado que la estrella de la NBA Michael Jordan saltaba verticalmente 4,5 pies. Despreciando la resistencia del aire, ¿cuál era la velocidad inicial de su salto?

**Solución** Una vez más, la ley de Newton da la ecuación $h''(t) = -32$ para la altura $h(t)$. La velocidad inicial es $h'(0) = v_0$ y la altura inicial $h(0) = 0$. Queremos calcular el valor $v_0$ que da una altura máxima de 54 pulgadas. Como antes, integramos para obtener

$$h'(t) = -32t + c.$$

Usando la velocidad inicial, vemos que

$$v_0 = h'(0) = -32(0) + c = c.$$

Así, pues, la función velocidad es

$$h'(t) = v_0 - 32t.$$

Integrando de nuevo y usando la posición inicial $h(0) = 0$, concluimos que

$$h(t) = v_0 t - 16t^2$$

La altura máxima se alcanza cuando $h'(t) = 0$ (¿por qué?). Haciendo

$$0 = h'(t) = v_0 - 32t,$$

obtenemos $t = \dfrac{v_0}{32}$. En ese instante la altura (la altura máxima) es

$$h\left(\frac{v_0}{32}\right) = v_0\left(\frac{v_0}{32}\right) - 16\left(\frac{v_0}{32}\right)^2 = \frac{v_0^2}{32} - \frac{v_0^2}{64} = \frac{v_0^2}{64}.$$

Un salto de 4,5 pies requiere $\dfrac{v_0^2}{64} = 4{,}5$, o sea, $v_0^2 = 288$, así que $v_0 = \sqrt{288} \approx 17$ pies/s. Es decir, unas 11,6 mph.

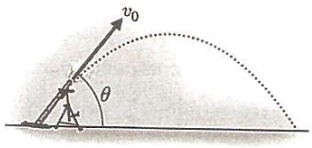



**Figura 5.44a**

Trayectoria de un proyectil.

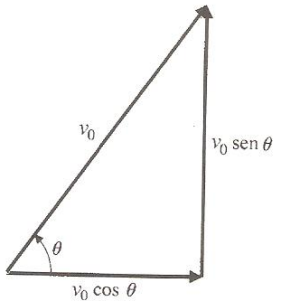



**Figura 5.44b**

Componentes vertical y horizontal de la velocidad.

Hasta ahora sólo hemos considerado movimientos verticales de proyectiles. En la mayoría de las aplicaciones hay que tener en cuenta también el movimiento horizontal. Si ignoramos la resistencia del aire, los cálculos son fáciles. El principio básico es aplicar la ley de Newton por separado a las componentes horizontal y vertical del movimiento. Si $y(t)$ representa la posición vertical, tenemos $y''(t) = -g$ como antes. Si despreciamos la resistencia del aire, no hay fuerzas actuando horizontalmente sobre el proyectil. Por tanto, si $x(t)$ es la posición horizontal, la ley de Newton da $x''(t) = 0$.

Las condiciones iniciales son más complicadas en este caso. En general, el proyectil será lanzado con una velocidad inicial $v_0$ y con un ángulo de elevación $\theta$. La figura 5.44 ilustra el caso $\theta > 0$. Si $\theta < 0$, la velocidad inicial apuntaría hacia abajo.

Como se aprecia en la figura 5.44a, podemos descomponer por trigonometría la velocidad inicial en componentes vertical y horizontal. La componente horizontal es $v_x = v_0 \cos\theta$ y la vertical $v_y = v_0 \operatorname{sen}\theta$.

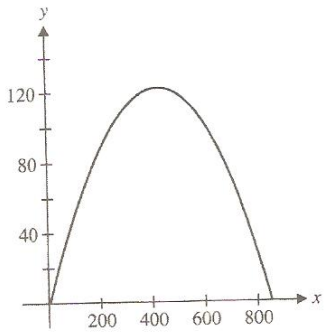



**Figura 5.45**

Trayectoria de un proyectil.

### Ejemplo 5.4 Movimiento de un proyectil en dos dimensiones

Se lanza un proyectil con velocidad inicial $v_0 = 98$ m/s y con un ángulo de elevación $\theta = \pi/6$. Calcular el tiempo de vuelo y el alcance (horizontal) del proyectil. (Despreciar la resistencia del aire).

**Solución** Para la componente vertical es $y''(t) = -9{,}8$ (ya que la velocidad se mide en m/s). En la figura 5.44b vemos que la componente vertical de la velocidad inicial es $y'(0) = 98 \operatorname{sen} \pi/6 = 49$ y la altura inicial $y(0) = 0$. Un par de integraciones simples dan $y'(t) = -9{,}8t + 49$ para la función velocidad $y(t) = -4{,}9t^2 + 49t$ para la función posición. El proyectil golpea en el suelo cuando $y(t) = 0$ (altura 0 sobre el suelo). Las soluciones de

$$0 = y(t) = -4{,}9t^2 + 49t + 49t\,(1 - 0{,}1t)$$

son $t = 0$ (lanzamiento) y $t = 10$ (caída al suelo). El tiempo de vuelo es, por tanto, 10 segundos. La componente horizontal obedece la ecuación $x''(t) = 0$ con velocidad inicial $x'(0) = 98 \cos \pi/6 = 49\sqrt{3}$ y posición inicial $x(0) = 0$. Integrando, se obtiene $x'(t) = 49\sqrt{3}$ y $x(t) = (49\sqrt{3})t$. La figura 5.45 muestra la trayectoria del proyectil. [Puede reproducirla con un PCS en modo paramétrico introduciendo $x(t)$, $y(t)$ en $0 \le t \le 10$. O bien despeje $t$ en términos de $x$ y sustituya $t$ por $\frac{1}{49\sqrt{3}}\,x$ para ver que la curva es una parábola].

La posición en la que el proyectil golpea en el suelo es el valor de $x(t)$ para $t = 10$ (momento del aterrizaje), de modo que el alcance resulta ser

$$x(10) = (49\sqrt{3})\,(10) = 49\sqrt{3} \approx 849 \text{ metros.}$$

### Nota 5.1

Le rogamos encarecidamente que no reduzca esta sección a la memorización de unas cuantas fórmulas. Es cierto que si se desprecia la resistencia del aire, la componente vertical de la posición será siempre $y(t) = -\frac{1}{2}\,gt^2 + (v_0 \operatorname{sen} \theta)t + y(0)$. (Continuaremos con esto en los ejercicios). Sin embargo, la comprensión del proceso y la probabilidad de dar con la respuesta correcta aumentarán de forma notable si aborda cada problema empezando con la ley de Newton y procediendo por integración (cosa nada difícil).

### Ejemplo 5.5 El movimiento de la pelota en un servicio de tenis

Un tenista golpea la pelota a una altura de 8 pies y le imprime una velocidad inicial de 120 mph con un ángulo de 5° por debajo de la horizontal. El saque «entra» si la pelota salva una red de 3 pies de altura situada a 39 pies y golpea en el suelo delante de la línea de fondo, situada a 60 pies (figura 5.46). Averiguar si ese servicio entra o no.

**Solución** Como en el ejemplo 5.4, empezamos por el movimiento vertical. Como la distancia se mide en pies, la ecuación del movimiento es $y''(t) = -32$. La velocidad inicial, convertida en pies/s, es 120 mph $= 120\,\frac{5.280}{3.600}$ pies/$s$ $= 176$ pies/s. Por tanto, la componente vertical de la velocidad inicial es $y'(0) = 176 \operatorname{sen}(-5°) \approx -15{,}34$ pies/s. Integrando, obtenemos

$$y'(t) = -32t - 15{,}34.$$

La altura inicial es $y(0) = 8$ pies, así que otra integración da

$$y(t) = -16t^2 - 15{,}34t + 8 \text{ pies.}$$

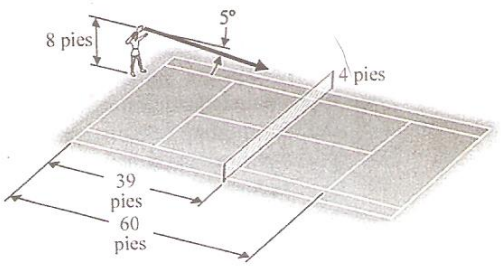



**Figura 5.46**

Altura en un servicio de tenis.

La componente horizontal del movimiento viene determinada por $x''(t) = 0$ con velocidad inicial $x'(0) = 176\cos(-5°) \approx 175{,}33$ pies/s y posición inicial $x(0) = 0$. Por integración, obtenemos $x'(t) = 175{,}33$ pies/s y $x(t) = 175{,}33$ pies. En resumen,

$$x(t) = 175{,}33t,$$
$$y(t) = -16t^2 - 15{,}34t + 8.$$

Para que la pelota salve la red, ha de ser $y \geq 3$ para $x = 39$. Como $x(t) = 39$ cuando $175{,}33t = 39$, o sea, $t \approx 0{,}2224$, y en ese momento es $y(0{,}2224) \approx 3{,}8$, la pelota salva la red. El segundo requisito es que $x \leq 60$ cuando la pelota toca el suelo ($y = 0$). Se tiene $y(t) = 0$ cuando $-16t^2 - 15{,}34t + 8 = 0$. La fórmula cuadrática da $t \approx -1{,}33$ y $t \approx 0{,}3749$. Ignorando la solución negativa, calculamos $x(0{,}3749) \approx 65{,}7$, de modo que el servicio cae más allá de la línea de fondo. No entra.

Una buena razón para comenzar cada problema con la ley de Newton es que eso obliga a determinar qué fuerzas deben ser tenidas en cuenta (y cuáles no). Por ejemplo, hasta ahora hemos despreciado la resistencia del aire, lo cual es una simplificación de la realidad. Algunos cálculos usando ecuaciones simplificadas son razonablemente precisos. Otros, como el del próximo ejemplo, no.

### Ejemplo 5.6 Una situación en la que la resistencia del aire no puede ignorarse

Una gota de lluvia cae desde una nube a 3.000 pies de altura sobre el suelo. Despreciando la resistencia del aire, ¿a qué velocidad llegará la gota al suelo?

**Solución** Sea $y(t)$ la altura de la gota en el instante $t$. La segunda ley de Newton nos dice que $y''(t) = -32$. La velocidad inicial es $y'(0) = 0$ (la gota cae, no es lanzada hacia abajo) y la altura inicial es $y(0) = 3.000$. Integrando y usando esas condiciones iniciales, se obtiene $y'(t) = -32t$, $y(t) = 3.000 - 16t^2$. La gota de lluvia toca el suelo cuando $y(t) = 0$. De

$$0 = y(t) = 3.000 - 16t^2$$

se sigue que $t = \sqrt{3.000/16} \approx 13{,}693$ segundos. La velocidad en ese instante es

$$y'(\sqrt{3.000/16} = -32\sqrt{3.000/16} \approx -438{,}18 \text{ pies/s}.$$

Esto es, ¡unas 300 mph! Afortunadamente, la resistencia del aire juega un papel esencial en la caída de las gotas de lluvia, que llegan al suelo con una velocidad en torno a 10 mph.

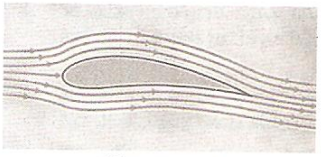


**Figura 5.47**
Sección de un ala.

Costuras en una pelota de béisbol reglamentaria.

La resistencia del aire que frena las gotas de lluvia es sólo una de las formas en que el aire afecta al movimiento de un objeto. La **fuerza de Magnus**, producida por el giro o por las asimetrías de un objeto, puede hacer que el objeto cambie de dirección y siga una trayectoria curvada. El ejemplo más común de fuerza de Magnus la sufren los aviones. Una cara del ala de un avión es curvada y la otra casi plana (figura 5.47). Esa falta de simetría hace que el aire se mueva por encima del ala más rápidamente que por debajo, lo que produce una fuerza de Magnus hacia arriba que sostiene al avión en el aire.

Otro ejemplo de fuerza de Magnus se produce sobre la pelota de béisbol en un lanzamiento inusual llamado *knuckleball* («pelota de nudillos»). En él, el lanzador atrapa la pelota con los cinco dedos e intenta lanzarla con el menor giro posible (a pesar del nombre, no se usan los nudillos). Los jugadores de béisbol dicen que la *knuckleball* «baila» de forma impredecible y es muy difícil de batear o de atrapar. No hay acuerdo en por qué la *knuckleball* se mueve tanto, pero vamos a presentar un modelo teórico debido a los físicos Robert Watts y Terry Bahill.

La pelota tiene costuras que sobresalen de su superficie y juegan un papel similar al de las alas de un avión, creando una fuerza de Magnus que afecta a la pelota. La dirección de la fuerza de Magnus depende de la orientación de las costuras. Las medidas efectuadas por

Watts y Bahill indican que la fuerza lateral (de izquierda a derecha para el lanzador) es aproximadamente $F_m = -0{,}1 \operatorname{sen}(4\theta)$ libras, donde $\theta$ es el ángulo en radianes que ha girado la pelota respecto de una posición inicial.

Como la gravedad no afecta al movimiento lateral, éste sólo se ve afectado por la fuerza de Magnus. La segunda ley de Newton da para él $mx''(t) = -0{,}1 \operatorname{sen}(4\theta)$. La masa de una pelota de béisbol es de 0,01 slugs (medida de *masa* que al multiplicarla por $g = 32$ da el *peso* en libras). Por tanto,

$$x''(t) = -10 \operatorname{sen}(4\theta).$$

Si la pelota gira a $\omega$ rad/s, se tiene $4\theta = 4\omega t + \theta_0$, donde el ángulo inicial $\theta_0$ depende de en qué posición agarra la pelota el lanzador. Nuestro modelo es, por consiguiente,

$$x''(t) = -10 \operatorname{sen}(4\omega t + \theta_0), \tag{5.1}$$

con las condiciones iniciales $x'(0) = 0$ y $x(0) = 0$. Para una velocidad típica de una *knuckleball* de 60 mph, el lanzamiento tarda 0,68 segundos en alcanzar la base.

### Ejemplo 5.7 Una ecuación para el movimiento de una *knuckleball*

Para un giro de $w = 2$ rad/s y $\theta_0 = 0$, hallar una ecuación del movimiento de una *knuckleball* y representar su gráfica en $0 \le t \le 0{,}68$. Repetirlo para $\theta_0 = \pi/2$.

**Solución** Con $\theta_0 = 0$, la ley de Newton da $x''(t) = -10 \operatorname{sen} 8t$, por (5.1). Integrando esta ecuación y usando la condición inicial $x'(0) = 0$, se tiene

$$x'(t) = -\frac{10}{8}\left[-\cos 8t - (-\cos 0)\right] = 1{,}25\,(\cos 8t - 1).$$

Integrando otra vez y usando la segunda condición inicial, $x(0) = 0$, obtenemos

$$x(t) = 1{,}25\left(\frac{1}{8}\right)(\operatorname{sen} 8t - 0) - 1{,}25t = 0{,}15625 \operatorname{sen} 8t - 1{,}25t.$$

Una gráfica de esta función muestra el movimiento lateral de la pelota (figura 5.48a) visto desde arriba. Vemos que, tras salir recta, ¡se aparta casi un pie del centro de la base!

En el caso $\theta_0 = \pi/2$, (5.1) da

$$x''(t) = -10 \operatorname{sen}\left(8t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Integrando y usando la primera condición inicial, se obtiene

$$x'(t) = -\frac{10}{8}\left\{-\cos\left(8t + \frac{\pi}{2}\right) - \left[-\cos\left(0 + \frac{\pi}{2}\right)\right]\right\} = 1{,}25 \cos\left(8t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Una segunda integración da, finalmente,

$$x(t) = 1{,}25\left(\frac{1}{8}\right)\left[\operatorname{sen}\left(8t + \frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = 0{,}15625\left[\operatorname{sen}\left(8t + \frac{\pi}{2}\right) - 1\right].$$

La gráfica del movimiento lateral en este caso puede verse en la figura 5.48b. Este lanzamiento ¡se aleja casi 4 pulgadas a la derecha y después vuelve a la base! Como vemos, la *knuckleball* es muy sensible al giro y a la posición inicial. De ahí que sea tan difícil golpearla.

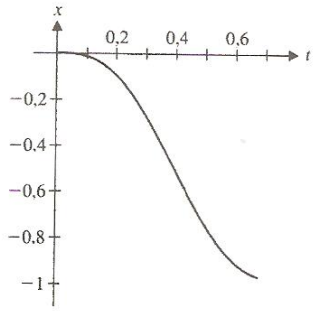



**Figura 5.48a**

Movimiento lateral de una «knuckleball» para $\theta_0 = 0$.

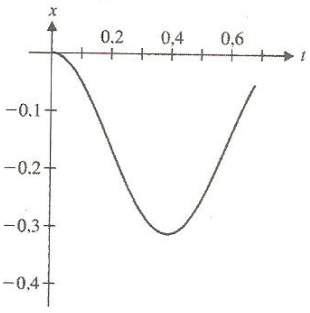



**Figura 5.48b**

Movimiento lateral de una «knuckleball» para $\theta_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

# EJERCICIOS 5.5

1. En el ejemplo 5.6 la hipótesis de que la resistencia del aire puede ignorarse es evidentemente inaceptable. Discutir la validez de esa hipótesis en los ejemplos 5.1 y 5.3.

2. En la discusión que sigue al ejemplo 5.3 probamos que Michael Jordan (y cualquier otro ser humano) se mantiene la mitad del tiempo en el cuarto más alto de un salto. Comparar las velocidades en distintos instantes del salto para explicar por qué se está más tiempo arriba que abajo.

3. En el ejemplo 5.4 deducimos ecuaciones separadas para las componentes horizontal y vertical de la posición. Para descubrir una consecuencia de esa separación, consideremos dos personas, una junto a otra, con los brazos extendidos a la misma altura. Una de ellas dispara una bala con su pistola horizontalmente. Al mismo tiempo, la otra deja caer una bala. Explicar por qué las balas tocarán el suelo en el mismo instante.

4. Un modelo más preciso para la gota de lluvia del ejemplo 5.6 es $y''(t) = -32 + f(t)$, donde $f(t)$ representa la fuerza de resistencia del aire (dividida entre la masa). Si $v(t)$ es la velocidad hacia abajo de la gota, explicar por qué esa ecuación es equivalente a $v'(t) = 32 - f(t)$. Explicar en términos físicos por qué cuanto mayor es $v(t)$, mayor es $f(t)$. Así, pues, un modelo tal como $f(t) = v(t)$ o $f(t)\ [v(t)]^2$ sería razonable. (En la mayor parte de las situaciones, $[v(t)]^2$ suele ajustar mejor los datos experimentales).

**En los ejercicios 5-8, identificar las condiciones iniciales $y(0)$ e $y'(0)$.**

5. Se deja caer un objeto desde 80 pies de altura.

6. Se deja caer un objeto desde 100 pies de altura.

7. Se lanza un objeto, desde una altura de 60 pies, con una velocidad de 10 pies/s hacia arriba.

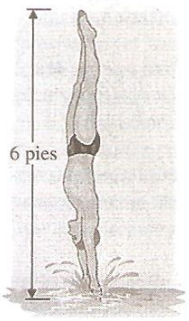
8. Se lanza un objeto, desde una altura de 20 pies, con una velocidad de 4 pies/s hacia abajo.

**En los ejercicios 9-57, despreciar la resistencia del aire.**

9. Un saltador se deja caer desde 30 pies sobre el nivel del agua (la altura aproximada de un trampolín olímpico). ¿Con qué velocidad entra en el agua?

10. Un saltador se deja caer desde 120 pies sobre el nivel del agua (la altura aproximada del salto desde los acantilados de Acapulco). ¿Con qué velocidad entra en el agua?

11. Para el saltador del ejemplo 5.1, supongamos que la velocidad de impacto de sus manos es –32 pies/s (véase figura). Si mide 6 pies desde las manos hasta los pies, los pies siguen cayendo 6 pies después del impacto de sus manos. Hallar la velocidad de impacto de un objeto que cae una altura de 6 pies con una velocidad inicial de –32 pies/s.




12. Dar una razón al menos de por qué la velocidad de impacto del ejercicio 11 no sería la velocidad de impacto real de los pies del saltador.

13. Comparar las velocidades de impacto de objetos que caen desde 30 pies (ejercicio 9), 120 pies (ejercicio 10) y 3.000 pies (ejemplo 5.3). Si la altura aumenta en un factor $h$, ¿por qué factor queda multiplicada la velocidad de impacto?

14. El monumento a Washington tiene 555 pies y $5\frac{1}{8}$ pulgadas de altura. En un experimento famoso, se dejó caer una pelota de béisbol desde lo alto para ver si un jugador podía atraparla. ¿A qué velocidad llegó abajo la pelota?

15. Un coyote, no muy astuto, descubre atónito que acaba de caer desde el borde de un precipicio. Cuatro segundos más tarde, impacta en el suelo, rodeado de una nube de polvo. ¿Qué altura tiene el precipicio?

16. Una roca, desprendida por el coyote del ejercicio 15, cae 3 segundos antes de golpearle en la cabeza. ¿Desde qué altura ha caído la roca? ¿A qué velocidad golpea la cabeza del pobre coyote?

17. La próxima viñeta de nuestro coyote le muestra lanzándose al aire mediante una catapulta. Si le propulsa verticalmente hacia arriba, desde el suelo, con velocidad inicial de 64 pies/s, hallar una ecuación para la altura del coyote en todo instante $t$. Calcular la máxima altura que alcanza, el tiempo que está en el aire y su velocidad cuando vuelve a caer sobre la catapulta.

18. De rebote, el coyote del ejercicio 17 es lanzado a 256 pies de altura. ¿Cuál es la velocidad inicial requerida para ello?

19. Uno de los autores tiene un salto vertical de 20 pulgadas. ¿Cuál es la velocidad inicial en su salto? ¿Cómo se compara con la de Michael Jordan (ejemplo 5.3)?

20. Si el autor entrena con intensidad y aumenta su velocidad de salto inicial en un 10%, ¿en qué porcentaje crece su salto vertical?

21. Una pulga salta con una velocidad inicial vertical de unos 5 pies/s. ¿Qué altura alcanza?

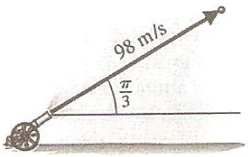
22. Calcular el cociente entre el salto vertical de la pulga del ejercicio 21 y su altura ($\frac{1}{12}$ pulgadas aproximadamente). Si el autor del ejercicio 19, de 6 pies de altura, pudiera lograr ese mismo cociente, ¿qué altura alcanzaría?

23. Probar que un objeto que se deja caer desde $H$ pies de altura llega al suelo en $T = \frac{1}{4}\sqrt{H}$ segundos con velocidad de impacto $V = -8\sqrt{H}$ pies/s.

24. Probar que un objeto impulsado desde el suelo hacia arriba con velocidad inicial de $v_0$ pies/s alcanza una altura máxima de $v_0^2/64$ pies.

**En los ejercicios 25-42, dibujar un esbozo de las gráficas paramétricas como en el ejemplo 5.4 para indicar la trayectoria de vuelo.**

25. Se lanza un objeto con ángulo de elevación $\theta = \pi/3$ radianes y velocidad inicial de 98 m/s. Calcular el tiempo de vuelo y el alcance horizontal.




26. Comparar los ángulos de elevación, las velocidades iniciales y los alcances de los objetos del ejercicio 25 y del ejemplo 5.4.

27. Hallar el tiempo de vuelo y el alcance horizontal de un objeto lanzado con un ángulo de elevación de 30° y velocidad inicial de 120 pies/s.

28. Hallar el tiempo de vuelo y el alcance horizontal de un objeto lanzado con un ángulo de elevación de 60° y una velocidad inicial de 120 pies/s. Comparar el alcance con los de los ejercicios 27 y 28.

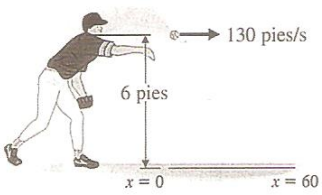
29. Repetir el ejemplo 5.5 con un ángulo de 6°.

30. Hallar, por prueba y error, el menor y el mayor de los ángulos con los que el servicio del ejemplo 5.5 entra.

31. Repetir el ejemplo 5.5 con velocidad inicial de 170 pies/s.

32. Hallar, por prueba y error, la menor y la mayor de las velocidades iniciales con las que el servicio del ejemplo 5.5 entra.

33. Un jugador lanza la pelota de béisbol como indica la figura. Hallar la altura de la pelota cuando alcanza la base, distante 60 pies. (Ayuda: Deducir el tiempo de vuelo de la ecuación en $x$ y usar después la ecuación en $y$ para determinar la altura).




34. Repetir el ejercicio 33 para una velocidad inicial de 80 pies/s. (Ayuda: Interpretar con cuidado la solución negativa).

35. Un jugador de béisbol lanza una pelota hacia la primera base, distante 120 pies, desde una altura de 5 pies con velocidad inicial de 120 pies/s y ángulo de elevación de 5°. Hallar la altura de la pelota cuando alcanza la primera base.

36. Repetir el ejercicio 35 con un ángulo de elevación de 10°.

37. Por prueba y error, hallar el ángulo requerido en los ejercicios 35 y 36 para que la pelota llegue a la primera base a una altura de 5 pies. Con ese ángulo, ¿a qué altura sobre la cabeza del jugador de la primera base debe apuntar el lanzador?

38. En el ejercicio 35, si la bola se lanza horizontalmente, ¿a qué distancia de la primera base bota en el suelo?

39. Un especialista temerario planea saltar sobre 25 automóviles, todos de 5 pies de anchura, por una rampa de 30°. Calcular la velocidad inicial requerida para lograr su arriesgada hazaña.

40. Repetir el ejercicio 39 con un ángulo de 45°. A pesar de la menor velocidad necesaria, ¿por qué preferiría el especialista la rampa de 30° a la de 45°?

41. Un avión a 256 pies de altura quiere arrojar víveres sobre un cierto punto del suelo. Si su velocidad es de 100 pies/s, ¿a qué distancia horizontal del blanco debe soltar su carga? (Ayuda: Usar la ecuación en $y$ para hallar el tiempo de caída y, a continuación, la ecuación en $x$ para calcular el alcance horizontal).

42. Repetir el ejercicio 42 para una altura de 144 pies.

43. Consideremos una *knuckleball* (ejemplo 5.7) cuyo movimiento lateral satisface el problema de valores iniciales $x''(t) = -25 \operatorname{sen}(4\omega t + \theta_0)$, $x'(0) = x(0) = 0$. Con $\theta_0 = 0$ y $\omega = 1$, hallar una ecuación para $x(t)$ y representar la solución en $0 \le t \le 0{,}68$.

44. Repetir el ejercicio 43 con $\theta_0 = \pi/2$ y $\omega = 1$.

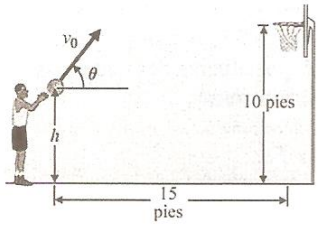
45. Repetir el ejercicio 43 con $\theta_0 = \pi/4$ y $\omega = 2$.

46. Repetir el ejercicio 43 con $\theta_0 = \pi/4$ y $\omega = 1$.

47. Para el saltador del ejercicio 9, ¿cuál sería la velocidad angular media (en rad/s) necesaria para completar $2\frac{1}{2}$ saltos mortales?

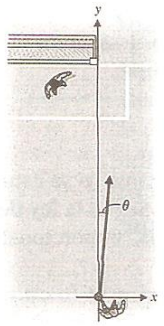
48. En el número del hombre bala del circo Zucchini, un hombre es lanzado desde una altura de 10 pies, con un ángulo de 45°, a una velocidad de 160 pies/s. Si la red de seguridad está 5 pies sobre el nivel del suelo, ¿a qué distancia del cañón debe estar colocada? Si esa red sólo soporta una velocidad de impacto de 160 pies/s, el hombre bala ¿saldrá indemne o se aplastará contra el suelo?

49. En un tiro libre, el balón de baloncesto se lanza desde 15 pies de distancia y desde una altura de $h$ pies a una canasta situada a 10 pies de altura (véase figura). Si $h = 6$, $\theta = 52°$ y $v_0 = 25$ pies/s, probar que el tiro libre entra en la canasta. Como la canasta es mayor que el balón, hay un margen de error de varias pulgadas. Si todo lanzamiento que pasa por una altura de 10 pies con $14{,}65 \le x \le 15{,}35$ es bueno, probar que, para la velocidad $v_0$ dada, el margen de error es $48° \le \theta \le 57°$. Dibujar gráficas paramétricas de varios de esos lanzamientos.




50. Para un lanzamiento libre (ejercicio 49) con $h = 6$ y $\theta = 52°$, hallar el rango de velocidades $v_0$ para las que el tiro es encestado. Supuesto que lanzar un tiro libre con velocidad $v_0$ requiere una fuerza de $F = 0{,}01\ v_0^2$ libras, ¿cuál es el margen de error en la fuerza?

51. Roberto Carlos, jugador de Brasil y del Real Madrid, es famoso por sus disparos curvados. Supongamos que lanza una falta distante 90 pies del poste izquierdo de la portería. Orientando los ejes como en la figura, supongamos que dispara con velocidad inicial de 100 pies/s y un ángulo de 5° respecto del eje $y$. Supongamos además que la única fuerza actuante sobre el balón es la fuerza de Magnus, hacia la izquierda, causada por el giro del balón. Con $x''(t) = -20$ e $y''(t) = 0$, determinar si el lanzamiento es gol en $y = 90$ y $-24 \le x \le 0$.




52. ¿A qué distancia a la derecha del poste hubiera salido el lanzamiento del ejercicio 51 sin el giro?

53. Para acostumbrar a los astronautas a la ingravidez, la NASA les hace viajar en un avión especial, el *Vomit Comet*, cuya aceleración vertical $y''(t)$ se consigue igualar a la de la gravedad, es decir, $y''(t) = -g$. Probar que, para una velocidad horizontal constante, el avión sigue una trayectoria de vuelo parabólica. El avión de la NASA sigue trayectorias parabólicas de unos 2.500 pies de altura (2.500 hacia arriba y 2.500 hacia abajo). Calcular el tiempo que tarda en completar esa trayectoria, que es el tiempo en que los astronautas experimentan la ingravidez.

54. En un golpe de golf típico, la pelota es lanzada con una velocidad inicial de 220 pies/s y un ángulo de 9,3°. En ausencia de resistencia del aire, ¿qué distancia horizontal alcanzará el golpe? El alcance real de ese golpe es de unos 720 pies. En este caso, un giro hacia atrás de 4.000 rpm confiere a la pelota una gran fuerza de Magnus vertical hacia arriba que cancela buena parte de la resistencia del aire y de la gravedad.

55. En los Juegos Olímpicos de Barcelona de 1992, un arquero disparó una flecha sobre el pebetero, situado a 30 metros de altura y a 70 metros de distancia horizontal. Si la flecha alcanzó en el momento de pasar sobre el pebetero su máxima altura, calcular la velocidad inicial y el ángulo de salida de la flecha. (Ayuda: Probar que $y'(t) = 0$ si $t = (v_0 \text{ sen } \theta)/9{,}8$. Para ese $t$, demostrar que $\dfrac{x(t)}{y(t)} = 2 \cot \theta = \dfrac{7}{3}$ y despejar $\theta$. A continuación, despejar $v_0$).

56. Los malabaristas profesionales afirman que el máximo número de bolas manejable es 10. Para hacernos una idea de por qué, supongamos que se tarda $\frac{1}{2}$ segundo en atrapar y relanzar una bola al aire (en otras palabras, el malabarista puede manejar 2 bolas por segundo). Si ha de trabajar con 10 bolas, cada una de ellas debe estar en el aire 5 segundos. ¿A qué altura hay que lanzarlas para conseguirlo? A la vista de esa altura, ¿le parece mucho tiempo ese $\frac{1}{2}$ segundo? ¿A qué altura habría que lanzar las bolas par poder manejar 11 en lugar de 10?

## 5.6 TRABAJO, MOMENTOS Y FUERZA HIDROSTÁTICA

En esta sección exploramos algunas aplicaciones físicas de la integral. En cada caso definimos un concepto básico para ayudar a resolver un problema específico. A continuación, usamos la integral para generalizar el concepto y resolver una gama mucho más amplia de problemas. Estas aplicaciones son un buen ejemplo de cómo las Matemáticas ayudan a encontrar soluciones de problemas prácticos.

Imagine que se encuentra en un trineo, en la parte baja de una colina cubierta de nieve. Para lograr un buen descenso queremos empujar el trineo lo más arriba posible. Un físico diría que a mayor altura, mayor **energía potencial**. Al ir deslizando cuesta abajo, la energía potencial se va transformando en **energía cinética**. (¡Ésta es la parte divertida!). Pero llevar el trineo hasta arriba requiere un trabajo: hay que empujar con fuerza a lo largo de una distancia considerable.

Los físicos han estudiado cómo están relacionadas magnitudes como fuerza y velocidad. Aunque está claro que aumentando la fuerza en la dirección del movimiento haremos crecer la velocidad, hay mucho más que eso. Los físicos simplifican el proceso identificando unas pocas magnitudes clave para describirlo. En esta sección discutiremos tres de ellas: trabajo, impulso y momentos.

Empezaremos cuantificando el trabajo. Si empujamos el trineo cuesta arriba estamos efectuando trabajo. Pero ¿cómo se puede medir el trabajo? Ciertamente, si empujamos un peso doble (hacemos el doble de fuerza) estaremos haciendo doble cantidad de trabajo. Parece razonable que el trabajo sea directamente proporcional a la fuerza ejercida. Análogamen-

te, si lo empujamos una distancia doble, haremos el doble de trabajo, así que el trabajo es también directamente proporcional a la distancia sobre la que se ejerce la fuerza.

En vista de esas observaciones, para cualquier fuerza constante $F$ aplicada a lo largo de una distancia $d$, definimos el **trabajo** $W$ realizado como

$$W = Fd.$$

Por desgracia, las fuerzas no suelen ser constantes. En un cohete que va consumiendo el combustible en vuelo, la masa no es constante, así que tampoco lo es la fuerza ejercida por la gravedad.

Podemos extender la noción de trabajo al caso de una fuerza no constante $f(x)$, aplicada a lo largo del intervalo $[a, b]$, como sigue. Dividimos $[a, b]$ en $n$ subintervalos iguales, cada uno de anchura $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$, y consideramos el trabajo efectuado en cada subintervalo. Si $\Delta x$ es pequeño, la fuerza $f(x)$ aplicada en el subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ puede aproximarse por la fuerza constante $f(c_i)$ para algún punto $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$. El trabajo realizado al mover el objeto a lo largo de ese subintervalo es aproximadamente $F(c_i)\,\Delta x$. El trabajo total $W$ se puede aproximar por

$$W \approx \sum_{i=1}^{n} F(c_i)\,\Delta x.$$

Reconocemos aquí una suma de Riemann y cuando $n$ crece las sumas de Riemann tienden hacia el valor del trabajo realizado. Tomando el límite $n \to \infty$ se obtiene

**Trabajo**

$$W = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} F(c_i)\,\Delta x = \int_a^b F(x)\,dx. \tag{6.1}$$

Adoptamos (6.1) como definición del trabajo.

Habrá experimentado que cuanto más se comprime (o se estira) un muelle de su posición natural de equilibrio, más fuerza hay que hacer. Según la **ley de Hooke**, la fuerza requerida para mantener un muelle en una cierta posición es proporcional a la distancia comprimida (o estirada).

Esto es, si $x$ denota la distancia que se ha comprimido (o estirado) el muelle a partir de su posición natural, la fuerza $F(x)$ ejercida por el muelle viene dada por

$$F(x) = kx \tag{6.2}$$

para una cierta constante $k$ (la **constante del muelle**).

### Ejemplo 6.1 Trabajo realizado al estirar un muelle

Mantener un muelle separado $\frac{1}{4}$ pies de su posición natural exige una fuerza de 3 libras (figura 5.49). Calcular el trabajo realizado al estirarlo 6 pie a partir de su posición natural.

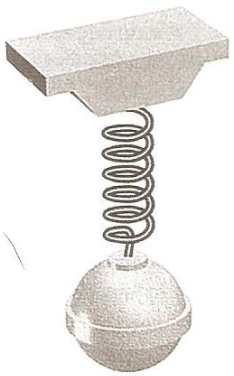


**Figura 5.49**
Muelle estirado.

**Solución** Por la ley de Hooke,

$$3 = F\left(\frac{1}{4}\right) = k\left(\frac{1}{4}\right),$$

así que $k = 12$ y $F(x) = 12x$. Por (6.1), el trabajo realizado al estirar el muelle (1/2 pie) es

$$W = \int_0^{1/2} F(x)\,dx = \int_0^{1/2} 12x\,dx = \frac{3}{2} \text{ libras-pies.}$$

En este caso, nótese que el estiramiento transfiere energía potencial al muelle (si después se suelta el muelle, volverá hacia su posición de equilibrio convirtiendo la energía potencial en energía cinética).

### Ejemplo 6.2 Trabajo realizado por un levantador de pesas

Un atleta levanta unas pesas de 200 libras a una altura de 3 pies. (a) ¿Cuánto trabajo ha hecho? (b) Calcular, asimismo, el trabajo realizado por el levantador si sube el peso desde el suelo hasta 4 pies y lo vuelve a colocar en el suelo.

**Solución** (a) Como aquí la fuerza (el peso) es constante, simplemente se tiene

$$W = Fd = 200 \times 3 = 600 \text{ libras-pies.}$$

(b) Puede parecer extraño, pero puesto que las pesas vuelven a la posición inicial, la distancia neta que han sido desplazadas es cero y el trabajo total realizado es cero. Por supuesto, al levantador le parece haber hecho un gran «trabajo», pero es aquí donde la noción matemática de trabajo difiere del significado usual de esa palabra. Tal como lo hemos definido, el trabajo da cuenta del cambio en la energía del objeto. Como las pesas tienen la misma energía cinética y la misma energía potencial que al comienzo, el trabajo total es cero.

En el próximo ejemplo, tanto la fuerza como la distancia son variables. Eso plantea algunos retos. Necesitaremos aproximar el trabajo y reconocer a continuación la integral definida que este proceso de aproximación genera.

### Ejemplo 6.3 Trabajo requerido para bombear agua de un depósito

Un depósito esférico de 10 pies de diámetro está lleno de agua. Calcular el trabajo requerido para bombear el agua por un orificio situado en el punto más alto del depósito.

**Solución** La fórmula simple $W = Fd$ no es aplicable aquí por varias razones. La más obvia es que la distancia que debe ascender el agua de cada parte del depósito no es constante (el agua del fondo debe subir toda la altura del depósito, pero no así la que está cerca del orificio). Para visualizar la situación, partimos el agua en $n$ capas, cada una de profundidad $\Delta x = \frac{20}{n}$. Sea $x$ la distancia vertical medida desde el fondo del depósito (figura 5.50a). El depósito completo corresponde al intervalo $0 \le x \le 20$, que partimos con

$$0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 20,$$

donde $x_i - x_{i-1} = \Delta x$, para $i = 1, 2, \ldots, n$. Eso divide el depósito en $n$ capas, cada una correspondiendo a un subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ (figura 5.50b). El agua de la capa $[x_{i-1}, x_i]$, que se puede aproximar por un cilindro de altura $\Delta x$, debe subir una distancia $20 - c_i$ aproximadamente, donde $c_i$ es algún punto $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$. (Puede pensar que $c_i$ es el punto medio del subintervalo, ya que la elección de $c_i$ es irrelevante). La figura 5.50b muestra que el radio de la $i$-ésima capa depende de $x$. En la figura 5.50c (que muestra una sección del depósito) vemos que el

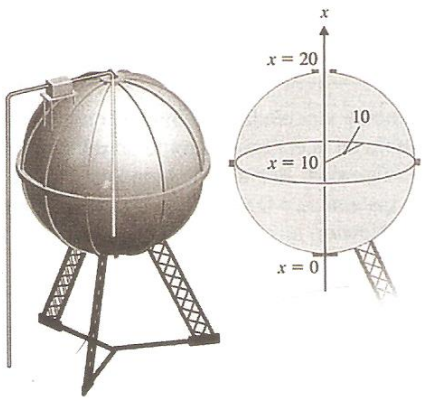



**Figura 5.50a**
Depósito esférico.

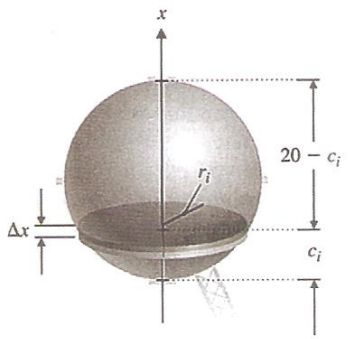



**Figura 5.50b**
La $i$-ésima capa de agua.

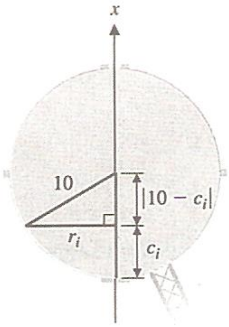



**Figura 5.50c**
Sección del depósito.

radio $r_i$ correspondiente a una profundidad $x = c_i$ es la base de un triángulo rectángulo de hipotenusa 10 y altura $|10 - c_i|$. Por el teorema de Pitágoras,

$$(10 - c_i)^2 + r_i^2 = 10^2.$$

Despejando $r_i^2$, obtenemos

$$\begin{aligned} r_i^2 &= 10^2 - (10 - c_i)^2 = 100 - (100 - 20c_i + c_i^2) \\ &= 20c_i - c_i^2. \end{aligned}$$

Por tanto, la fuerza $F_i$ requerida para mover la capa $i$-ésima es simplemente su peso. Como la densidad del agua es 62,4 lb/pie$^3$, se tiene

$$\begin{aligned} F_i &\approx \text{(Volumen de una capa cilíndrica)(peso del agua por unidad de volumen)} \\ &= (\pi r_i^2 h)(62{,}4 \text{ lb/pies}^3) \\ &= 62{,}4\ \pi(20c_i - c_i^2)\ \Delta x. \end{aligned}$$

El trabajo necesario para bombear el agua de la $i$-ésima capa es aproximadamente

$$\begin{aligned} W_i &\approx \text{(Fuerza)(distancia)} \\ &= 62{,}4\pi(20c_i - c_i^2)\ \Delta x\ (20 - c_i) \\ &= 62{,}4\pi c_i(20 - c_i)^2\ \Delta x. \end{aligned}$$

El trabajo necesario para bombear toda el agua es la suma del trabajo requerido por todas las capas:

$$W \approx \sum_{i=1}^{n} 62{,}4\ \pi c_i(20 - c_i)^2\ \Delta x.$$

Finalmente, tomando el límite $n \to \infty$ se obtiene el trabajo exacto, que reconocemos como una integral definida:

$$W = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} 62{,}4\ \pi c_i(20 - c_i)^2\ \Delta x = \int_0^{20} 62{,}4\pi x(20 - x)^2\ dx$$

$$= 62{,}4\ \pi \int_0^{20} (400x - 40x^2 + x^3)\ dx$$

$$= 62{,}4\ \pi \left[ 400\ \frac{x^2}{2} - 40\ \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right]_0^{20}$$

$$= 62{,}4\ \pi \left( \frac{40.000}{3} \right) \approx 2{,}61 \times 10^6 \text{ pies-libras.}$$

---

El **impulso** es una magnitud física estrechamente vinculada al trabajo. En lugar de relacionar fuerza y distancia para dar cuenta del cambio en la energía, el impulso relaciona fuerza y tiempo para dar cuenta del cambio en la velocidad. Por ahora, supongamos que una fuerza constante $F$ se aplica a un objeto entre los instantes $t = 0$ y $t = T$. Si $x(t)$ denota la posición del objeto en el instante $t$, la segunda ley de Newton afirma que $F = ma = mx''(t)$. Integrando esta ecuación en $t$, obtenemos

$$\int_0^T F\ dt = m \int_0^T x''(t)\ dt,$$

o sea,

$$F(T - 0) = m[x'(T) - x'(0)].$$

Recordando que $x'(t)$ es la velocidad $v(t)$, eso significa que

$$FT = m[v(T) - v(0)]$$

o sea, $FT = m\,\Delta v$, donde $\Delta v = v(T) - v(0)$ es el cambio en la velocidad. La cantidad $FT$ es el **impulso**, $mv(t)$ el **momento** en el instante $t$ y la ecuación que relaciona el impulso con el cambio en la velocidad se conoce como **ecuación momento-impulso**.

Hemos definido el impulso para una fuerza constante. Falta generalizar esa noción al caso de una fuerza variable. Piense un poco en ello e intente dar una definición apropiada.

Definimos el **impulso** $J$ de una fuerza $F(t)$ que actúa durante el intervalo de tiempo $[a, b]$ como

**Impulso**

$$J = \int_a^b F(t)\,dt.$$

Adviértanse las analogías y diferencias entre trabajo e impulso. Dejamos como ejercicio la deducción de la integral del impulso para una fuerza variable. La ecuación momento-impulso también se generaliza al caso de una fuerza no constante:

**Ecuación impulso-momento**

$$J = m[v(b) - v(a)].$$

### Ejemplo 6.4 Estimación del impulso de una pelota de béisbol

Una pelota de béisbol viaja a 130 pies/s (unos 90 mph) y colisiona con un bate. Los siguientes datos (adaptados de *The Physics of Baseball*, de Robert Adair) muestran la fuerza ejercida por el bate sobre la pelota a intervalos de 0,0001 segundos:

| $t$ (s) | 0 | 0,0001 | 0,0002 | 0,0003 | 0,0004 | 0,0005 | 0,0006 | 0,0007 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F(t)$ (lb) | 0 | 1.250 | 4.250 | 7.500 | 9.000 | 5.500 | 1.250 | 0 |

Estimar el impulso del bate sobre la pelota y, usando $m = 0{,}01$ slugs, la velocidad de la pelota tras el impacto.

**Solución** En este caso, el impulso viene dado por $\int_0^{0,0007} F(t)\,dt$. No podemos evaluar esta integral, ya que desconocemos la función fuerza $F(t)$. Sólo conocemos una tabla de valores de $F(t)$, así que lo único que podemos hacer es aproximar la integral numéricamente (por ejemplo, mediante la regla de Simpson). La regla de Simpson requiere que $n + 1$, el número de puntos de la partición, sea impar. Por tanto, exige un número par $n$ de subintervalos (¡piénselo!).

Usando $n = 8$ y añadiendo un valor 0 de la función en $t = 0{,}0008$ (¿por qué es correcto esto?), la regla de Simpson da

$$\begin{aligned} J &\approx [0 + 4(1.250) + 2(4.250) + 4(7.500) + 2(9.000) + 4(5.500) \\ &\qquad + 2(1.250) + 4(0) + 0]\,\frac{0{,}0001}{3} \\ &\approx 2{,}866. \end{aligned}$$

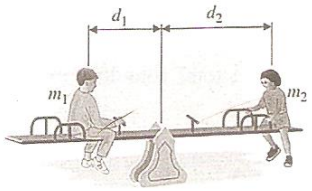



**Figura 5.51a**
Dos masas en equilibrio.

En este caso, la ecuación momento-impulso $J = m\,\Delta v$ es $2{,}866 = 0{,}01\,\Delta v$, luego $\Delta v = 286{,}6$ pies/s. Como la velocidad al comienzo era de 130 pies/s en una dirección y termina viajando en dirección opuesta, su velocidad final es de 156,6 pies/s.

Al igual que el trabajo, el concepto de **primer momento** tiene como ingredientes la fuerza y la distancia. Los momentos se utilizan para resolver problemas de equilibrio y de rotación. Empezamos con un problema sencillo: dos niños en un balancín. Supongamos que el niño de la izquierda en la figura 5.51a pesa más que el de la derecha. Si los dos niños se

sientan a la misma distancia del punto de apoyo, el lado izquierdo bajará hasta el suelo y el niño más ligero será levantado.

También sabemos que los dos niños pueden balancearse si el más pesado se sienta más cerca del punto de apoyo. Es decir, el equilibrio viene determinado por el peso (la fuerza) y por la distancia al punto de apoyo.

La situación es fácil de describir matemáticamente. Si los niños tienen masas $m_1$ y $m_2$ y se sientan a distancias $d_1$ y $d_2$, respectivamente, del punto de apoyo, se balancearán en equilibrio si, y sólo si,

$$m_1 d_1 = m_2 d_2. \tag{6.3}$$

Reformulando el problema, consideramos dos objetos, de masas $m_1$ y $m_2$, situados en las posiciones $x_1$ y $x_2$, respectivamente, con $x_1 < x_2$. Vamos a tratarlos como **masas puntuales**, es decir, como si la masa estuviera concentrada en un punto (figura 5.51b).

**Figura 5.51b**

Dos masas puntuales.

Supongamos que queremos hallar el **centro de masa** $\bar{x}$, esto es, el lugar donde hay que colocar el punto de apoyo de un balancín para que esos dos objetos se balanceen. Según la ecuación del equilibrio (6.3), ha de ser $m_1(\bar{x} - x_1) = m_2(x_2 - \bar{x})$. Despejando $\bar{x}$, se obtiene

$$\bar{x} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}.$$

El denominador en esta expresión es la masa total del «sistema» (la masa total de los dos objetos). El numerador se llama **primer momento** del sistema.

Más en general, para un sistema de $n$ masas $m_1, m_2, \ldots, m_n$ localizadas en $x_1, x_2, \ldots, x_n$, respectivamente, el centro de masas $\bar{x}$ viene dado por el primer momento dividido entre la masa total:

$$\bar{x} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}.$$

Ahora supongamos que, en lugar de la masa y el centro de masas de un sistema de objetos aislados, queremos hallar la masa y el centro de masa de una varilla de densidad variable que se extiende desde $x = a$ hasta $x = b$, La función densidad $\rho(x)$, conocida, se mide en unidades de masa por unidad de longitud. En el caso más simple posible, en el que la densidad es una constante $\rho$, la masa de la varilla es $m = \rho L$, siendo $L = b - a$ su longitud.

Si la densidad es variable a lo largo de la varilla, no está claro cómo calcular su masa, así que intentamos aproximar su valor. Como otras veces, empezamos partiendo $[a, b]$ en $n$ subintervalos de igual longitud, $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$. En cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ la masa es aproximadamente $\rho(c_i)\,\Delta x$, donde $c_i$ es algún punto del subintervalo. Así, pues, la masa total se puede aproximar por

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} \rho(c_i)\,\Delta x.$$

Esto es una suma de Riemann que tenderá hacia el valor de la masa total cuando $n \to \infty$. Tomando el límite $n \to \infty$ obtenemos

**Masa**

$$\boxed{m = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \rho(c_i)\,\Delta x = \int_a^b \rho(x)\,dx.} \tag{6.4}$$

**Ejemplo 6.5** **Masa de un bate de béisbol**

Un bate de béisbol se extiende desde $x = 0$ hasta $x = 30$ (pulgadas) con densidad $\rho(x) = \left(\frac{1}{46} + \frac{x}{690}\right)^2$ slugs por pulgada. La densidad tiene en cuenta que el bate tiene forma de cono alargado. Calcular la masa del bate.

**Solución** Por (6.4),

$$m = \int_0^{30} \left(\frac{1}{46} + \frac{x}{690}\right)^2 dx$$

$$= \frac{690}{3}\left(\frac{1}{46} + \frac{x}{690}\right)^3 \Bigg|_0^{30} = \frac{690}{3}\left[\left(\frac{1}{46} + \frac{30}{690}\right)^3 - \left(\frac{1}{46}\right)^3\right]$$

$$\approx 6{,}144 \times 10^{-2} \text{ slugs.}$$

Para entender mejor el resultado, podemos calcular el peso (en onzas), multiplicando la masa por $32 \cdot 16$. Resulta un peso de 31,5 onzas.

Para calcular el primer momento de un objeto de densidad variable $\rho(x)$ que se extiende desde $x = a$ hasta $x = b$, dividimos otra vez $[a, b]$ en $n$ subintervalos. Por el argumento anterior, la masa del $i$-ésimo trozo es aproximadamente $\rho(c_i)\,\Delta x$, para cualquier elección de $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Ahora representamos el $i$-ésimo trozo del objeto por una masa puntual $m_i = \rho(c_i)\,\Delta x$ localizada en $x = c_i$. Y pensamos el objeto como aproximado por $n$ masas puntuales distintas, como indica la figura 5.52.

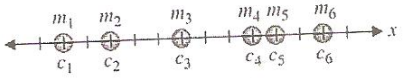



**Figura 5.52**
Seis masas puntuales.

El primer momento $M_n$ de este sistema aproximante es

$$M_n = [\rho(c_i)\,\Delta x]c_1 + [\rho(c_2)\,\Delta x]c_2 + \ldots + [\rho(c_n)\,\Delta x]c_n$$

$$= [c_1\rho(c_1) + c_2\rho(c_2) + \ldots + c_n\rho(c_n)]\,\Delta x = \sum_{i=1}^{n} c_i\rho(c_i)\,\Delta x.$$

Tomando el límite $n \to \infty$, la suma tiende al primer momento

**Primer momento**

$$M = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} c_i\,\rho(c_i)\,\Delta x = \int_a^b x\rho(x)\,dx. \tag{6.5}$$

El centro de masa del objeto viene dado por

**Centro de masa**

$$\bar{x} = \frac{M}{m} = \frac{\displaystyle\int_a^b x\rho(x)\,dx}{\displaystyle\int_a^b \rho(x)\,dx}. \tag{6.6}$$

**Ejemplo 6.6** **Centro de masa («punto dulce») de un bate de béisbol**

Hallar el centro de masa del bate del ejemplo 6.5

**Solución** Por (6.5), el primer momento es

$$M = \int_0^{30} x\left(\frac{1}{46} + \frac{x}{690}\right)^2 dx = \left[\frac{x^2}{4232} + \frac{x^3}{47.610} + \frac{x^4}{1.904.400}\right]_0^{30} \approx 1{,}205.$$

Ya hemos hallado la masa, $m \approx 6{,}144 \times 10^{-2}$ slugs, así que de (6.6) se sigue que el centro de masas del bate viene dado por

$$\bar{x} = \frac{M}{m} \approx \frac{1{,}205}{6{,}144 \times 10^{-2}} \approx 19{,}6 \text{ pulgadas.}$$

En un bate de béisbol el centro de masa es candidato a ser el llamado «punto dulce», o sea, el punto óptimo para batear.

La presa Hoover.

La última aplicación de la integración considerada en esta sección va a ser la fuerza hidrostática. ¿Qué fuerza debe soportar la presa de un embalse?

Como de costumbre, resolvemos antes un problema más simple. La fuerza ejercida por el agua sobre una placa rectangular horizontal sumergida en ella (la **fuerza hidrostática**) es simplemente el peso del agua situada por encima de la placa. Es igual al producto del volumen de agua sobre la placa por la densidad del agua (62,4 lb/pies$^3$). Si el área de la placa es $A$ pies$^2$ y está $d$ pies por debajo del nivel de la superficie (figura 5.53), la fuerza sobre la placa es

$$F = 62{,}4\,Ad.$$

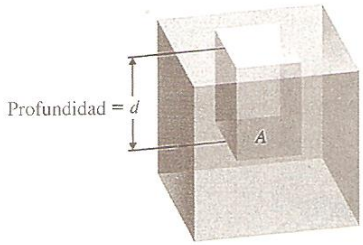



**Figura 5.53**

Una placa de área $A$ sumergida a profundidad $d$.

El principio de Pascal establece que la presión a una profundidad $d$ es la misma en todas las direcciones. En consecuencia, si se sumerge una placa plana en un fluido de densidad de peso $\rho$, la presión sobre un lado de la placa es $\rho \cdot d$ en cualquier punto. En particular, es irrelevante si la placa se sumerge horizontal, vertical o de cualquier otro modo (figura 5.54).

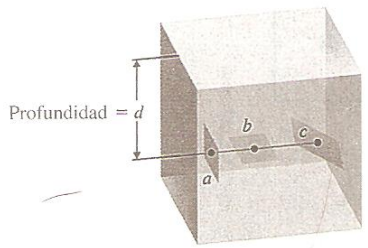



**Figura 5.54**

A una profundidad dada, la presión es la misma para todas las orientaciones.

Consideremos ahora un muro vertical (una presa) que cierra un embalse. Conviene orientar el eje $x$ vertical con $x = 0$ en la superficie del agua y el fondo en $x = a > 0$ (figura 5.55). Con ello, $x$ mide la profundidad de una sección de la presa. Sea $w(x)$ la anchura del muro a profundidad $x$ (todas las longitudes medidas en pies).

Partimos el intervalo $[0, a]$ en $n$ subintervalos de igual anchura $\Delta x = \dfrac{a}{n}$. Eso parte el muro en $n$ franjas de anchura $\Delta x$. Para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, el área de la $i$-ésima franja es aproximadamente $w(c_i)\,\Delta x$, donde $c_i$ es algún punto del subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Además, la profundidad en todo punto de esa franja es aproximadamente $c_i$. Así, pues, podemos aproximar la fuerza $F_i$ que actúa sobre esa franja de la presa mediante el peso del agua situada sobre una placa del tamaño de esa porción, pero orientada horizontalmente:

$$F_i \approx \underbrace{62{,}4}_{\substack{\text{densidad}\\ \text{de peso}}} \underbrace{w(c_i)}_{\text{longitud}} \underbrace{\Delta x}_{\text{anchura}} \underbrace{c_i}_{\text{profundidad}} = 62{,}4\, c_i\, w(c_i)\, \Delta x.$$

Sumando las fuerzas actuantes sobre cada franja, podemos aproximar la fuerza total ejercida sobre la presa por

$$F \approx \sum_{i=1}^{n} 62{,}4 c_i\, w(c_i)\, \Delta x.$$

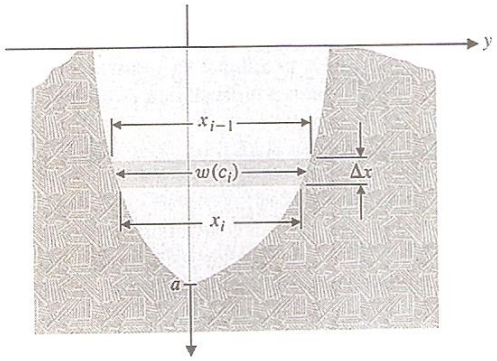



**Figura 5.55**

Fuerza que actúa sobre una presa.

Tomando el límite $n \to \infty$, las sumas de Riemann tienden a la fuerza hidrostática total sobre la presa:

$$F = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} 62{,}4 c_i w(c_i)\, \Delta x = \int_0^a 62{,}4 x w(x)\, dx, \tag{6.7}$$

donde reconocemos la integral como límite de sumas de Riemann.

## Ejemplo 6.7 Fuerza hidrostática sobre una presa

Una presa tiene la forma de un trapecio de 60 pies de altura. La anchura en su parte superior es 100 pies y en el fondo 40 pies (figura 5.56). Hallar la fuerza hidrostática máxima que la presa deberá soportar. Calcular la fuerza hidrostática si una sequía hace descender el nivel del agua 10 pies.

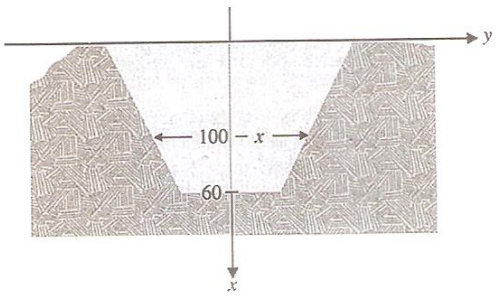



**Figura 5.56**

Presa en forma de trapecio.

**Solución** La anchura es una función lineal de la profundidad, con $w(0) = 100$ y $w(60) = 40$. La pendiente es $\frac{60}{-60} = -1$, así que $w(x) = 100 - x$. Según (6.7), la fuerza hidrostática es

$$F = \int_0^{60} \underbrace{62{,}4}_{\substack{\text{densidad} \\ \text{de peso}}} \underbrace{x}_{\text{profundidad}} \underbrace{(100 - x)}_{\text{anchura}}\, dx$$

$$= 3.120x^2 - 62{,}4\frac{x^3}{3}\Big|_0^{60} = 6.739.200 \text{ lb.}$$

Si el nivel del agua desciende 10 pies, la anchura de la presa al nivel de la superficie sería 90 pies. Bajando el origen 10 pies, la nueva función anchura sería tal que $w(0) = 90$ y $w(50) = 40$. La pendiente es todavía $-1$, así que la anchura viene dada por $w(x) = 90 - x$, Por (6.7), la fuerza hidrostática es ahora

$$F = \int_0^{50} \underbrace{62{,}4}_{\substack{\text{densidad}\\ \text{de peso}}} \underbrace{x}_{\text{profundidad}} \underbrace{(90 - x)}_{\text{anchura}}\, dx$$

$$= 2.808x^2 - 62{,}4\frac{x^3}{3}\Big|_0^{50} = 4.420.000 \text{ lb.}$$

Representa una reducción del 34% en la fuerza hidrostática.

## EJERCICIOS 5.6

1. Identificar los ingredientes en la definición de trabajo, impulso y primer momento (por ejemplo, fuerza y distancia) y en qué cálculos se utiliza (por ejemplo, cambio en la velocidad).

2. El centro de masa no siempre es el punto que deja la mitad de la masa a cada lado. Dar un ejemplo con más de la mitad de la masa a un lado (véanse los ejemplos 6.5 y 6.6) y explicar por qué el objeto se balancea respecto del centro de masa.

3. Los jugadores acostumbrados a atrapar una pelota llevan hacia atrás su mano de forma instintiva. Para atraparla, hay que aplicarle un impulso igual a su masa multiplicada por su velocidad. Moviendo hacia atrás la mano consiguen aumentar el tiempo de que disponen para frenar la pelota. Explicar, usando la ecuación momento-impulso, por qué eso reduce la fuerza media sobre la mano.

4. Una pelota de tenis se dirige hacia usted a 100 mph. Tras golpearla se aleja a 100 mph. El trabajo mide el cambio en la energía. Explicar por qué la raqueta ha realizado trabajo aunque la pelota tiene la misma rapidez que antes del golpe.

5. Una fuerza de 5 libras estira un muelle 4 pulgadas. Calcular el trabajo realizado al estirar el muelle 6 pulgadas a partir de su posición natural.

6. Una fuerza de 10 libras estira un muelle 2 pulgadas. Calcular el trabajo realizado al estirar el muelle 3 pulgadas a partir de su posición natural.

7. Una fuerza de 20 libras estira un muelle $\frac{1}{2}$ pie. Calcular el trabajo realizado al estirar el muelle 1 pie a partir de su posición natural.

8. Una fuerza de 12 libras estira un muelle $\frac{1}{3}$ pie. Calcular el trabajo realizado al estirar el muelle 4 pulgadas a partir de su posición natural.

9. Un atleta levanta 250 libras una altura de 20 pulgadas. Hallar el trabajo realizado (en libras-pies).

10. Un luchador levanta a su oponente, de 300 libras, sobre su cabeza hasta una altura de 6 pies. Hallar el trabajo realizado (en libras-pies).

11. Una persona levanta un sillón de 100 libras hasta una altura de 3 pies. Hallar el trabajo realizado.

12. Una carretilla elevadora levanta 2.000 libras de ladrillos a una altura de 8 pies. Calcular el trabajo realizado.

13. Un cohete lleno de fuel pesa 10.000 libras en el momento de su lanzamiento. Conforme gana altura, pierde peso al ir consumiendo el combustible. Pierde 1 libra de combustible cada 15 metros de ascenso. Explicar por qué el trabajo realizado para llevar el cohete hasta una altura de 30.000 pies es $\int_0^{30.000} (10.000 - x/15)\, dx$ y calcular la integral.

14. Supongamos que el cohete del ejercicio 13 pesa 8.000 libras en el momento del despegue y consume 1 libra de combustible cada 10 metros de ascenso. Hallar el trabajo necesario para elevarlo hasta 10.000 pies de altura.

15. Un motor de automóvil ejerce una fuerza de $800x(1 - x)$ libras cuando el automóvil está en la posición $x$ (millas), con $0 \le x \le 1$. Calcular el trabajo realizado.

16. La potencia mide el trabajo por unidad de tiempo. Para la situación del ejercicio 15, explicar por qué no es igual a $800x(1 - x)$. Si el automóvil tarda 15 segundos en recorrer la milla, calcular la potencia media en caballos de vapor (1 caballo de vapor = 550 libras-pies/s).

17. Un depósito esférico de 50 pies de radio tiene su punto más bajo a una altura de 200 pies sobre el suelo. Calcular el trabajo necesario para llenarlo de agua.

18. Calcular el trabajo requerido para llenar hasta la mitad el depósito del ejercicio 17.

19. Calcular el trabajo realizado al extraer la mitad del agua del depósito del ejemplo 6.3 por su punto más alto.

20. Un depósito tiene la forma de un cono circular recto de 10 pies de altura y su base tiene 5 pies de radio, con su vértice en el suelo (piense en un cucurucho de helado). Si el depósito está lleno de agua, hallar el trabajo necesario para bombear toda el agua por la parte superior.

21. En el ejemplo 6.4, supongamos que la pelota de béisbol se movía a 100 pies/s. La fuerza ejercida sobre ella por el bate va cambiando como indica la tabla. Estimar el impulso y la velocidad de la pelota tras el impacto.

| $t$ (s) | 0 | 0,0001 | 0,0002 | 0,0003 | 0,0004 |
|---|---|---|---|---|---|
| $F$ (lb) | 0 | 1.000 | 2.100 | 4.000 | 5.000 |

| $t$ (s) | 0,0005 | 0,0006 | 0,0007 | 0,0008 |
|---|---|---|---|---|
| $F$ (lb) | 5.200 | 2.500 | 1.000 | 0 |

22. En el ejercicio 21 supongamos que la pelota iba a 85 pies/s. La fuerza ejercida por el bate cambia según indica la tabla. Estimar el impulso y la velocidad de la pelota tras el impacto.

| $t$ (s) | 0 | 0,0001 | 0,0002 | 0,0003 | 0,0004 |
|---|---|---|---|---|---|
| $F$ (lb) | 0 | 600 | 1.200 | 2.000 | 2.500 |

| $t$ (s) | 0,0005 | 0,0006 | 0,0007 | 0,0008 |
|---|---|---|---|---|
| $F$ (lb) | 3.000 | 2.500 | 1.100 | 300 |

23. Se realiza una prueba de colisión con un vehículo. La tabla muestra la fuerza sobre el muro. Estimar el impulso y la velocidad del vehículo (tomar $m = 200$).

| $t$ (s) | 0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F$ (lb) | 0 | 8.000 | 16.000 | 24.000 | 15.000 | 9.000 | 0 |

24. Dos jugadores de rugby colisionan. La tabla muestra la fuerza ejercida por el defensor sobre el atacante. Estimar el impulso. Si el atacante tiene $m = 7$ y velocidad 29 pies/s antes de la colisión, ¿consigue pararle el defensor?

| $t$ (s) | 0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $F$ (lb) | 0 | 300 | 500 | 400 | 250 | 150 |

| $t$ (s) | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1,0 |
|---|---|---|---|---|---|
| $F$ (lb) | 100 | 100 | 80 | 40 | 0 |

25. Calcular la masa y el centro de masa de un objeto con densidad $\rho(x) = \frac{x}{6} + 2$ kg/m, $0 \le x \le 6$. Explicar brevemente, en términos de la función densidad, por qué el centro de masa no está en $x = 3$.

26. Calcular la masa y el centro de masa de un objeto con densidad $\rho(x) = 3 - \frac{x}{6}$ kg/m, $0 \le x \le 6$. Explicar brevemente, en términos de la función densidad, por qué el centro de masa no está en $x = 3$.

27. Calcular la masa y el centro de masa de un objeto con densidad $\rho(x) = 4 + \frac{x^2}{4}$ kg/m, $-2 \le x \le 2$.

28. Calcular la masa y el centro de masa de un objeto con densidad $\rho(x) = 4 - \operatorname{sen} \frac{\pi x}{4}$ kg/m, $0 \le x \le 4$.

29. Calcular el peso en onzas de un objeto que se extiende desde $x = -3$ hasta $x = 27$ con densidad $\rho(x) = \left(\frac{1}{46} + \frac{x+3}{690}\right)^2$ slugs/pulg.

30. Calcular el peso en onzas de un objeto que se extiende desde $x = 0$ hasta $x = 32$ con densidad $\rho(x) = \left(\frac{1}{46} + \frac{x+3}{690}\right)^2$ slugs/pulg.

31. Hallar el centro de masa del objeto del ejercicio 29. Ese objeto sirve de modelo para el bate de béisbol del ejemplo 6.5 «acortado» (sujetado 3 pulgadas más allá de lo normal). Comparar las masas y los centros de masa de ambos bates.

32. Calcular el centro de masa del objeto del ejercicio 30. Este objeto sirve de modelo para un bate de béisbol 2 pulgadas más largo que el del ejemplo 6.5. Comparar las masas y los centros de masa de ambos bates.

33. Comparar la masa y el peso en onzas y el centro de masa de un objeto que se extiende de $x = 0$ a $x = 30$ con densidad $\rho(x) = 0{,}00468\left(\frac{3}{16} + \frac{x}{60}\right)$ slugs por pulgada.

34. El objeto del ejercicio 33 sirve de modelo para un bate de béisbol de aluminio (hueco y con un grosor de $\frac{1}{4}$ pulgada). Comparar su masa y su centro de masa con el del bate de madera del ejemplo 6.5. Los expertos afirman que es más fácil batear una pelota con pequeño valor de $x$ con un bate de aluminio. Explicar por qué los cálculos apuntan a que es cierto.

35. La figura muestra un dibujo esquemático de un cohete. Supongamos que mide 3 unidades en sentido vertical y 6 en sentido horizontal. Calcular, mediante geometría elemental, el área de cada una de las tres regiones del esquema. Suponiendo densidad $\rho$ constante, localizar la coordenada $x$ del centro de masa de cada región. (Ayuda: La primera región se extiende desde $x = 0$ hasta $x = 1$ con densidad $\rho(3 - 2x)$ y la tercera desde $x = 5$ hasta $x = 6$ con densidad $\rho(6 - x)$).

36. En el ejercicio 35, sustituir el cohete por tres masas puntuales, una por cada región. Tomar como masa de cada una de ellas el área de la región y situarla en la coordenada $x$ del centro de masa de la región. Hallar el centro de masas de ese sistema de

tres masas puntuales. [Los cohetes se diseñan con las aletas inferiores grandes para que el centro de masa esté cerca de la base (a la izquierda, en la figura). Eso mejora la estabilidad del cohete].

37. Una presa tiene la forma de un trapecio de 60 pies de altura. La anchura superior es 40 pies y la inferior 100 pies. Hallar la máxima fuerza hidrostática que debe soportar. Explicar por qué la fuerza es mucho mayor que la del ejemplo 6.7.

38. Hallar la fuerza hidrostática en el ejercicio 37 si una sequía hace descender el nivel del agua 10 pies.

39. En un acuario hay una ventana circular de observación de radio 5 pies. El centro de la ventana está 40 pies bajo el nivel de la superficie del agua. Calcular la fuerza hidrostática sobre esa ventana.

40. Una ventana de observación rectangular, de 40 pies de anchura, se extiende desde la superficie del agua hasta una profundidad de 10 pies. Hallar la fuerza hidrostática sobre esa ventana.

41. La ventana de la cámara de un robot submarino es circular de 3 pulgadas de radio. ¿Qué fuerza hidrostática deberá soportar si se sumerge a 1.000 pies de profundidad?

42. Un submarinista baja a 60 pies de profundidad con un reloj cuyo cristal, circular, mide 1 pulgada de radio. ¿Cuánta presión debe soportar el cristal?

43. Hemos mencionado en el texto que el trabajo mide cambios en la energía. Por ejemplo, si un saltador de pértiga de 200 libras se eleva hasta 20 pies de altura, el trabajo realizado por la pértiga, 4.000 libras-pies, da al saltador una gran energía potencial. Para ver qué significa esto, calcular la velocidad $v$ del saltador cuando cae al suelo. Probar que su energía cinética en el momento del impacto, dada por $\frac{1}{2}mv^2$ ($m = 200/32$), es igual a 4.000 libras-pies. Esto ilustra el concepto de conservación de la energía.

44. Calcular la velocidad del saltador del ejercicio 43 cuando está a una altura de 10 pies. Probar que la suma de la energía potencial ($32mh$) y la energía cinética ($\frac{1}{2}mv^2$) es igual a 4.000 libras-pies.

45. Calcular, en caballos de vapor, la potencia necesaria para levantar un objeto de 100 toneladas (una ballena azul, por ejemplo) a 20 mph (1 caballo de vapor = 550 libras-pies/s). (Las ballenas azules nadan de modo tan eficiente que pueden mantener esa velocidad con sólo 60-70 caballos de vapor).

46. Para una fuerza constante $F$ ejercida durante un tiempo $t$, el impulso se define como $F \cdot t$. Para una fuerza variable $F(t)$, deducir la fórmula del impulso $J = \int_a^b F(t)\,dt$.

47. El primer momento de un sólido de densidad $\rho(x)$ es $\int_a^b x\rho(x)\,dx$. El segundo momento respecto del eje $y$, $\int_a^b x^2\rho(x)\,dx$, también es importante en las aplicaciones. Cuanto mayor es, más cuesta hacer girar el sólido en torno al eje $y$. Calcular los segundos momentos de los bates del ejemplo 6.5 y del ejercicio 29. Si un bate se sujeta más corto, es más fácil de manejar y de controlar. Calcular el porcentaje de reducción en el segundo momento si se sujeta acortando 3 pulgadas.

48. Ocasionalmente, los jugadores de béisbol «acorchan» ilegalmente sus bates, haciendo una perforación en la madera y rellenándola con corcho. La ventaja es que el segundo momento se reduce mucho. Como modelo de este hecho, consideremos el bate del ejemplo 6.5 y cambiemos la densidad a

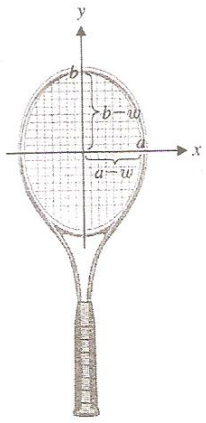
$$\rho(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{46} + \frac{x}{690}\right)^2 & \text{si} \quad 0 \le x \le 28 \\ \left(\frac{1}{92} + \frac{x}{690}\right)^2 & \text{si} \quad 28 < x \le 30, \end{cases}$$

lo que representa un agujero de $\frac{1}{4}$ de pulgada de radio y longitud 2 pulgadas. Calcular la masa y el segundo momento del bate trucado y compararlos con los del bate original.

49. El segundo momento (véase ejercicio 47) de un disco de densidad $\rho$ con la forma de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, viene dado por $\int_{-a}^{a} 2\rho b x^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,dx$. Usar un PCS para evaluar esta integral.

50. Usar el resultado del ejercicio 49 para demostrar que el segundo momento de la raqueta de tenis de la figura es

$$M = \rho \frac{\pi}{4}[ba^3 - (b - w)(a - w)^3].$$




51. Para una raqueta de tenis, un segundo momento grande (véanse ejercicios 49 y 50) significa menos giro de la raqueta en golpes descentrados. Comparar el segundo momento de una raqueta de madera ($a = 10$, $b = 13$, $w = 0{,}5$), una de tamaño medio ($a = 10$, $b = 13$, $w = 0{,}5$) y una de tamaño grande ($a = 11$, $b = 14$, $w = 0{,}5$).

52. Sea $M$ el segundo momento hallado en el ejercicio 50. Probar que $\frac{dM}{da} > 0$ y concluir que las raquetas más grandes tienen segundos momentos mayores. Probar además que $\frac{dM}{dw} > 0$ e interpretar este resultado.

Puede sorprender que el Cálculo contribuya a la investigación de procesos aleatorios, pero es, en efecto, una aplicación muy importante de la integración. Le recomendamos que siga en sus estudios posteriores algún curso de probabilidades y Estadística.

## 5.7 PROBABILIDAD

Como tal vez haya sospechado con antelación, en las aplicaciones rara vez tenemos una función para ser analizada. Muy probablemente hay que hacer abundantes medidas y/o desarrollar una teoría detallada del proceso en cuestión. Suele ser un reto decidir cuál es la función a estudiar, sobre todo si las medidas están sujetas a errores aleatorios. El análisis de los procesos aleatorios es el objetivo de la teoría de las probabilidades y de la Estadística. En esta sección describimos brevemente la aplicación del Cálculo a la teoría de probabilidades.

Comenzamos con un ejemplo simple. Supongamos que lanzamos dos monedas, cada una de las cuales tiene un 50% de probabilidad de salir cara (A) o cruz (Z). Debido a la aleatoriedad, no podemos calcular exactamente cuántas caras saldrán en un cierto número de lanzamientos. Pero sí podemos calcular la probabilidad de los posibles resultados, que en un lanzamiento son AA, AZ, ZA y ZZ, cada uno con probabilidad $\frac{1}{4}$, ya que todos son igualmente probables. Esto quiere decir que, en promedio, cada uno de estos sucesos ocurrirá en una cuarta parte de los lanzamientos. En otras palabras, la **frecuencia relativa** con que cada uno de esos sucesos se producirá en un número grande de lanzamientos será $\frac{1}{4}$ aproximadamente.

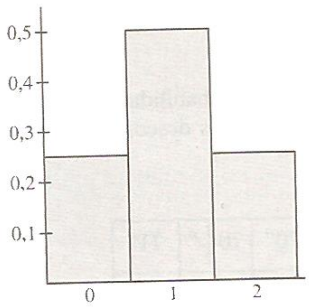



**Figura 5.57**

Histograma para el lanzamiento de dos monedas.

Supongamos que estamos interesados por el número de caras. Según lo dicho, la probabilidad de obtener dos caras es $\frac{1}{4}$, la de obtener una cara es $\frac{2}{4}$ (ya que eso puede ocurrir de dos maneras, AZ y ZA) y la de obtener cero caras es $\frac{1}{4}$. Resumimos esta información en un **histograma** o diagrama de barras (figura 5.57).

Imaginemos ahora que lanzamos ocho monedas. La tabla y la figura 5.58 muestran las probabilidades y el histograma correspondiente. Nótese que la suma de todas las probabilidades es 1 (o sea, el 100%, ya que es **seguro** que alguna de las posibilidades va a ocurrir en una tirada). Ésta es una de las propiedades características de la probabilidad. Otra propiedad básica es el **principio de adición**: para calcular la probabilidad de obtener 6, 7 u 8 caras (o cualesquiera otros sucesos excluyentes) basta sumar las probabilidades de esos sucesos:

| Número de caras | Probabilidad |
|---|---|
| 0 | 1/256 |
| 1 | 8/256 |
| 2 | 28/256 |
| 3 | 56/256 |
| 4 | 70/256 |
| 5 | 56/256 |
| 6 | 28/256 |
| 7 | 8/256 |
| 8 | 1/256 |

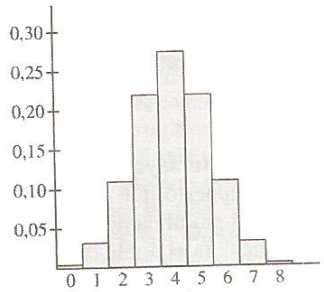



**Figura 5.58**

Histograma para el lanzamiento de ocho monedas.

$$P\,(6,\ 7 \text{ u } 8 \text{ caras}) = \frac{28}{256} + \frac{8}{256} + \frac{1}{256} = \frac{37}{256} \approx 0{,}144.$$

La interpretación gráfica de este cálculo resulta reveladora. En el histograma de la figura 5.58 cada barra tiene anchura 1. La probabilidad asociada con cada barra es igual al área del rectángulo. En términos gráficos:

- El área total en el histograma es 1.
- La probabilidad de obtener 6, 7 u 8 caras es igual a la suma de las áreas de los rectángulos situados sobre 6, 7 y 8.

No todos los problemas de probabilidad son tan simples como el lanzamiento de monedas. Por ejemplo, la situación es muy distinta si queremos hallar la probabilidad de que una persona, elegida al azar, mida 5′9″ (5 pies y 9 pulgadas = 69 pulgadas) o 5′10″. No hay teoría simple para hallar las probabilidades, porque todas las alturas no son igualmente probables. En este caso, necesitamos utilizar la correspondencia entre probabilidad y frecuencia relativa. Si tenemos un muestreo de las alturas de un gran número de personas, podemos encontrarnos con algo parecido a la siguiente tabla.

| Altura | < 64″ | 64″ | 65″ | 66″ | 67″ | 68″ | 69″ | 70″ | 71″ | 72″ | 73″ | >73″ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Número de personas | 23 | 32 | 61 | 94 | 133 | 153 | 155 | 134 | 96 | 62 | 31 | 26 |

Como el número de personas en este muestreo es 1.000, la frecuencia relativa de la altura 5′9″ (69″) es $\frac{155}{1.000} = 0{,}155$ y la de 5′10″ (70″) es $\frac{134}{1.000} = 0{,}134$. Por tanto, estimamos que la probabilidad de medir 5′9″ o 5′10″ es 0,155 + 0,134 = 0,289. La figura 5.59 muestra el histograma.

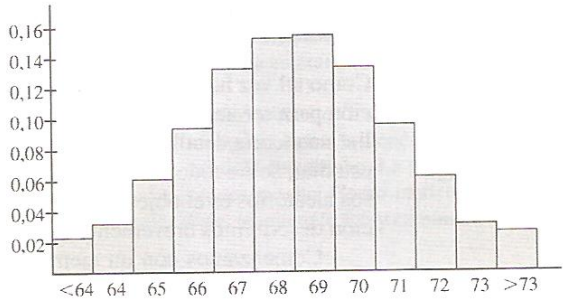



**Figura 5.59**

Histograma para la frecuencia relativa de las alturas.

Supongamos que queremos ser más específicos. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona elegida al azar mida $68\frac{1}{2}''$ o $69''$? Para responder necesitamos descomponer nuestros datos más todavía, como en la siguiente tabla parcial:

| $66\frac{1}{2}''$ | $67''$ | $67\frac{1}{2}''$ | $68''$ | $68\frac{1}{2}''$ | $69''$ | $69\frac{1}{2}''$ | $70''$ | $70\frac{1}{2}''$ | $71''$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 52 | 61 | 72 | 71 | 82 | 81 | 74 | 69 | 65 | 58 |

La probabilidad de que mida $69''$ se puede estimar mediante la frecuencia relativa de $69''$ en la tabla, que es $\frac{81}{1.000} = 0{,}081$. Análogamente, la probabilidad de que la persona mida $68\frac{1}{2}''$ es aproximadamente $\frac{82}{1.000} = 0{,}082$. La probabilidad de que mida $68\frac{1}{2}''$ o $69''$ es, por tanto, aproximadamente $0{,}081 + 0{,}082 = 0{,}163$. La figura 5.60a muestra un histograma de esta porción de los datos.

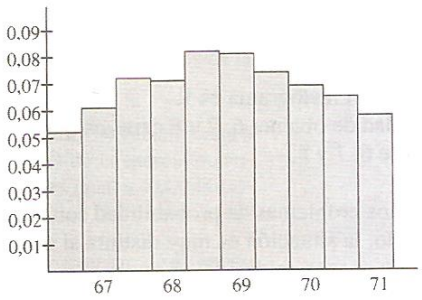



**Figura 5.60a**

Histograma para la frecuencia relativa de las alturas.

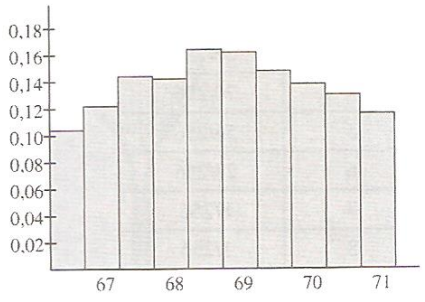



**Figura 5.60b**

Histograma que muestra el doble de la frecuencia relativa.

Como ahora cada barra representa un rango de media pulgada de altura, ya no podemos interpretar el área en el histograma como probabilidad (habíamos supuesto que cada barra tenía anchura 1). Para restablecer la relación entre área y probabilidad modificamos el histograma. La figura 5.60b muestra un histograma en el que el eje vertical da el doble de la frecuencia relativa. La barra en $69''$ tiene altura 0,162 y anchura $\frac{1}{2}$. Su área, $\frac{1}{2}(0{,}162) = 0{,}081$, corresponde a la frecuencia relativa (o sea, la probabilidad) de la altura $69''$.

Podríamos seguir subdividiendo en subintervalos de altura cada vez más pequeños y modificar a la vez las alturas de manera que el área de cada rectángulo sea siempre igual a la

frecuencia relativa (probabilidad) del intervalo de alturas en cuestión. Por ejemplo, tomemos $n$ subintervalos entre 5′8″ y 5′9″. Sea $x$ la altura en pulgadas y $f(x)$ la altura de la barra del histograma en el subintervalo que contiene a $x$. Sean $x_1 = 68 + \frac{1}{n}$, $x_2 = 68 + \frac{2}{n}$ y así sucesivamente, de modo que $x_i = 68 + \frac{i}{n}$, para $1 \le i \le n$ y sea $\Delta x = \frac{1}{n}$. Para una persona elegida al azar, la probabilidad de que su altura esté entre 5′8″ y 5′9″ se puede estimar mediante la suma de las áreas de los correspondientes rectángulos del histograma:

$$P\,(68 \le x \le 69) \approx f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \ldots + f(x_n)\,\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x. \qquad (7.1)$$

Al crecer $n$, el histograma de la figura 5.61 se «suaviza» y tiende a una curva como la que muestra la figura 5.62.

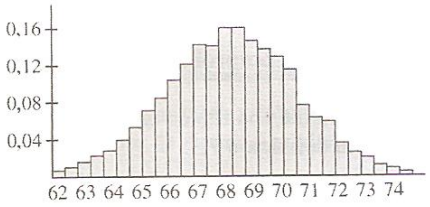



**Figura 5.61**

Histograma de alturas.

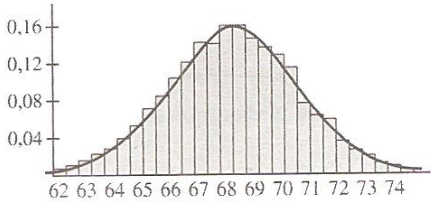



**Figura 5.62**

Histograma de alturas y función densidad de probabilidad.

## Notas históricas

**Blaise Pascal (1623-1662).** Matemático y físico francés que inició con Pierre Fermat el estudio sistemático de la teoría de probabilidades. Se le atribuyen numerosas invenciones: el reloj de pulsera, el barómetro, la prensa hidráulica, la jeringuilla y diversas máquinas calculadoras. También descubrió lo que hoy se conoce como el principio de Pascal en hidrostática (véase sección 5.6). Pascal pudo haber sido uno de los fundadores del Cálculo, pero su precaria salud y largos períodos de tiempo dedicados a la contemplación religiosa y filosófica redujeron su obra matemática.

Esta función límite $f(x)$ es la **función densidad de probabilidad** (**fdp**) para las alturas. Nótese que $f(x_i)$ no da la probabilidad de que una persona mida $x_i$. En lugar de eso, la cantidad $f(x_i)\,\Delta x$ es una aproximación de la probabilidad de que la altura esté en el rango $[x_{i-1}, x_i]$.

Observe con cuidado (7.1) y piense qué sucede si $n$ crece. La suma de Riemann de la derecha debe tender a la integral $\int_a^b f(x)\,dx$. En este caso particular, los límites de integración son 68 (5′8″) y 69 (5′9″). Se tiene

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \int_{68}^{69} f(x)\,dx.$$

Ajustando los valores de la función de manera tal que la probabilidad corresponda al área (dada por una integral), hemos llegado a una técnica familiar y directa para calcular probabilidades. Ahora resumimos nuestra discusión en varias definiciones.

Los ejemplos precedentes son **distribuciones de probabilidad discreta** (*discreta* significa que la cantidad medida sólo toma un conjunto finito, o una sucesión, de valores). Por ejemplo, en el lanzamiento de monedas el número de caras debe ser un entero.

Por el contrario, muchas distribuciones son **continuas**. Es decir, la cantidad de interés (la variable aleatoria) toma valores en un continuo (en un intervalo). Así, la altura de una persona puede ser cualquier número real, aunque estamos redondeando a números enteros de pulgadas. (Por ejemplo, uno de los autores da 6′0″ como su altura, aunque su altura real es 5′11,8″ aproximadamente).

Para las distribuciones continuas, el análogo de un histograma es la gráfica de una función densidad de probabilidad (fdp), que pasamos a definir con precisión.

**Definición 7.1**

Sea $X$ una variable aleatoria que puede tomar cualquier valor $x$ con $a \le x \le b$. Una **función densidad de probabilidad** (fdp) para $X$ es una función $f(x)$ tal que

(i) $f(x) \ge 0$ en $a \le x \le b$. Las fdp nunca son negativas.

(ii) $\int_a^b f(x)\,dx = 1$. La probabilidad total es 1.

(iii) La probabilidad de que el valor observado de $X$ esté entre $c$ y $d$ viene dada por el área bajo la gráfica de la fdp en ese intervalo:

$$P(c \le X \le d) = \int_c^d f(x)\,dx.$$ La probabilidad corresponde al área bajo la curva.

Si se quiere probar que una función define una fdp para *alguna* variable aleatoria (desconocida) hay que verificar que satisface las propiedades (i) y (ii) de la definición 7.1.

**Ejemplo 7.1** **Comprobación de que una función es una fdp en un intervalo**

Probar que $f(x) = 3x^2$ define una fdp en el intervalo $[0, 1]$, verificando que satisface las propiedades (i) y (ii) de la definición 7.1

**Solución** Está claro que $f(x) \ge 0$. En cuanto a (ii), integramos la fdp sobre su dominio y obtenemos

$$\int_0^1 3x^2\,dx = x^3\Big|_0^1 = 1.$$

**Ejemplo 7.2** **Estimación de probabilidades usando una fdp**

Supongamos que $f(x) = \dfrac{0{,}4}{\sqrt{2\pi}} e^{-0{,}08(x-68)^2}$ es la fdp de las alturas de los varones en Estados Unidos.

(a) Hallar la probabilidad de que un varón, elegido al azar, mida entre 68 y 69 pulgadas.
(b) Ídem entre 74 y 76 pulgadas.

**Solución** (a) La probabilidad de que esté entre 68 y 69 pulgadas es

$$P(68 \le X \le 69) = \int_{68}^{69} \frac{0{,}4}{\sqrt{2\pi}} e^{-0{,}08(x-68)^2}\,dx \approx 0{,}15542.$$

Hemos aproximado numéricamente la integral porque no conocemos una primitiva del integrando. (Se puede usar la regla de Simpson o un PCS).

(b) Análogamente, la probabilidad de que esté entre 74 y 76 pulgadas es

$$P(74 \le X \le 76) = \int_{74}^{76} \frac{0{,}4}{\sqrt{2\pi}} e^{-0{,}08(x-68)^2}\,dx \approx 0{,}00751,$$

donde otra vez hemos tenido que aproximar el valor de la integral numéricamente.

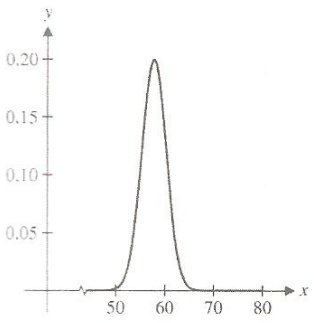



**Figura 5.63**
Altura de varones adultos.

De acuerdo con los datos de *Your Vital Statistics*, de Gyles Brandreth, la fdp para las alturas de varones en Estados Unidos se parece a la gráfica de $f(x) = \dfrac{0{,}4}{\sqrt{2\pi}} e^{-0{,}08(x-68)^2}$ (figura 5.63) usada en el ejemplo 7.2. Tal vez haya visto antes estas *curvas en forma de campana*. Esta distribución se llama **distribución normal**. Además de ella, hay otras distribuciones de probabilidad importantes en las aplicaciones.

**Ejemplo 7.3** **Cálculo de probabilidades con una fdp exponencial**

La vida, en años, de un tipo de lámpara se distribuye exponencialmente de acuerdo con la fdp $f(x) = 4e^{-4x}$. Calcular la probabilidad de que una lámpara dure 3 meses o menos.

**Solución** En primer lugar, como la vida viene medida en años, convertimos 3 meses en $\frac{1}{4}$ años. La probabilidad es

$$P\left(0 \le X \le \frac{1}{4}\right) = \int_0^{1/4} 4e^{-4x}\,dx = 4\left(-\frac{1}{4}\right)e^{-4x}\Big|_0^{1/4}$$

$$= -e^{-1} + e^0 = 1 - e^{-1} \approx 0{,}63212.$$

En ocasiones, puede haber argumentos teóricos para suponer que una fdp tiene cierta forma. En tales circunstancias, la primera tarea es determinar los valores de algunas constantes para satisfacer las propiedades de una fdp.

**Ejemplo 7.4** **Cálculo de los coeficientes de una fdp**

La fdp de una variable aleatoria es del tipo $f(x) = ce^{-3x}$ para cierta constante $c$, en $0 \le x \le 1$. Hallar el valor de $c$ para el cual esa función es una fdp.

**Solución** Para que sea una fdp, en primer lugar ha de ser $f(x) = ce^{-3x} \ge 0$, para todo $x \in [0, 1]$. Eso es cierto siempre que $c \ge 0$. Además, la integral sobre el dominio debe ser 1. Por tanto, exigimos que

$$1 = \int_0^1 ce^{-3x}\,dx = c\left(-\frac{1}{3}\right)e^{-3x}\Big|_0^1 = -\frac{c}{3}e^{-3} + \frac{c}{3} = \frac{c}{3}(1 - e^{-3}).$$

Concluimos que $c = \dfrac{3}{1 - e^{-3}} \approx 3{,}1572.$

Dada una fdp, es posible calcular varias magnitudes que resumen las propiedades de la variable aleatoria. La más común es la **media**, la medida más conocida del valor medio. Si desea promediar las puntuaciones 85, 89, 93 y 93, probablemente hallará la media, dada por $\frac{85 + 89 + 93 + 93}{4} = 90$.

Nótese que las puntuaciones 85 y 89 tienen frecuencia relativa $\frac{1}{4}$, mientras que 93 tiene frecuencia relativa $\frac{2}{4}$. También se puede calcular la media multiplicando cada valor por su frecuencia relativa y sumando $(85)\frac{1}{4} + (89)\frac{1}{4} + (93)\frac{2}{4} = 90$.

Supongamos ahora que deseamos calcular la altura media de 1.000 personas, cuyos datos de altura se muestran en la tabla.

| Altura | 63″ | 64″ | 65″ | 66″ | 67″ | 68″ | 69″ | 70″ | 71″ | 72″ | 73″ | 74″ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Número | 23 | 32 | 61 | 94 | 133 | 153 | 155 | 134 | 96 | 62 | 31 | 26 |

Sería terrible escribir las alturas de las 1.000 personas, sumarlas y dividir entre 1.000. Es mucho más sencillo multiplicar cada valor por su frecuencia relativa y sumar los resultados. De esta forma, el cálculo es

$$m = (63)\frac{23}{1.000} + (64)\frac{32}{1.000} + (65)\frac{61}{1.000} + (66)\frac{94}{1.000} + (67)\frac{133}{1.000} + \ldots + (74)\frac{26}{1.000}$$

$$= 68{,}523.$$

Denotemos las alturas por $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y sea $f(x_i)$ la frecuencia relativa (probabilidad) correspondiente. Entonces, la media adopta la forma

$$m = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + x_3 f(x_3) + \ldots + x_{12} f(x_{12}).$$

Si las alturas en la tabla se hubieran dado cada media pulgada o cada décimo de pulgada, calcularíamos la media multiplicando cada $x_i$ por la correspondiente probabilidad $f(x_i)\,\Delta x$, donde $\Delta x$ es la fracción de pulgada entre datos de altura sucesivos. La media tendría entonces la forma

$$m = [x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + x_3 f(x_3) + \ldots + x_n f(x_n)]\,\Delta x = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)\,\Delta x,$$

donde $n$ es el número de datos. Al crecer $n$ y tender $\Delta x$ a cero, la suma de Riemann tiende a la integral $\int_a^b xf(x)\,dx$. Eso sugiere la siguiente definición.

---

**Definición 7.2**

La **media** $\mu$ de una variable aleatoria con fdp $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$ viene dada por

$$\mu = \int_a^b xf(x)\,dx. \tag{7.2}$$

---

La media no es la única medida estadística del *promedio* de los valores de una variable aleatoria. Otra medida alternativa es la **mediana**, el valor de $x$ tal que la mitad de los valores es inferior o igual a él y la otra mitad superior a él. En el próximo ejemplo, y en los ejercicios, exploramos situaciones en las que cada medida proporciona una indicación, mejor o peor, del promedio de una variable aleatoria.

**Ejemplo 7.5** **Edad media y mediana de un grupo de células**

Supongamos que la edad, en días, de un tipo de organismos unicelulares tiene una fdp $f(x) = (\ln 2)e^{-kx}$, con $k = \frac{1}{2}\ln 2$. El dominio es $0 \le x \le 2$ (suponemos que a los 2 días cada célula se divide en dos células hijas). Hallar (a) la edad media de las células, (b) la proporción de células que son más jóvenes que la media y (c) la mediana de las edades.

**Solución** (a) Según (7.2), la media es

$$\mu = \int_0^2 x \ln 2 e^{-(\ln 2)x/2}\,dx \approx 0{,}88539 \text{ días},$$

donde hemos aproximado la integral numéricamente, ya que de momento no conocemos una primitiva del integrando. Nótese que, aunque la vida de las células está entre 0 y 2 días, la media no es 1. La gráfica de la fdp (figura 5.64) permite comprender por qué la media es menor que 1: las células más jóvenes son más probables que las viejas.

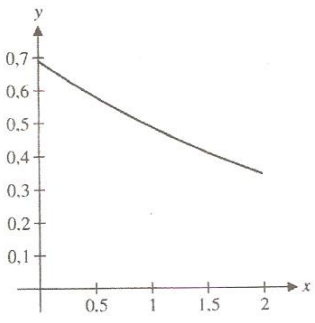



**Figura 5.64**

$y = \ln 2e^{-(\ln 2)x/2}$

(b) La proporción de células más jóvenes que la media es igual a la probabilidad de que una célula elegida al azar sea más joven que la media. Y esta probabilidad viene dada por

$$P(0 \le X \le \mu) = \int_0^{0{,}88539} \ln 2 e^{-(\ln 2)x/2}\,dx \approx 0{,}52848,$$

donde de nuevo hemos aproximado la integral numéricamente. Así, pues, hay un 53% de células más jóvenes que la media. En este caso, la media no es el punto de división al 50% de las probabilidades. En otras palabras, la media no es la mediana.

(c) Para hallar la mediana, tenemos que encontrar una constante $c$ tal que

$$0{,}5 = \int_0^c \ln 2 e^{-(\ln 2)x/2}\,dx.$$

Como una primitiva de $e^{-(\ln 2)x/2}$ es $-\frac{2}{\ln 2}e^{-(\ln 2)x/2}$, se tiene

$$0{,}5 = \int_0^c \ln 2 e^{-(\ln 2)x/2}\,dx$$

$$= \ln 2\left[-\frac{2}{\ln 2}e^{-(\ln 2)x/2}\right]_0^c$$

$$= -2e^{-(\ln 2)c/2} + 2.$$

Restando 2 de ambos lados, queda

$$-1{,}5 = -2e^{-(\ln 2)c/2},$$

y dividiendo entre –2,

$$0{,}75 = e^{-(\ln 2)c/2}.$$

Tomando logaritmos naturales en los dos miembros, resulta

$$\ln 0{,}75 = -(\ln 2)c/2.$$

Finalmente, despejando $c$, obtenemos

$$c = \frac{-2 \ln 0{,}75}{\ln 2}$$

de manera que la mediana es $-2 \ln 0{,}75/\ln 2 \approx 0{,}83$. Ahora podemos concluir que la mitad de las células tienen más de 0,83 días y la otra mitad menos de 0,83 días.

## EJERCICIOS 5.7

1. En el texto hemos dicho que la probabilidad de sacar dos caras al lanzar dos monedas es $\frac{1}{4}$. Si intenta este experimento cuatro veces, explique por qué no siempre sacará dos caras exactamente una vez. Si la probabilidad no da predicciones seguras, ¿cuál es su utilidad? Para responder, discuta la información que aporta el saber que en el anterior experimento la probabilidad de sacar una cara y una cruz es $\frac{1}{2}$ (doble que $\frac{1}{4}$).

2. Suponga que lanza muchas veces dos monedas (o lo simula en un ordenador). Teóricamente, la probabilidad de sacar dos caras es $\frac{1}{4}$. Conforme las tiradas se van realizando en gran número, ¿qué proporción de las veces saldrán dos caras? Haga el experimento y compare los resultados con la predicción teórica.

3. A la vista de las figuras 5.57 y 5.58, describa cómo espera que sea el histograma para un gran número de monedas. Compare con la figura 5.63.

4. La altura de una persona viene determinada por muchos factores hereditarios y circunstanciales (la dieta, por ejemplo). Explicar por qué eso debe producir un histograma parecido al que corresponde al lanzamiento de un gran número de monedas.

**En los ejercicios 5-12, probar que la función dada es una fdp en el intervalo indicado.**

5. $f(x) = 4x^3$, $[0, 1]$
6. $f(x) = \frac{3}{8}x^2$, $[0, 2]$
7. $f(x) = x + 2x^3$, $[0, 1]$
8. $f(x) = \frac{3}{2}x^2$, $[-1, 1]$
9. $f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sen} x$, $[0, \pi]$
10. $f(x) = \cos x$, $[0, \pi/2]$
11. $f(x) = e^{-x/2}$, $[0, \ln 4]$
12. $f(x) = \frac{1}{4 - 8/e}xe^{-x/2}$, $[0, 2]$

**En los ejercicios 13-18, hallar un valor de $c$ tal que $f(x)$ sea una fdp en el intervalo especificado.**

13. $f(x) = cx^3$, $[0, 1]$
14. $f(x) = cx + x^2$, $[0, 1]$
15. $f(x) = ce^{-4x}$, $[0, 1]$
16. $f(x) = ce^{-x/2}$, $[0, 2]$
17. $f(x) = 2ce^{-cx}$, $[0, 2]$
18. $f(x) = 2ce^{-cx}$, $[0, 4]$

**En los ejercicios 19-22, usar la fdp del ejemplo 7.2 para hallar la probabilidad de que la altura de un varón elegido al azar en Estados Unidos esté en el rango indicado.**

19. Entre 5′10″ y 6′.
20. Entre 6′6″ y 6′10″.
21. Entre 7′ y 10′.
22. Entre 2′ y 5′.

**En los ejercicios 23-26, sabiendo que la vida de un tipo de lámparas tiene una fdp exponencial $f(x) = 6e^{-6x}$ (con $x$ medido en años), calcular la probabilidad de que una lámpara dure:**

23. Menos de 3 meses.
24. Menos de 6 meses.
25. Entre 1 y 2 años.
26. Entre 3 y 10 años.

**En los ejercicios 27-30, sabiendo que la vida de un tipo de lámparas tiene una fdp exponencial $f(x) = 8e^{-8x}$ (con $x$ medido en años), calcular la probabilidad de que una lámpara dure:**

27. Entre 1 y 2 meses.
28. Entre 5 y 6 meses.
29. Menos de 6 meses.
30. Más de 6 meses.

**En los ejercicios 31-34, suponemos que la vida de un cierto tipo de organismo tiene la fdp $f(x) = 4xe^{-2x}$.**

31. Hallar la probabilidad de que un organismo viva menos de 1 año.
32. Hallar la probabilidad de que un organismo viva entre 1 y 2 años.
33. Calcular la vida media ($0 \le x \le 10$).
34. Representar la fdp y comparar su máximo valor con la media.

**En los ejercicios 35-42, hallar (a) la media y (b) la mediana de la variable aleatoria con fdp dada.**

35. $f(x) = 3x^2$, $0 \le x \le 1$
36. $f(x) = 4x^3$, $0 \le x \le 1$
37. $f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sen} x$, $0 \le x \le \pi$
38. $f(x) = \cos x$, $0 \le x \le \pi/2$
39. $f(x) = \frac{1}{2}(\ln 3)e^{-kx}$, $k = \frac{1}{3}\ln 3$, $0 \le x \le 3$
40. $f(x) = \frac{1}{3}(\ln 4)e^{-kx}$, $k = \frac{1}{4}\ln 4$, $0 \le x \le 4$
41. $f(x) = \dfrac{4}{1 - e^{-4}}\, e^{-4x}$, $0 \le x \le 1$
42. $f(x) = \dfrac{6}{1 - e^{-6}}\, e^{-6x}$, $0 \le x \le 1$
43. Determinar $c$ de modo que $f(x) = ce^{-4x}$ sea una fdp en el intervalo $[0, b]$ con $b > 0$. ¿Qué ocurre con $c$ cuando $b \to \infty$?
44. Para la fdp del ejercicio 43, hallar la media exactamente (usar un PCS para encontrar la primitiva). Al crecer $b$, ¿qué sucede con la media?
45. Repetir los ejercicios 43 y 44 con $f(x) = ce^{-6x}$.
46. A la vista de los resultados de los ejercicios 43-45, conjeturar los valores de $c$ y de la media cuando $b \to \infty$, para $f(x) = ce^{-ax}$, $a > 0$.
47. La tabla muestra las probabilidades de obtener un cierto número de caras al lanzar ocho monedas. Usar el principio de adición para hallar la probabilidad de cada uno de los sucesos que se especifican.

| Número de caras | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| Probabilidad | $\frac{1}{256}$ | $\frac{8}{256}$ | $\frac{28}{256}$ | $\frac{56}{256}$ | $\frac{70}{256}$ |

| Número de caras | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|
| Probabilidad | $\frac{56}{256}$ | $\frac{28}{256}$ | $\frac{8}{256}$ | $\frac{1}{256}$ |

(a) tres o menos caras
(b) más caras que cruces
(c) todo caras o todo cruces
(d) un número impar de caras

48. En una versión del juego keno el jugador elige 10 números entre el 1 y el 80. Después se sacan al azar 20 números entre el 1 y el 80. La ganancia del jugador depende de cuántos números ha acertado. Usar las probabilidades dadas (redondeadas a 4 dígitos) para hallar la probabilidad de cada uno de los sucesos indicados. (Para ganar han de coincidir al menos 5 de los números elegidos. Con una puesta de 2 euros, a partir de 6 aciertos se gana 40 euros o más).

| Números seleccionados | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| Probabilidad | 0,0458 | 0,1796 | 0,2953 | 0,2674 | 0,1473 |

| Números seleccionados | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Probabilidad | 0,0514 | 0,0115 | 0,0016 | 0,0001 | 0,0 | 0,0 |

(a) ganar (al menos 5 aciertos)
(b) perder (4 o menos aciertos)
(c) ganar 40 euros o más (6 o más aciertos)
(d) 3 o 4 aciertos

49. En la World Series de béisbol, dos equipos juegan partidos hasta que alguno de ellos gana cuatro. Supongamos que el equipo

A tiene probabilidad 0,6 de ganar en cada partido. La tabla muestra las probabilidades para los diversos registros del equipo A. Hallar la probabilidad de los sucesos indicados.

| Gan/Perd | 0/4 | 1/4 | 2/4 | 3/4 |
|---|---|---|---|---|
| Probabilidad | 0,0256 | 0,0615 | 0,0922 | 0,1106 |

| Gan/Perd | 4/3 | 4/2 | 4/1 | 4/0 |
|---|---|---|---|---|
| Probabilidad | 0,1659 | 0,2073 | 0,2073 | 0,1296 |

(a) El equipo A gana la World Series
(b) El equipo B gana la World Series
(c) Un equipo gana los cuatro primeros partidos
(d) Se juegan 6 o 7 partidos

50. Un jugador de baloncesto encesta el 70% de tiros libres. La tabla muestra las probabilidades en una serie de tres lanzamientos. Hallar la probabilidad de cada uno de los sucesos indicados.

| Aciertos | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| Probabilidad | 0,027 | 0,189 | 0,441 | 0,343 |

(a) Encesta 2 o 3 (b) Encesta al menos 1

51. En todos los tiempos se han producido extinciones de especies animales, aunque extinciones en masa, como las de los dinosaurios, son raras. La evidencia fósil indica que la probabilidad de que se extinga un porcentaje $p$ $(1 < p < 100)$ de las especies en un período de 4 millones de años es aproximadamente $e(p) = cp^{-2}$ para alguna constante $c$. Hallar el valor de $c$ para el cual $e(p)$ es una fdp y estimar la probabilidad de que en un período de 4 millones de años se extingan entre un 60% y un 70% de las especies.

52. En el ejemplo 7.5 hallamos la mediana, llamada también el segundo cuartil. Hallar ahora el primer y tercer cuartil, es decir, las edades tales que las probabilidades de ser más viejo sean 0,25 y 0,75, respectivamente.

53. La fdp del ejemplo 7.2 es la fdp de una variable aleatoria distribuida normalmente. La media se ve fácilmente en $f(x)$: en el ejemplo 7.2 la media es 68. La media y un número llamado la **desviación típica** caracterizan una distribución normal. Como indica la figura 5.63, la gráfica de la fdp tiene un máximo en la media y dos puntos de inflexión, uno a cada lado del máximo. La desviación típica es la distancia de la media a un punto de inflexión. Calcular la desviación típica en el ejemplo 7.2.

54. En el ejercicio 53, denotando la media por $\mu$ y la desviación típica por $\sigma$, hallar la probabilidad de que la altura de una persona esté entre $\mu - \sigma$ y $\mu + \sigma$ (es decir, dentro de una desviación típica respecto de la media). Calcular la probabilidad de que una altura esté dentro de dos desviaciones típicas respecto de la media (entre $\mu - 2\sigma$ y $\mu + 2\sigma$) y lo mismo con tres desviaciones típicas. Estas probabilidades son las mismas para cualquier distribución normal. Basta conocer la media y la desviación típica de una variable aleatoria normal para conocer esas probabilidades.

55. La teoría matemática del caos indica que los números generados por algoritmos muy simples pueden tener apariencia aleatoria. Los investigadores analizan diversas gráficas para distinguir la aleatoriedad del caos determinista. Por ejemplo, iterar la función $f(x) = 4x(1 - x)$ partiendo de $x = 0{,}1$. Es decir, calcular $f(0{,}1) = 0{,}36$, $f(0{,}36) = 0{,}9216$, $f(0{,}9216) = 0{,}289$ y así sucesivamente. Iterar 50 veces y anotar cuántas veces aparece cada dígito en primera posición (hasta ahora hemos obtenido un 1, un 3, un 9 y un 2). Si el proceso fuera verdaderamente aleatorio, los dígitos tendrían que aparecer aproximadamente el mismo número de veces. ¿Ocurre así? Para desenmascarar el carácter no aleatorio del proceso, hay que dibujar su **plano de fases**. A tal fin, tomar las iteraciones consecutivas como puntos $(x, y)$ y marcar los puntos en un plano. Los tres primeros puntos son (0,1, 0,36), (0,36, 0,9216) y (0,9216, 0,289). Describir la pauta (no aleatoriedad) que aparece, identificándola con la mayor precisión posible.

56. Un muelle oscila arriba y abajo con una posición dada por $u(t) = \operatorname{sen} t$. Si miramos su posición en un instante $t$ elegido al azar, ¿qué es más probable: encontrarlo cerca de un extremo ($u = 1$ o $u = -1$) o cerca del centro ($u = 0$)? La fdp es inversamente proporcional a la rapidez (¿por qué es razonable esto?). Probar que la rapidez viene dada por $|\cos t| = \sqrt{1 - u^2}$, de modo que la fdp es $f(u) = c/\sqrt{1 - u^2}$, $-1 \le u \le 1$, para alguna constante $c$. Demostrar que $c = 1/\pi$, representar $f(x)$ y describir qué posiciones del muelle son más probables.

# EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO

**En los ejercicios 1-8, hallar el área (exacta, si es posible, o aproximada).**

1. El área entre $y = x^2 + 2$ e $y = \text{sen } x$ en $0 \le x \le \pi$
2. El área entre $y = e^x$ e $y = e^{-x}$ en $0 \le x \le 1$
3. El área entre $y = x^3$ e $y = 2x^2 - x$
4. El área entre $y = x^2 - 3$ e $y = -x^2 + 5$
5. El área entre $y = e^{-x}$ e $y = 2 - x^2$
6. El área entre $x = y^2$ e $y = 1 - x$
7. El área de la región acotada por $y = x^2$, $y = 2 - x$ e $y = 0$
8. El área de la región acotada por $y = x^2$, $y = 0$ y $x = 2$
9. Una ciudad tiene hoy 10.000 habitantes, y en ella se producen $10 + 2t$ nacimientos al año y $4 + t$ defunciones al año. Calcular su población a los 6 años.
10. A partir de los datos de la tabla, estimar el área entre las curvas en $0 \le x \le 2$.

| $x$ | 0,0 | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 1,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 3,2 | 3,6 | 3,8 | 3,7 | 3,2 | 3,4 |
| $g(x)$ | 1,2 | 1,5 | 1,6 | 2,2 | 2,0 | 2,4 |

| $x$ | 1,2 | 1,4 | 1,6 | 1,8 | 2,0 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 3,0 | 2,8 | 2,4 | 2,9 | 3,4 |
| $g(x)$ | 2,2 | 2,1 | 2,3 | 2,8 | 2,4 |

11. Hallar el volumen del sólido cuyas secciones tienen área $A(x) = \pi(3 + x)^2$ en $0 \le x \le 2$.
12. Una piscina, vista desde arriba, tiene la forma descrita por $y = \pm(5 + x)$ en $0 \le x \le 2$. Su profundidad es $4 + x$. Calcular su volumen.
13. La tabla da las áreas de las secciones de un objeto sumergido. Estimar su volumen.

| $x$ | 0 | 0,4 | 0,8 | 1,2 | 1,6 | 2,0 | 2,4 | 2,8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A(x)$ | 0,4 | 1,4 | 1,8 | 2,0 | 2,1 | 1,8 | 1,1 | 0,4 |

**En los ejercicios 14-18, calcular el volumen del sólido de revolución que se especifica.**

14. La región acotada por $y = x^2$, $y = 0$ y $x = 1$ girada en torno a (a) el eje $x$; (b) el eje $y$; (c) $x = 2$; (d) $y = -2$
15. La región acotada por $y = x^2$ e $y = 4$ girada en torno a (a) el eje $x$; (b) el eje $y$; (c) $x = 2$; (d) $y = -2$
16. La región acotada por $y = x$, $y = 2x$ y $x = 2$ girada en torno a (a) el eje $x$; (b) el eje $y$; (c) $x = -1$; (d) $y = 4$
17. La región acotada por $y = x$, $y = 2 - x$ e $y = 0$ girada en torno a (a) el eje $x$; (b) el eje $y$; (c) $x = -1$; (d) $y = 4$
18. La región acotada por $x = 4 - y^2$ y $x = y^2 - 4$ girada en torno a (a) el eje $x$; (b) el eje $y$; (c) $x = 4$; (d) $y = 4$

**En los ejercicios 19-22, escribir una integral para la longitud de arco y estimar su valor numéricamente.**

19. La porción de $y = x^4$ en $-1 \le x \le 1$
20. La porción de $y = x^2 + x$ en $-1 \le x \le 0$
21. La porción de $y = e^{x/2}$ en $-2 \le x \le 2$
22. La porción de $y = \text{sen } 2x$ en $0 \le x \le \pi$

**En los ejercicios 23 y 24, escribir una integral para el área de la superficie y estimar su valor numéricamente.**

23. La superficie generada por $y = 1 - x^2$, $0 \le x \le 1$, al girar en torno al eje $x$.
24. La superficie generada por $y = x^3$, $0 \le x \le 1$, al girar en torno al eje $x$.

**En los ejercicios 25-32 ignorar la resistencia del aire.**

25. Un nadador salta desde una palanca a 64 pies de altura. ¿Cuál es su velocidad de impacto en el agua?
26. Si el nadador del ejercicio 25 tuviera una velocidad inicial hacia arriba de 4 pies/s, ¿cuál sería su velocidad de impacto en el agua?
27. Se lanza un objeto desde el suelo con un ángulo de 20° y una velocidad inicial de 48 pies/s. Hallar el tiempo que está en el aire y su alcance horizontal.
28. Repetir el ejercicio 27 si el objeto es lanzado desde 6 pies de altura.
29. Se lanza un balón desde una altura de 6 pies con velocidad inicial de 80 pies/s y un ángulo de 8°. Una persona está a 40 yardas en la dirección del lanzamiento. ¿Podrá atraparlo?
30. Repetir el ejercicio 29 para un ángulo de 24°. Por prueba y error, hallar el rango de ángulos que permite atrapar el balón.
31. Calcular la velocidad inicial necesaria para lanzar un objeto a 128 pies de altura. Hallar la velocidad de impacto en el suelo.
32. Un avión con ayuda humanitaria vuela a 120 pies de altura con una velocidad horizontal de 100 pies/s. ¿A qué distancia del punto de destino en el suelo tiene que dejar caer un paquete de víveres?

33. Una fuerza de 60 libras estira un muelle 1 pie. Hallar el trabajo realizado para estirar el muelle 8 pulgadas a partir de su longitud natural.

34. Un motor ejerce una fuerza de $800 + 2x$ libras cuando el automóvil está en la posición $x$ (millas). Calcular el trabajo realizado para mover el automóvil desde $x = 0$ hasta $x = 8$.

35. Calcular la masa y el centro de masa de un objeto de densidad $\rho(x) = x^2 - 2x + 8$ en $0 \le x \le 4$. Explicar por qué el centro de masa no está en $x = 2$.

36. Calcular la masa y el centro de masa de un objeto de densidad $\rho(x) = x^2 - 2x + 8$ en $0 \le x \le 2$. Explicar por qué el centro de masa no está en $x = 1$.

37. Una presa tiene la forma de un trapecio de 80 pies de altura. Su anchura en la parte superior es 60 pies y en la inferior 140 pies. Calcular la máxima fuerza hidrostática que debe soportar.

38. Una ventana de observación submarina es un rectángulo de 20 pies de anchura y se extiende desde 5 pies hasta 10 pies de profundidad. Calcular la máxima fuerza hidrostática que debe soportar.

39. La fuerza ejercida en diversos instantes por un bate sobre una pelota viene dada en la tabla. Con esos datos, estimar el impulso. Si la pelota (de masa $m = 0{,}01$ slugs) tiene una velocidad de 120 pies/s antes del golpe, estimar su velocidad tras el golpe.

| $t$ (s) | 0 | 0,0001 | 0,0002 | 0,0003 | 0,0004 |
|---|---|---|---|---|---|
| $F(t)$ (lb) | 0 | 800 | 1.600 | 2.400 | 3.000 |

| $t$ (s) | 0,0005 | 0,0006 | 0,0007 | 0,0008 |
|---|---|---|---|---|
| $F(t)$ (lb) | 3.600 | 2.200 | 1.200 | 0 |

40. Si un muro ejerce una fuerza de $f(t) = 3.000t\,(2 - t)$ libras sobre un automóvil, en $0 \le t \le 2$, hallar el impulso. Si el automóvil (de masa $m = 100$ slugs) queda en reposo tras la colisión, ¿qué velocidad llevaba en el momento del impacto?

41. Probar que $f(x) = x + 2x^3$ es una fdp en el intervalo $[0, 1]$.

42. Probar que $f(x) = \frac{8}{3}e^{-2x}$ es una fdp en el intervalo $[0, \ln 2]$.

43. Determinar para qué valor de $c$ es $f(x) = \frac{c}{x^2}$ una fdp en el intervalo $[1, 2]$.

44. Determinar para qué valor de $c$ es $f(x) = ce^{-2x}$ una fdp en el intervalo $[0, 4]$.

45. La vida de una lámpara tiene fdp $f(x) = 4e^{-4x}$ ($x$ en años). Calcular la probabilidad de que una lámpara dure (a) menos de 6 meses, (b) entre 6 meses y un año.

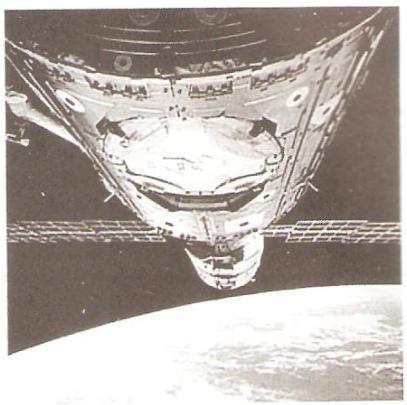
46. La vida de un organismo tiene fdp $f(x) = 9xe^{-3x}$ ($x$ en años). Calcular la probabilidad de que un organismo viva (a) menos de 2 meses, (b) entre 3 meses y un año.

47. Calcular (a) la media y (b) la mediana de una variable aleatoria con fdp $f(x) = x + 2x^3$ en el intervalo $[0, 1]$.

48. Calcular (a) la media y (b) la mediana de una variable aleatoria con fdp $f(x) = \frac{8}{3}e^{-2x}$ en el intervalo $[0, \ln 2]$.

49. Como se indicó en la sección 5.5, se pueden deducir fórmulas generales para muchas magnitudes importantes en el movimiento de proyectiles. Para un objeto lanzado desde el suelo con ángulo $\theta_0$ y velocidad inicial $v_0$ pies/s, hallar el alcance horizontal $R$ (pies) y usar la identidad trigonométrica $\operatorname{sen}(2\theta_0) = 2 \operatorname{sen}\theta_0 \cos\theta_0$ para demostrar que $R = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}(2\theta_0)}{3}$. Concluir que el máximo alcance se consigue con $\theta_0 = \pi/4$ (45°).

50. Siguiendo el ejercicio 49, supongamos que el suelo está inclinado un ángulo de $A°$ respecto de la horizontal. Si $A > 0$ (el proyectil se lanza cuesta arriba), explicar por qué el alcance máximo se alcanzará con un ángulo mayor que 45°. Si $A < 0$ (el proyectil se lanza cuesta abajo), explicar por qué el alcance máximo se alcanzará con un ángulo menor que 45°. Para determinar el valor exacto del ángulo óptimo, empezamos representando el suelo por la recta $y = (\tan A)x$. Probar que el proyectil llega al suelo en el instante $t = v_0 \dfrac{\operatorname{sen}\theta_0 - \tan A \cos\theta_0}{16}$. Evaluar $x(t)$ en ese valor de $t$ y usar una identidad trigonométrica para sustituir $\operatorname{sen}\theta_0 \cos A - \operatorname{sen} A \cos\theta_0$ por $\operatorname{sen}(\theta_0 - A)$. A continuación, usar otra identidad trigonométrica para sustituir $\cos\theta_0 \operatorname{sen}(\theta_0 - A)$ por $\operatorname{sen}(2\theta_0 - A) - \operatorname{sen} A$. En este momento, el único término en $\theta_0$ será $\operatorname{sen}(2\theta_0 - A)$. Con el fin de hacer máximo el alcance, maximizar ese término tomando $\theta_0 = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}A$.



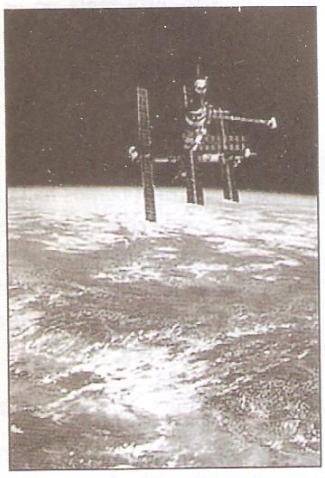
# CAPÍTULO 6

# EXPONENCIALES, LOGARITMOS Y OTRAS FUNCIONES TRASCENDENTES

La estación espacial internacional es uno de los proyectos más ambiciosos emprendidos en ingeniería. A pesar de las dificultades evidentes, un proyecto de construcción en el espacio ofrece ciertas ventajas respecto de la construcción en la Tierra. La ingravidez y la ausencia de atmósfera reducen la necesidad de estructuras muy resistentes, una cortapisa fundamental en la Tierra. De hecho, la estación espacial internacional ¡no podría soportar ni siquiera su propio peso si se construyera en la Tierra!

No obstante, el diseño de la estación espacial ha planteado retos abundantes. Por ejemplo, las vigas que sostienen sus paneles solares son largos, relativamente finos y flexibles. Eso significa que su longitud y su flexibilidad pueden amplificar cualquier ligero temblor hasta convertirla, por resonancia, en una vibración peligrosa. En consecuencia, hay que prever un sistema que asegure la estabilidad de la estructura. En este aspecto del diseño de la estación espacial internacional, el Cálculo desempeña un papel crítico.

Una forma de pensar en ese problema de estabilidad consiste en imaginarse uno mismo manejando una palanca de control. Al moverla, aplicamos fuerza en una de las uniones de la viga. El objetivo es aplicar las fuerzas adecuadas para mantener la viga sin vibración. Por ejemplo, si la viga empieza a moverse hacia la izquierda, debemos mover la palanca a la derecha, aplicando una fuerza opuesta. Si miramos este proceso como una función matemática, estamos introduciendo un valor de entrada (la fuerza) que determina un valor de salida (el movimiento de la viga). Así que estamos tratando de resolver un **problema inverso**: conocemos la salida deseada (estabilidad) y hemos de hallar la entrada correcta (fuerza) que la produce. Discutiremos las funciones inversas en la sección 6.2



Estación espacial internacional.

El análisis de los ingenieros sobre la estabilidad de una viga empieza por una **ecuación diferencial**, que incluye a una función desconocida y a una o más de sus

derivadas. Una solución de una ecuación diferencial es una función (en nuestro caso, una función que describe el movimiento de la viga). Muy a menudo, las soluciones de ecuaciones diferenciales involucran funciones exponenciales del tipo $e^{kt}$. De hecho, los casos más simples de vibración en vigas se resuelven en términos de tales funciones.

Por ejemplo, $e^{kt}$ puede representar el desplazamiento de la viga en un punto respecto de su posición en reposo. Si $k < 0$, $e^{kt}$ tiende a 0 cuando $t \to \infty$, lo cual corresponde a una viga estable. Pero si $k > 0$, $e^{kt}$ tiende a $\infty$ cuando $t \to \infty$, lo cual sería una mala noticia para nuestra estación espacial. Por tanto, es preciso asegurarse de que $k < 0$ si deseamos preservar la estructura. Asimismo, es interesante identificar los casos en que $k$ es próximo a 0, ya que un pequeño cambio en $k$ podría convertir el sistema estable en inestable.

En las primeras cuatro secciones de este capítulo presentamos e investigamos con cuidado las propiedades y algunas aplicaciones básicas de las funciones logaritmo natural y exponenciales. Aunque ya las hemos estudiado con anterioridad, su importancia aconseja dedicarles tiempo y esfuerzo adicionales. Muchos problemas interesantes en Ciencia y Tecnología obligan a estudiar ecuaciones diferenciales. Por esa razón introducimos en la sección 6.5 una clase especial de ecuaciones diferenciales que podemos resolver.

En la sección 6.6 introducimos un método simple para aproximar numéricamente soluciones de ecuaciones diferenciales más generales. En las tres últimas secciones de este capítulo se definen algunas funciones nuevas importantes. Las funciones trigonométricas inversas, definidas en las secciones 6.7 y 6.8, aplican el concepto de función inversa (sección 6.2). Las funciones hiperbólicas (sección 6.9) están relacionadas tanto con las exponenciales como con las trigonométricas.

## 6.1 LA FUNCIÓN LOGARITMO NATURAL

El logaritmo natural se definió en el Capítulo 0 como el logaritmo en base $e$, es decir,

$$\ln x = \log_e x,$$

donde $e$ es un (por ahora) misterioso número trascendente $e \approx 2{,}718\ldots$. ¿Por qué lo llamamos *natural*? Una base de logaritmos trascendente parece cualquier cosa menos natural. Es más, no está nada claro por qué razón alguien pudiera estar interesado en una función tan rara. En esta sección responderemos esas dos cuestiones.

En primer lugar, recordemos la regla de las potencias para integrales:

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \text{ en } n \neq -1.$$

Por supuesto, esta regla no es válida para $n = -1$, ya que produciría división entre cero. Supongamos, por un momento, que no hemos definido todavía $\ln x$. En esa circunstancia, ¿qué podríamos decir acerca de

$$\int \frac{1}{x} \, dx?$$

(Recuerde: si bien hemos hallado esta integral en la sección 4.1, fue gracias a la conjetura de que $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$, cosa que no hemos demostrado aún). Por el teorema 4.1 del Capítulo 4 sabemos que la continuidad de $f(x) = \frac{1}{x}$ en $x \neq 0$ implica que debe ser integrable en cualquier intervalo que no contenga a $x = 0$. Lo que ocurre es que no sabemos hallar una primitiva. Ahora bien, por la parte II del teorema fundamental del Cálculo,

$$\int_1^x \frac{1}{t} \, dt$$

es una primitiva de $\frac{1}{x}$ para $x > 0$. A esta función nueva (y que aparece de modo natural) se le llama **logaritmo natural** y se denota por $\ln x$.

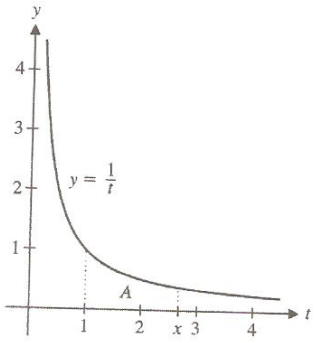



**Figura 6.1a**
$\ln x$ $(x > 1)$.

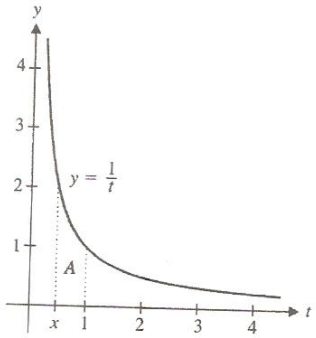



**Figura 6.1b**
$\ln x$ $(0 < x < 1)$.

**Definición 1.1**
Para $x > 0$ definimos la función logaritmo natural como

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt.$$

Más adelante, en este capítulo, veremos que esta definición es consistente con la dada en el Capítulo 0. Antes de nada, vamos a interpretar esta función gráficamente. Nótese que, para $x > 1$, esa integral definida corresponde al área $A$ bajo la curva $y = \frac{1}{t}$ desde 1 hasta $x$ (figura 6.1a). Esto es,

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt = A > 0.$$

Análogamente, para $0 < x < 1$ vemos en la figura 6.1b que para el área $A$ bajo la curva $y = \frac{1}{t}$ desde $x$ hasta 1 se tiene

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt = -\int_x^1 \frac{1}{t}\, dt = -A < 0.$$

Usando la definición 1.1, de la parte II del teorema fundamental del Cálculo se deduce que

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{d}{dx} \int_1^x \frac{1}{t}\, dt = \frac{1}{x}, \text{ para } x > 0. \tag{1.1}$$

La fórmula de derivación (1.1) es la que habíamos conjeturado en la sección 2.6.

**Ejemplo 1.1** **Derivada de un logaritmo**

Hallar la derivada de $\ln(x^3 + 7x^2)$.

**Solución** De la regla de la cadena y (1.1) se sigue que

$$\frac{d}{dx} \ln(x^3 + 7x^2) = \left(\frac{1}{x^3 + 7x^2}\right) \frac{d}{dx}(x^3 + 7x^2)$$

$$= \left(\frac{1}{x^3 + 7x^2}\right)(3x^2 + 14x).$$

En la sección 4.1 habíamos demostrado que para todo $x \neq 0$ se puede extender (1.1) para obtener $\frac{d}{dx} \ln |x| = \frac{1}{x}$. Ésta, a su vez, da la regla de integración usual

$$\boxed{\int \frac{1}{x}\, dx = \ln |x| + c.}$$

En el próximo ejemplo vamos a utilizar esta integral.

**Ejemplo 1.2** **Integrales que contienen logaritmos**

Hallar las integrales (a) $\int \frac{x^2}{x^3 + 7}\, dx$ y (b) $\int \tan x\, dx$.

**Solución** (a) El numerador es casi la derivada del denominador:

$$\frac{d}{dx}(x^3 + 7) = 3x^2.$$

Eso sugiere la sustitución $u = x^3 + 7$, de modo que $du = 3x^2\,dx$. Así se obtiene

$$\int \frac{x^2}{x^3+7}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{x^3+7}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{3}\ln|u| + c$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x^3+7| + c.$$

(b) Reescribimos la integral en términos de sen $x$ y cos $x$:

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx.$$

Aquí, haciendo $u = \cos x$, con lo que $du = -\operatorname{sen} x\,dx$, resulta

$$\int \tan x\,dx = -\int \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{1}{u}\,du$$

$$= -\ln|u| + c = -\ln|\cos x| + c.$$

---

Puesto que $\ln x$ se ha definido como una integral, podemos usar la regla de Simpson (o cualquier otro método numérico de integración) para calcular valores aproximados de la función. Por ejemplo,

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{t}\,dt \approx 0{,}693147$$

$$\ln 3 = \int_1^3 \frac{1}{t}\,dt \approx 1{,}09861.$$

Dejamos estas aproximaciones como ejercicios. (Puede comprobarlas con la tecla ln de una calculadora).

Vamos a esbozar la gráfica de $y = \ln x$. Como ya hemos dicho, el dominio de $f(x) = \ln x$ es $(0, \infty)$. Además, recordemos que

$$\ln x \begin{cases} < 0 & \text{si } 0 < x < 1 \\ = 0 & \text{si } x = 1 \\ > 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

y que

$$f'(x) = \frac{1}{x} > 0, \quad \text{para } x > 0,$$

así que $f$ es creciente en todo su dominio. Por otra parte,

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0, \quad \text{para } x > 0,$$

y, en consecuencia, la gráfica es cóncava hacia abajo en todo su dominio. Es fácil (se deja como ejercicio), usando la regla de Simpson o la de los trapecios, conjeturar que

$$\lim_{x \to \infty} \ln x = \infty \tag{1.2}$$

y

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \tag{1.3}$$

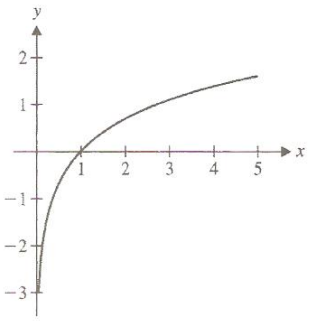



**Figura 6.2**
$y = \ln x$.

Postponemos la demostración de (1.2) hasta después del teorema 1.1. La de (1.3) se deja como ejercicio. La gráfica puede verse en la figura 6.2

Falta explicar por qué esta función debe llamarse *logaritmo*. La razón es bien simple: satisface todas las propiedades que cumplen los demás logaritmos. Y ya que $\ln x$ se comporta igual que los demás logaritmos, la llamamos (¿cómo si no?) logaritmo. El próximo teorema resume todo esto.

---

**Teorema 1.1**
Para cualesquiera números reales $a$, $b > 0$ y cualquier número racional $r$,

(i) $\ln 1 = 0$
(ii) $\ln(ab) = \ln a + \ln b$
(iii) $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
(iv) $\ln(a^r) = r \ln a$.

---

**Demostración**
(i) Por definición,

$$\ln 1 = \int_1^1 \frac{1}{t}\, dt = 0.$$

(ii) Por la definición,

$$\ln(ab) = \int_1^{ab} \frac{1}{t}\, dt = \int_1^a \frac{1}{t}\, dt + \int_a^{ab} \frac{1}{t}\, dt,$$

según la parte (iv) del teorema 4.2 de la sección 4.4. En la última integral hacemos la sustitución $u = \frac{t}{a}$, con lo que $du = \frac{1}{a}\, dt$. Finalmente, los límites de integración deben ser cambiados a la nueva variable (cuando $t = a$ es $u = \frac{a}{a} = 1$ y cuando $t = ab$ es $u = \frac{ab}{a} = b$). Por tanto,

$$\ln(ab) = \int_1^a \frac{1}{t}\, dt + \int_a^{ab} \underbrace{\frac{a}{t}}_{\frac{1}{u}} \underbrace{\frac{1}{a}\, dt}_{du}$$

$$= \int_1^a \frac{1}{t}\, dt + \int_1^b \frac{1}{u}\, du = \ln a + \ln b. \quad \text{Definición 1.1.}$$

(iv) Se tiene

$$\frac{d}{dx} \ln(x^r) = \frac{1}{x^r} \frac{d}{dx} x^r \quad \text{Por (1.1) y la regla de la cadena.}$$

$$= \frac{1}{x^r} r x^{r-1} = \frac{r}{x}. \quad \text{Regla de las potencias.}$$

Análogamente,

$$\frac{d}{dx} [r \ln x] = r \frac{d}{dx} (\ln x) = \frac{r}{x}.$$

Como $\ln(x^r)$ y $r \ln x$ tienen la misma derivada, del corolario 9.1 de la sección 2.9 se sigue que para todo $x > 0$

$$\ln(x^r) = r \ln x + k$$

para alguna constante $k$. En particular, tomando $x = 1$ encontramos que

$$\ln(1^r) = r \ln 1 + k,$$

donde al ser $1^r = 1$ y $\ln 1 = 0$, se tiene

$$0 = r(0) + k.$$

Así, pues, $k = 0$ y, por tanto, $\ln(x^r) = r \ln x$ para todo $x > 0$.

La parte (iii) se deduce de (ii) y (iv) y se deja como ejercicio.

### Ejemplo 1.3 Reescritura de una expresión logarítmica

Simplificar $\ln \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$, donde $n$ es un entero positivo.

**Solución** Para todo entero $n > 0$,

$$\ln \frac{1}{\sqrt[n]{a}} = \ln(a^{-1/n}) = -\frac{1}{n} \ln a.$$

**Advertencia**

$$\ln \frac{1}{\sqrt[n]{a}} \neq (\ln a)^{-1/n}.$$

(¿Qué falla en esta igualdad?).

Gracias a las propiedades de los logaritmos, las expresiones de algunas derivadas se pueden simplificar, como hacemos en el ejemplo que sigue.

### Ejemplo 1.4 Simplificación de una derivada usando propiedades de los logaritmos

Hallar la derivada de $\sqrt{\dfrac{(x-2)^3}{x^2+5}}$

**Solución** En lugar de derivar directamente por las reglas de la cadena y del cociente, nuestra tarea se simplifica mucho usando las propiedades de los logaritmos. En efecto,

$$\frac{d}{dx} \ln \sqrt{\frac{(x-2)^3}{x^2+5}} = \frac{d}{dx} \ln \left[ \frac{(x-2)^3}{x^2+5} \right]^{1/2}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \ln \left[ \frac{(x-2)^3}{x^2+5} \right] \qquad \text{Teorema 1.1 (iv).}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{d}{dx} [\ln(x-2)^3 - \ln(x^2+5)] \qquad \text{Teorema 1.1 (iii).}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{d}{dx} [3 \ln(x-2) - \ln(x^2+5)] \qquad \text{Teorema 1.1 (iv).}$$

$$= \frac{1}{2} \left[ 3 \left( \frac{1}{x-2} \right) \frac{d}{dx}(x-2) - \left( \frac{1}{x^2+5} \right) \frac{d}{dx}(x^2+5) \right] \qquad \text{Por (1.1) y la regla de la cadena.}$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{3}{x-2} - \frac{2x}{x^2+5} \right).$$

Podríamos haber derivado la expresión directamente. Inténtelo si lo desea. Es equivalente, pero no resulta agradable (hay que aplicar varias veces la regla de la cadena y una vez la del cociente; no diga que no se lo advertimos). Moraleja: las propiedades de los logaritmos pueden librarnos de complicaciones indeseables. Úselas cuando sea oportuno.

**Ejemplo 1.5** **Comportamiento asintótico de $\ln x$**

Haciendo uso de las propiedades de los logaritmos expuestas en el teorema 1.1, demostrar que

$$\lim_{x \to \infty} \ln x = \infty.$$

**Solución** Para verificarlo, recordemos en primer lugar que $\ln 3 \approx 1{,}0986 > 1$. Haciendo $x = 3^n$ tenemos, por las reglas de los logaritmos, para todo entero $n$:

$$\ln 3^n = n \ln 3.$$

Como $x = 3^n \to \infty$, cuando $n \to \infty$, continuamos con

$$\lim_{x \to \infty} \ln x = \lim_{n \to \infty} \ln 3^n = \lim_{n \to \infty} (n \ln 3) = +\infty,$$

donde la primera igualdad se debe a que $\ln x$ es una función estrictamente creciente.

# EJERCICIOS 6.1

1. Usar la definición de $\ln x$ como una integral (interpretada como área) para explicar por qué es razonable que $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ y $\lim_{x \to \infty} \ln x = \infty$.

2. Usar la definición de $\ln x$ como una integral (interpretada como área) para explicar por qué la gráfica de $\ln x$ es cóncava hacia abajo.

**En los ejercicios 3-6, expresar el número como una integral y dibujar un esbozo del área correspondiente.**

3. $\ln 4$
4. $\ln 5$
5. $\ln 8{,}2$
6. $\ln 24$

**En los ejercicios 7-14, derivar la función.**

7. $\ln 4x$
8. $\ln(x^2)$
9. $\ln(\cos x)$
10. $\ln(\sec x)$
11. $x \ln x$
12. $\dfrac{\ln x}{x}$
13. $\ln(x^2 + 2)$
14. $\ln(\sec x + \tan x)$

**En los ejercicios 15-18, usar las propiedades de los logaritmos para reescribir la expresión como un único logaritmo.**

15. $\ln \sqrt{2} + 3 \ln 2$
16. $\ln 8 - 2 \ln 2$
17. $2 \ln 3 - \ln 9 + \ln \sqrt{3}$
18. $2 \ln \left(\frac{1}{3}\right) - \ln 3 + \ln \left(\frac{1}{9}\right)$

**En los ejercicios 19-32, hallar la integral.**

19. $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2 + 1}\, dx$
20. $\displaystyle\int \frac{3x^3}{x^4 + 5}\, dx$
21. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\, dx$
22. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\, dx$
23. $\displaystyle\int \frac{x + 1}{x^2 + 2x - 1}\, dx$
24. $\displaystyle\int \frac{x^2 - 1}{x^3 - 3x + 5}\, dx$
25. $\displaystyle\int \frac{1}{x \ln x}\, dx$
26. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}\,(\sqrt{x} + 1)}\, dx$
27. $\displaystyle\int \frac{(\ln x + 1)^2}{x}\, dx$
28. $\displaystyle\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\, dx$
29. $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{x + 1}\, dx$
30. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x^3 + 1}\, dx$
31. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x^3 - 4}\, dx$
32. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{x}\, dx$

**En los ejercicios 33-38, hallar la derivada o la integral, haciendo uso de las propiedades de los logaritmos cuando sea necesario.**

33. $\dfrac{d}{dx}\left(\ln \sqrt{x^2 + 1}\right)$
34. $\dfrac{d}{dx}\left[\ln(x^5 \operatorname{sen} x \cos x)\right]$
35. $\dfrac{d}{dx}\left(\ln \dfrac{x^4}{x^5 + 1}\right)$
36. $\dfrac{d}{dx}\left(\ln \sqrt{\dfrac{x^3}{x^5 + 1}}\right)$

37. $\int \frac{1}{x \ln x^2}\, dx$

38. $\int \frac{\operatorname{sen}(\ln x^3)}{x}\, dx$

**En los ejercicios 39-44, determinar los intervalos en los que la función es creciente o decreciente, cóncava hacia arriba o hacia abajo y representar su gráfica.**

39. $f(x) = \ln(x - 2)$

40. $f(x) = \ln(3x + 5)$

41. $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

42. $f(x) = \ln(x^3 + 1)$

43. $f(x) = x \ln x$

44. $f(x) = x^2 \ln x$

45. Usar la propiedad (ii) del teorema 1.1 para demostrar la propiedad (iii): $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$.

46. Partiendo de $e^x = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, probar que

$$x = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{\ln x}{n}\right)^n$$

y que, por tanto, $\ln x = \lim_{n \to \infty} [n(x^{1/n} - 1)]$.

47. Un cable de telégrafo tiene un núcleo interior y una cubierta exterior que lo rodea. Si $x$ denota el radio del núcleo interior dividido entre el radio exterior, la velocidad de transmisión es proporcional a $s(x) = x^2 \ln(1/x)$. ¿Qué valor de $x$ hace máxima la velocidad de transmisión?

48. Demostrar la ecuación (1.3).

49. Sea $\pi(x)$ el número de enteros primos menores o iguales que $x$. Por ejemplo, $\pi(6) = 3$, porque 2, 3 y 5 son primos. Se ha demostrado que, para $x$ muy grandes, $\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x}$. Probar que para $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ y $x > 10$, $f'(x) > 0$ y $f''(x) < 0$. Interpretar estos resultados en términos de la distribución de los números primos.

50. Una función especial muy utilizada en las aplicaciones es la **función error**, definida como $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} f(x)$, donde $f(x) = \int_0^x e^{-u^2}\, du$. Explorar la función $f(x)$. ¿Para qué $x$ es $f(x) > 0$? ¿Y $f(x) < 0$? ¿Para cuáles es creciente? ¿Y decreciente? ¿Cóncava hacia arriba? ¿Cóncava hacia abajo? Estimar algunos valores de la función para $x$ grandes. Conjeturar el valor de $\lim_{x \to \infty} f(x)$. Dibujar un esbozo de $f(x)$.

51. Verificar que

$$\int \sec x\, dx = \ln|\sec x + \tan x| + c.$$

(Ayuda: Derivar la primitiva candidata y probar que se obtiene el integrando). Esta integral aparece en la elaboración de los mapas de Mercator. En estos mapas, las líneas de latitud no están uniformemente espaciadas, sino que se colocan de manera tal que las trayectorias de rumbo constante sean rectas en el mapa. (Si se colocan uniformemente espaciadas, una trayectoria de rumbo nordeste constante aparece curvada debido a la curvatura de la Tierra). Sea $R$ el radio medio de la Tierra. Suponiendo que la Tierra es una esfera, la distancia real desde el ecuador hasta un lugar de latitud $b°$ es $\frac{\pi}{180} Rb$. En un mapa de Mercator esa distancia se reescala a $\frac{\pi}{180} R \int_0^b \sec x\, dx$. Tampa, en Florida, tiene latitud 28° norte. Moscú, en Rusia, está a 56° latitud norte. ¿Cuál es el espaciado relativo entre Tampa y Moscú en un mapa de Mercator?

## 6.2 FUNCIONES INVERSAS

La idea de relación inversa es básica en muchos campos científicos, aunque el término se utiliza poco. La cantidad de problemas inversos es inmensa. Por citar un ejemplo, en un electrocardiograma (ECG) los técnicos conectan electrodos al pecho del paciente y usan las medidas de actividad eléctrica en la superficie corporal para extraer información sobre la actividad eléctrica en la superficie del corazón. Esto es un *problema inverso*, ya que el médico intenta determinar qué valor de *entrada* (la actividad eléctrica en la superficie del corazón) causa el valor de *salida* observado (la actividad eléctrica en la superficie del pecho).

El concepto matemático de inverso es análogo al descrito antes. Dada una salida (un valor de una función $f(x)$), queremos conocer la entrada (el valor $x$) que produce esa salida

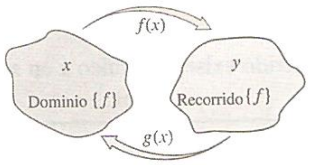



**Figura 6.3**
$g(x) = f^{-1}(x)$.

observada. En otras palabras, dado un $y$ en el recorrido de $f$, hallar $x$ en el dominio de $f$ tal que $y = f(x)$. (Véase la ilustración de la función inversa $g(x)$ en la figura 6.3).

Por ejemplo, sea $f(x) = x^3$. Dado $y = 8$, ¿puede hallar un $x$ tal que $x^3 = 8$? Es decir, ¿puede hallar el valor de $x$ correspondiente a $y = 8$? (figura 6.4). Naturalmente, sabe que la solución es $x = \sqrt[3]{8} = 2$. Y, en general, sabe que si $x^3 = y$, entonces $x = \sqrt[3]{y}$. A la vista de esto, decimos que la función raíz cúbica es la **inversa** de $f(x) = x^3$.

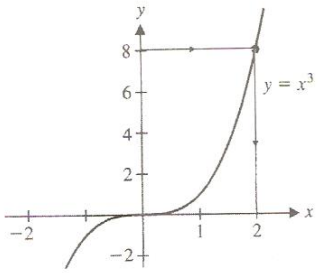



**Figura 6.4**
Búsqueda del valor de $x$ que corresponde a $y = 8$.

### Ejemplo 2.1 Dos funciones que cancelan cada una la acción de la otra

Si $f(x) = x^3$ y $g(x) = x^{1/3}$, probar que

$$f(g(x)) = x \quad \text{y} \quad g(f(x)) = x$$

para todo $x$.

**Solución** Para todo número real $x$ se tiene

$$f(g(x)) = f(x^{1/3}) = (x^{1/3})^3 = x$$

y

$$g(f(x)) = g(x^3) = (x^3)^{1/3} = x.$$

En el ejemplo 2.1, la acción de $f$ deshace la de $g$, y viceversa. Podemos tomar este hecho como definición de funciones inversas, como se detalla a continuación.

### Definición 2.1

Supongamos que $f$ y $g$ tienen dominios respectivos $A$ y $B$, que $f(g(x))$ está definido para todo $x \in B$ y que $g(f(x))$ está definido para todo $x \in A$. Si

$$f(g(x)) = x \text{ para todo } x \in B$$

y

$$g(f(x)) = x \text{ para todo } x \in A,$$

se dice que $g$ es la función **inversa** de $f$, y se escribe $g = f^{-1}$. Equivalentemente, $f$ es la inversa de $g$, escrito $f = g^{-1}$.

### Advertencia

Cuidado con la notación: $f^{-1}(x)$ **no** significa $\dfrac{1}{f(x)}$. La recíproca de $f(x)$ se denota

$$\frac{1}{f(x)} = [f(x)]^{-1}.$$

Muchas funciones familiares no tienen inversa.

### Ejemplo 2.2 Una función sin inversa

Probar que $f(x) = x^2$ no tiene inversa en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

**Solución** Como $f(4) = 16$ y $f(-4) = 16$, hay **dos** valores de $x$ que producen un mismo valor de $y$. Por tanto, si se quiere definir $f^{-1}$, ¿cuál de los dos se toma como $f^{-1}(16)$? En la gráfica de $y = x^2$ (figura 6.5) vemos cuál es el problema: para cada valor $y > 0$ hay **dos** valores $x$ tales que $y = x^2$. Una función así carece de inversa.

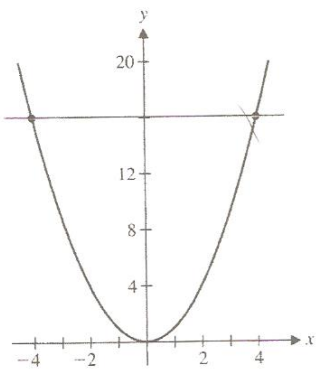



**Figura 6.5**
$y = x^2$.

### Nota 2.1

Puede sentirse la tentación de afirmar que la inversa de $f(x) = x^2$ es $g(x) = \sqrt{x}$. Sin embargo, aunque $f(g(x)) = (\sqrt{x})^2 = x$ para todo $x \geq 0$ (el dominio de $g(x)$), no es cierto en general que $g(f(x)) = \sqrt{x^2} = x$. En efecto, esta última ecuación **sólo** es cierta si $x \geq 0$. Eso sí, la función $f(x) = x^2$, restringida al dominio $x \geq 0$, tiene inversa $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

### Nota 2.2

Una definición equivalente es la siguiente: Una función $f(x)$ es inyectiva si, y sólo si, $f(a) = f(b)$ implica $a = b$. Esta versión suele ser más conveniente en demostraciones que utilizan funciones inyectivas.

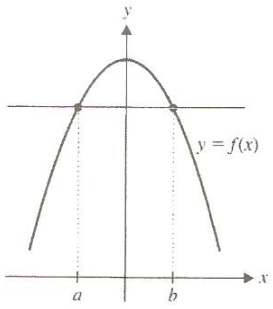



**Figura 6.6a**
$f(a) = f(b)$ con $a \neq b$.
Por tanto, $f$ no pasa el criterio de la recta horizontal, luego no es inyectiva.

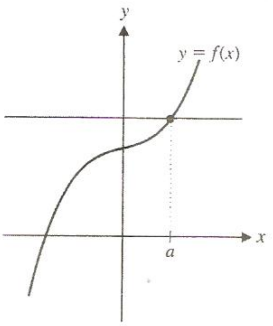



**Figura 6.6b**
Toda recta horizontal corta a la curva en un punto a lo sumo. Así, pues, $f$ pasa el criterio de la recta horizontal, luego es inyectiva.

### Definición 2.2

Una función $f$ es **inyectiva** si, y sólo si, para todo $y$ en su recorrido **existe un** único $x$ en su dominio tal que $y = f(x)$.

Es aconsejable pensar en el concepto de función inyectiva en términos gráficos. Nótese que una función es inyectiva si, y sólo si, toda recta horizontal corta a su gráfica a lo sumo en un punto. Se suele citar esta propiedad como **criterio de la recta horizontal**. Las figuras 6.6a y 6.6b ilustran este hecho. Y puede probarse el teorema que sigue.

### Teorema 2.1

Una función tiene inversa si, y sólo si, es inyectiva.

El teorema garantiza que toda función inyectiva tiene inversa. Lo que no dice es cómo hallarla. Para funciones muy simples, se puede hallar resolviendo ecuaciones.

### Ejemplo 2.3 Cálculo de una función inversa

Hallar la función inversa de $f(x) = x^3 - 5$.

**Solución** Comprobará en los ejercicios que $f$ es inyectiva, de modo que tiene inversa. Nótese que en la gráfica (figura 6.7) no queda claro si $f$ pasa el criterio de la recta horizontal. Para hallar la inversa, escribimos $y = f(x)$ y resolvemos en $x$ (o sea, despejamos la entrada $x$ que produce la salida observada $y$). Se tiene

$$y = x^3 - 5.$$

Sumando 5 y tomando la raíz cúbica obtenemos

$$(y + 5)^{1/3} = (x^3)^{1/3} = x.$$

Por consiguiente, $x = f^{-1}(y) = (y + 5)^{1/3}$. Intercambiando los nombres de las variables $x$ e $y$ (piense por qué tiene sentido hacerlo) resulta finalmente

$$f^{-1}(x) = (x + 5)^{1/3}.$$

### Ejemplo 2.4 Una función no inyectiva

Probar que $f(x) = 10 - x^4$ no tiene inversa.

**Solución** Vemos en la gráfica (figura 6.8) que $f$ no es inyectiva, ya que, por ejemplo, $f(1) = f(-1) = 9$. En consecuencia, $f$ no tiene inversa.

### Nota 2.3

Las más de las veces no seremos capaces de hallar una fórmula para la función inversa y tendremos que conformarnos con saber que existe. El próximo ejemplo es típico de esa situación.

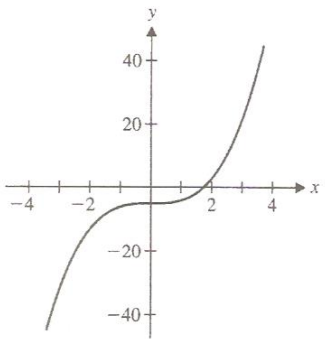



**Figura 6.7**
$y = x^3 - 5$.

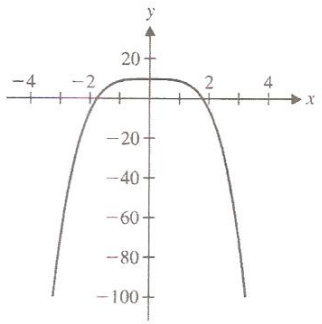



**Figura 6.8**
$y = 10 - x^4$.

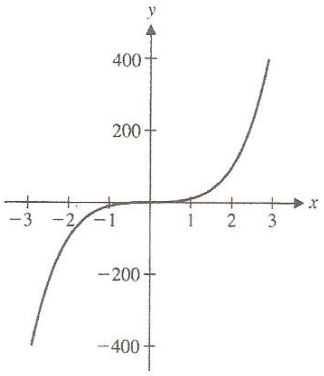



**Figura 6.9**
$y = x^5 + 8x^3 + x + 1$.

### Ejemplo 2.5 Demostración de la existencia de una función inversa

Probar que $f(x) = x^5 + 8x^3 + x + 1$ tiene inversa. Hallar $f^{-1}(1)$ y $f^{-1}(11)$.

**Solución** En la gráfica (figura 6.9) parece que es inyectiva, pero ¿cómo estar seguros? (¡Recuerde que las gráficas pueden ser engañosas!). Observe que si una función es estrictamente creciente o decreciente en todo su dominio, entonces es inyectiva y, por tanto, tiene inversa. En este caso, como

$$f'(x) = 5x^4 + 24x^2 + 1 > 0, \text{ para todo } x,$$

$f$ es estrictamente creciente, luego tiene inversa. Lo ideal sería hallarla algebraicamente, resolviendo

$$y = x^5 + 8x^3 + x + 1$$

en $x$. Piense en ello un momento y se convencerá de que no sabemos despejar de ahí $x$ en términos de $y$. Así, pues, hemos demostrado que existe la función inversa de $f$, pero no podemos encontrar su expresión.

Puesto que no hemos hallado la fórmula de $f^{-1}(x)$, sorprende que se nos pida calcular $f^{-1}(1)$ y $f^{-1}(11)$. Ahora bien, aunque no disponemos de tal fórmula, podemos observar que $f(0) = 1$, luego $f^{-1}(1) = 0$. Y por prueba y error, no es difícil ver que $f(1) = 11$, de modo que $f^{-1}(11) = 1$.

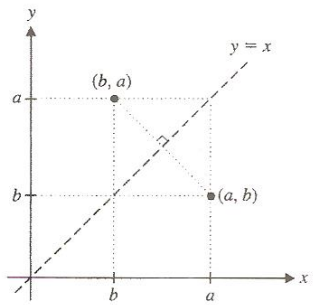



**Figura 6.10**
Reflexión en la recta $y = x$.

En el ejemplo 2.5 sabíamos que existe la inversa, pero no hemos podido calcularla. Aun en casos así se puede extraer información gráficamente. Basta darse cuenta de que si $(a, b)$ es un punto de la gráfica de $y = f(x)$, de

$$b = f(a)$$

se sigue, si $f$ tiene inversa, que

$$f^{-1}(b) = f^{-1}(f(a)) = a.$$

Por tanto, $(b, a)$ es un punto de la gráfica de $y = f^{-1}(x)$. Esto nos permite marcar cuantos puntos de la gráfica de la función inversa queramos. Más aún, como el punto $(b, a)$ se obtiene de $(a, b)$ por reflexión en la recta diagonal $y = x$ (figura 6.10), dada la gráfica de cualquier función $f$ invertible, la gráfica de su inversa se obtiene simplemente reflejando la de $f$ en la recta $y = x$. Consecuencia de esta simetría es el próximo resultado.

### Teorema 2.2

Si $f$ es continua e inyectiva, $f^{-1}$ es continua.

El ejemplo que sigue ilustra la simetría entre una función y su inversa.

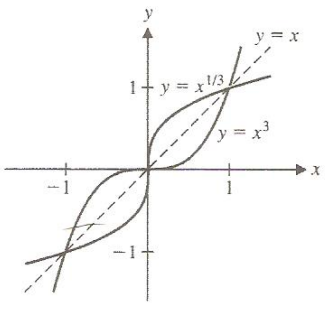



**Figura 6.11**
$y = x^3$ e $y = x^{1/3}$.

### Ejemplo 2.6 Gráficas de una función y de su inversa

Dibujar la gráfica de $f(x) = x^3$ y la de su inversa.

**Solución** Por el ejemplo 2.1 sabemos que la inversa de $f(x) = x^3$ es $f^{-1}(x) = x^{1/3}$. Adviértase la simetría de sus gráficas en la figura 6.11.

Esta simetría nos va a permitir dibujar la gráfica de la función inversa incluso cuando no conozcamos una fórmula para ella (figura 6.12).

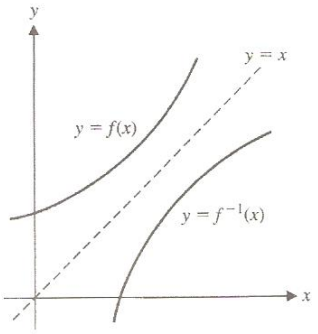



**Figura 6.12**
Gráficas de $f$ y $f^{-1}$.

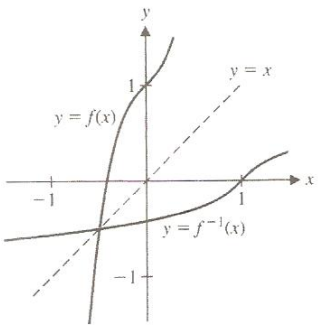



**Figura 6.13**
Gráficas de $f$ y $f^{-1}$.

### Ejemplo 2.7 Gráfica de una función inversa desconocida

Dibujar las gráficas de $f(x) = x^5 + 8x^3 + x + 1$ y de su inversa.

**Solución** Vimos en el ejemplo 2.5 que $f$ es estrictamente creciente y, por tanto, inyectiva, pero no supimos hallar una fórmula para su inversa. A pesar de ello, podemos dibujar la gráfica de $f^{-1}$. Puede hacerse marcando unos cuantos puntos a mano, pero es preferible usar el modo paramétrico en una calculadora. Con el fin de obtener ecuaciones paramétricas para la curva $y = f(x)$, hacemos

$$x = t \quad \text{e} \quad y = f(t) \tag{2.1}$$

Y las ecuaciones paramétricas para $y = f^{-1}(x)$ son, entonces,

$$x = f(t) \quad \text{e} \quad y = t. \tag{2.2}$$

Con las ecuaciones paramétricas (2.1) y (2.2) se obtienen las gráficas de $y = f(x)$ e $y = f^{-1}(x)$ de la figura 6.13. Hemos dibujado además con trazo discontinuo la recta $y = x$, descrita en forma paaramétrica como

$$x = t \quad \text{e} \quad y = t.$$

Una última observación acerca de las funciones inversas. Si $f$ es inyectiva y derivable, como consecuencia de la simetría entre $f$ y $f^{-1}$, siempre que $f'(f^{-1}(a)) \neq 0$ (la recta tangente no es horizontal), $f^{-1}$ debe ser derivable en $x = a$ (la recta tangente no es vertical). El teorema próximo enuncia de forma precisa este hecho.

### Teorema 2.3

Sea $f$ inyectiva y derivable. Entonces, siempre que $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

### Demostración

Sea $g(x) = f^{-1}(x)$. En $x = a$ se tiene, por la definición alternativa de la derivada,

$$g'(a) = \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}. \tag{2.3}$$

Como $g$ es la inversa de $f$, es $y = g(x)$ si, y sólo si, $f(y) = x$ y $b = g(a)$ si, y sólo si, $f(b) = a$. Además, por ser $f$ derivable, es continua, luego (por el teorema 2.2) $g$ es continua. En particular, cuando $x \to a$ debe ser $g(x) \to g(a)$, así que $y \to b$. De (2.3) se sigue que

$$g'(a) = \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \lim_{y \to b} \frac{y - b}{f(y) - f(b)}$$

$$= \lim_{y \to b} \frac{1}{\dfrac{f(y) - f(b)}{y - b}} = \frac{1}{\lim\limits_{y \to b} \dfrac{f(y) - f(b)}{y - b}} = \frac{1}{f'(b)}$$

$$= \frac{1}{f'(f^{-1}(a))},$$

como queríamos demostrar, ya que el límite del denominador no es cero.

### Advertencia

El teorema 2.3 afirma que la pendiente de la recta tangente a $y = f^{-1}(x)$ en un punto $(a, b)$ es la recíproca de la pendiente de la recta tangente a $y = f(x)$ en el punto simétrico $(b, a)$.

Como alternativa a la demostración del teorema 2.3, si sabemos que una función inversa es derivable, podemos hallar su derivada por derivación implícita como sigue. Si $y = f^{-1}(x)$, entonces

$$f(y) = x. \tag{2.4}$$

Derivando los dos miembros de (2.4) con respecto a $x$, obtenemos

$$\frac{d}{dx} f(y) = \frac{d}{dx} x,$$

y por tanto,

$$f'(y) \frac{dy}{dx} = 1$$

por la regla de la cadena. (En este último paso hemos dado por supuesto que $\frac{dy}{dx}$ existe). Así, pues, siempre que $f'(y) \neq 0$ se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{f'(y)},$$

o sea,

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(y)},$$

como habíamos dicho antes.

**Ejemplo 2.8** **Recta tangente a la gráfica de una función inversa**

Hallar una ecuación para la recta tangente a la gráfica de $y = f^{-1}(x)$ en $x = 3$, donde $f(x) = x^3 - 5$.

**Solución** En primer lugar, observamos que $f'(x) = 3x^2$ y $f(2) = 3$, luego $f^{-1}(3) = 2$. Según el teorema 2.3,

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) \Big|_{x=3} = \frac{1}{f'(f^{-1}(3))}$$

$$= \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{12}.$$

Por tanto, la recta tangente tiene pendiente $\frac{1}{12}$ y pasa por el punto de coordenadas $x = 3$ e $y = f^{-1}(3) = 2$. Por consiguiente, admite como ecuación

$$y = \frac{1}{12}(x - 3) + 2.$$

Para la función del ejemplo 2.8 hemos encontrado una fórmula de la función inversa,

$$f^{-1}(x) = (x + 5)^{1/3}.$$

Derivando esto directamente se comprueba que el valor de la derivada en $x = 3$ es el mismo independientemente de la forma en que se calcule. Por supuesto, el interés primordial del teorema 2.3 se centra en las situaciones en las que no sabemos hallar una fórmula para la función inversa.

En el ejemplo siguiente aplicamos nuestros conocimientos sobre funciones inversas a un problema de Medicina.

**Ejemplo 2.9** **Dosificación correcta de un fármaco**

La inyección de un fármaco eleva el nivel de una hormona en el cuerpo. Dosis de 1, 2, 3 y 4 mg producen niveles hormonales de 12, 20, 40 y 76, respectivamente. Los médicos desean saber la dosis que produce el nivel hormonal deseable en un paciente, que es 30. ¿Cuál es la dosis correcta?

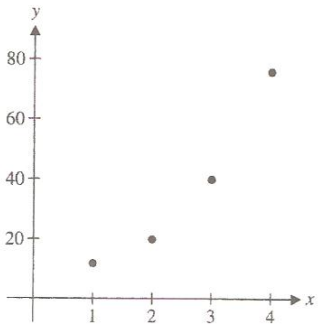



**Figura 6.14a**
Datos de hormonas.

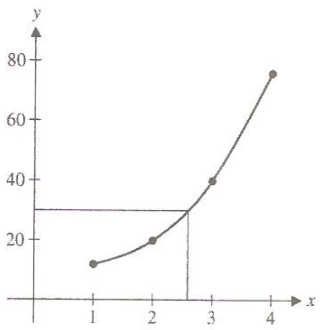



**Figura 6.14b**
Curva aproximada.

**Solución** La figura 6.14a muestra los puntos dato. Estamos ante un problema inverso: dado $y = 30$, hallar $x$. Podría razonarse así: como 30 es el punto medio entre 20 y 40, el valor de $x$ adecuado es el punto medio entre 2 y 3, o sea, 2,5. Este método se llama **interpolación lineal**, ya que el punto $x = 2{,}5$, $y = 30$ está en la recta que pasa por (2, 20) y (3, 40). Aunque da resultados razonables, se puede mejorar. De hecho, esa estimación no tiene en cuenta toda la información conocida. (Piense en esto). Los puntos de la figura 6.14a sugieren una curva cóncava hacia arriba. Eso quiere decir que $x = 2{,}6$ o $x = 2{,}7$ pueden ser mejores estimaciones de la dosis requerida. La figura 6.14b muestra una curva suave que pasa por los puntos dato y una solución gráfica del problema. Hay otras técnicas más avanzadas (por ejemplo, interpolación polinómica) para hacer estimaciones más seguras.

## EJERCICIOS 6.2

1. Explicar, en palabras y con una gráfica, por qué es cierto esto: si $f(x)$ es derivable y $f'(x) > 0$ para todo $x$, entonces $f$ tiene inversa.

2. Supongamos que la gráfica de una función $f$ satisface el criterio de la recta horizontal. Explicar por qué se sabe que $f$ tiene inversa (definida sobre el recorrido de $f$).

3. El radar funciona detectando un pulso electromagnético que rebota en un objeto móvil y midiendo la perturbación sufrida en ese rebote. Explicar por qué esto es un problema inverso, identificando la entrada y la salida.

4. Cada enfermedad tiene asociado un conjunto de síntomas. El médico intenta resolver un problema inverso: dados los síntomas, identificar la enfermedad que los causa. Explicar por qué este problema inverso no está bien definido (es decir, por qué no siempre es posible identificar correctamente la enfermedad a partir de los síntomas).

**En los ejercicios 5-16, averiguar si la función es inyectiva.**

5. $f(x) = x^3 - 5$
6. $f(x) = x^2 - 3$
7. $f(x) = x^3 - 2x - 1$
8. $f(x) = x^3 + 2x - 1$
9. $f(x) = \operatorname{sen} x$
10. $f(x) = \cos x$
11. $f(x) = \ln x$
12. $f(x) = \ln x^2$
13. $f(x) = x^5 + 2x^3 - 2$
14. $f(x) = x^5 - 2x^3 - 2$
15. $f(x) = \sqrt{x^3 + 2x}$
16. $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$

**En los ejercicios 17-24, averiguar si la función es inyectiva. Si lo es, hallar la inversa y dibujar las gráficas de la función y de su inversa.**

17. $f(x) = x^3 - 2$
18. $f(x) = x^3 + 4$
19. $f(x) = x^5 - 1$
20. $f(x) = x^5 + 4$
21. $f(x) = x^4 + 2$
22. $f(x) = x^4 - 2x - 1$
23. $f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$
24. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

**En los ejercicios 25-30 la función tiene inversa. Sin hallar la función inversa, calcular su derivada en $x = a$ y dibujar su gráfica.**

25. $f(x) = x^3 + 4x - 1,\ a = -1$
26. $f(x) = x^3 + 2x + 1,\ a = 1$
27. $f(x) = x^5 + 3x^3 + x,\ a = 5$

28. $f(x) = x^5 + 4x - 2, a = 3$

29. $f(x) = \sqrt{x^3 + 2x + 1}, a = 2$

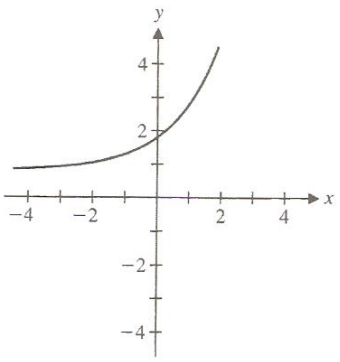
30. $f(x) = \sqrt{x^5 + 4x^3 + 3x + 1}, a = 3$

31. Hallar una ecuación para la recta tangente del ejercicio 25.

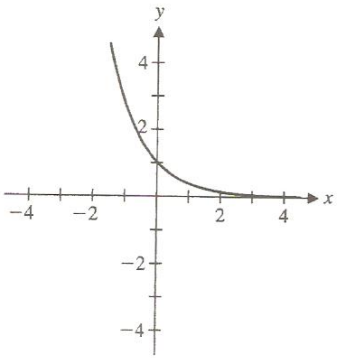
32. Hallar una ecuación para la recta tangente del ejercicio 26.

**En los ejercicios 33-36 se da la gráfica de una función. Determinar si su inversa es (a) creciente o decreciente, (b) cóncava hacia arriba o hacia abajo.**

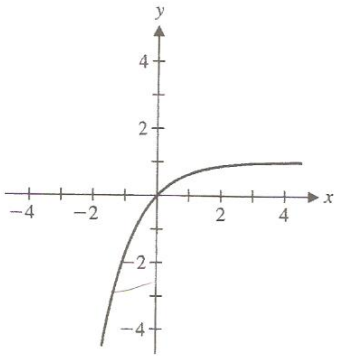
33.



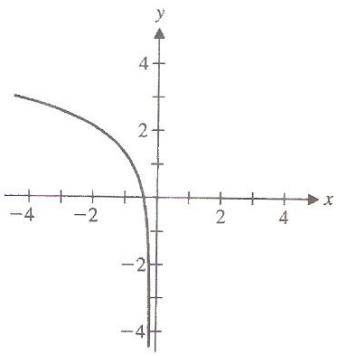

34.




35.




36.




**En los ejercicios 37-40, usar interpolación lineal (véase el ejemplo 2.9) para estimar $f^{-1}(b)$. Usar la concavidad para conjeturar si esa estimación es demasiado baja o demasiado alta.**

37. $(1, 12), (2, 20), (3, 26), (4, 30), b = 23$

38. $(1, 12), (2, 10), (3, 6), (4, 0), b = 8$

39. $(1, 12), (2, 6), (3, 2), (4, 0), b = 5$

40. $(1, 12), (2, 20), (3, 36), (4, 50), b = 32$

**En los ejercicios 41-46, discutir si la función propuesta tiene inversa.**

41. Los ingresos de una empresa en función del tiempo.

42. La altura de una persona en función del tiempo.

43. La altura de una pelota, que se deja caer, en función del tiempo.

44. La altura de una pelota lanzada hacia arriba, en función del tiempo.

45. La sombra de un objeto en función de su forma tridimensional.

46. El número de calorías consumidas por un atleta en función de la velocidad de la carrera.

47. Hallar los valores de $k$ para los que $f(x) = x^3 + kx + 1$ es inyectiva.

48. Hallar los valores de $k$ para los que $f(x) = x^3 + 2x^2 + kx - 1$ es inyectiva.

49. Su jefe le anuncia un aumento del 10% en su salario. La próxima semana, por causas que no están bajo control, se recorta el salario de todos los trabajadores un 10%. ¿Está igual de bien que dos semanas atrás? Probar que un incremento del 10% y un descenso del 10% no son procesos inversos. Hallar el inverso de un incremento del 10%. (Ayuda: Añadir un 10% a una cantidad es lo mismo que multiplicarla por 1,10).

50. La gráfica de los beneficios de una compañía de la competencia es creciente y cóncava hacia arriba. Explique por qué preferiría mirar la gráfica de la inversa.

51. Con ayuda de un PCS, hallar un modelo exponencial para los datos del ejemplo 2.9. Calcular el valor de $x$ en el que ese modelo exponencial toma valor 30.

52. La idea de un inverso puede extenderse de funciones a operadores. Sea $D$ un operador tal que si $f$ es una función de un cierto tipo, $Df$ es otra función de ese mismo tipo. Se dice que el operador $D$ tiene inverso $D^{-1}$ si $D^{-1}Df = DD^{-1}f = f$ para todas las funciones del tipo en cuestión. Definamos $Df = f'(x)$ para todas las funciones con derivadas de todo orden. Probar que el operador $I$ dado por $If = \int_0^x f(t)\,dt$ **no** es el inverso de $D$. No obstante, si consideramos sólo funciones tales que $f(0) = 0$, los dos operadores $D$ e $I$ **son** inversos uno de otro.

## 6.3 LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

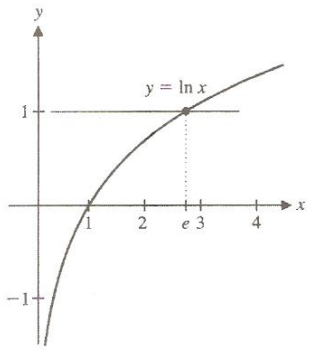



**Figura 6.15**
Definición de $e$.

Vamos a detenernos a analizar con más cuidado la definición y las propiedades de la función exponencial $e^x$. En el Capítulo 0 dimos la definición usual (y misteriosa) de $e$ como un número irracional $e = 2{,}71828...$ sin explicar por qué este número es tan importante. Y a continuación se definió $\ln x$ como $\log_e x$, el logaritmo en base $e$. Ahora que hemos definido con precisión $\ln x$ (sin mencionar el número $e$), podemos definir $e$ con claridad y calcular su valor aproximado.

**Definición 3.1**
Definimos $e$ como el número real tal que

$$\ln e = 1$$

En otras palabras, $e$ es la coordenada $x$ donde se cortan las gráficas de $y = \ln x$ e $y = 1$ (figura 6.15). Es decir, $e$ es la solución de la ecuación

$$\ln x - 1 = 0.$$

Podemos resolverla numéricamente por el método de Newton, por ejemplo, y obtenemos

$$e \approx 2{,}71828182846.$$

Recordemos que en el capítulo 0 se definió $e = \lim_{n \to \infty} (1 + 1/n)^n$. Dejamos como ejercicio probar que estas dos definiciones de $e$ son consistentes, es decir, definen el mismo número. Pues bien, una vez definido $e$, la tarea pendiente es definir la función $e^x$. No hay problema alguno si $x$ es racional. Por ejemplo,

$$e^2 = e \cdot e$$
$$e^3 = e \cdot e \cdot e$$
$$e^{1/2} = \sqrt{e}$$
$$e^{5/7} = \sqrt[7]{e^5}.$$

De hecho, para todo $x$ racional, $x = p/q$ ($p$ y $q$ enteros), se tiene

$$e^x = e^{p/q} = \sqrt[q]{e^p}.$$

Ahora bien, si $x$ es irracional, ¿qué significa $e^x$? ¿Qué quiere decir elevar un número a una potencia **irracional**? Por ejemplo, ¿puede decir qué significado tiene $e^\pi$? No se lleve a engaño: es un problema serio. Tal vez recuerde que en el Capítulo 0 dimos una idea, necesariamente vaga e incompleta, de cuál es la respuesta. Ya es hora de dar la respuesta satisfactoria y completa.

Para empezar, observemos que $f(x) \ln x$ $(x > 0)$, $f'(x) = 1/x > 0$. Así, pues, $f$ es estrictamente creciente. En consecuencia, es inyectiva y existe su inversa, $f^{-1}$. Como suele ser habitual, no hay método algebraico de hallar la inversa. Sin embargo, por el teorema 1.1 (iv) sabemos que, para cualquier potencia racional $x$,

$$\ln (e^x) = x \ln e = x,$$

ya que hemos definido $e$ de manera que $\ln e = 1$. Eso quiere decir que

$$f^{-1}(x) = e^x, \text{ para } x \text{ racional.}$$

Es decir, la (desconocida) función inversa $f^{-1}(x)$ coincide con $e^x$ en todo número racional $x$. Puesto que $e^x$ no tenía significado asignado hasta ahora para $x$ irracional, lo **definimos** como el valor de $f^{-1}(x)$.

---

**Definición 3.2**
Para $x$ irracional, definimos $y = e^x$ como el número tal que

$$\ln y = \ln(e^x) = x.$$

---

Es decir, definimos $e^x$, para $x$ irracional, como el número real que cumple $\ln(e^x) = x$. De acuerdo con esta definición, para todo $x > 0$, $e^{\ln x}$ es el número real para el cual

$$\ln(e^{\ln x}) = \ln x. \tag{3.1}$$

Como $\ln x$ es inyectiva, de (3.1) se deduce que

$$\boxed{e^{\ln x} = x, \text{ si } x > 0.} \tag{3.2}$$

Nótese que (3.2) afirma que

$$\ln x = \log_e x.$$

En otras palabras, la definición integral de $\ln x$ (sección 6.1) es consistente con nuestra definición anterior de $\ln x$ como $\log_e x$ (Capítulo 0). Hagamos constar además que con esta definición de la función exponencial se tiene

$$\boxed{\ln(e^x) = x, \text{ para todo } x \in (-\infty, \infty)}$$

y

$$e^{\ln x} = x, \text{ para todo } x > 0.$$

Así, pues, $e^x$ y $\ln x$ son funciones inversas. Tenga siempre presente que, para $x$ irracional, $e^x$ está definida **sólo** a través de la relación como función inversa que expresa la definición 3.2. A continuación enunciamos varias reglas familiares de los exponentes y demostramos que son válidas para exponentes irracionales.

---

**Teorema 3.1**
Si $r$, $s$ son números reales arbitrarios y $t$ cualquier número racional,

(i) $e^r e^s = e^{r+s}$

(ii) $\dfrac{e^r}{e^s} = e^{r-s}$

(iii) $(e^r)^t = e^{rt}$.

---

**Demostración**

Estas leyes son todas conocidas para exponentes racionales. Por el contrario, si los exponentes son irracionales, sólo conocemos el valor de esas exponenciales indirectamente a través de la relación de función inversa con $\ln x$ de la definición 3.2.

(i) Usando las reglas de los logaritmos,

$$\ln(e^r e^s) = \ln(e^r) + \ln(e^s) = r + s = \ln(e^{r+s}).$$

Como $\ln x$ es inyectiva, concluimos que

$$e^r e^s = e^{r+s}.$$

Las demostraciones de (ii) y (iii) son análogas y se dejan como ejercicios.

## Derivada de la exponencial

Ya calculamos la derivada de $e^x$ en el Capítulo 2 usando la definición de la derivada como límite. La demostración no era completa porque quedó pendiente la evaluación del límite

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h}.$$

En ese momento conjeturamos que su valor es 1, pero sin ser capaces de probarlo con las técnicas allí disponibles. Volvemos la atención a ese límite en los ejercicios 81 y 82 al final de esta sección. Ahora vamos a presentar una demostración distinta, basada en nuestra nueva definición, refinada, de la función exponencial. De nuevo, por la definición 3.2, se tiene

$$y = e^x \text{ si, y sólo si, } \ln y = x.$$

Derivando esta ecuación respecto de $x$ resulta

$$\frac{d}{dx} \ln y = \frac{d}{dx} x = 1.$$

Por la regla de la cadena,

$$1 = \frac{d}{dx} \ln y = \frac{1}{y} \frac{dy}{dx}. \tag{3.3}$$

Multiplicando ambos lados por $y$, queda

$$\frac{dy}{dx} = y = e^x$$

es decir,

$$\frac{d}{dx} (e^x) = e^x. \tag{3.4}$$

Nótese que (3.4) es la misma fórmula de derivación que habíamos conjeturado en el Capítulo 2, que ahora ha sido justificada rigurosamente. De paso, hemos verificado la correspondiente regla de integración

$$\int e^x \, dx = e^x + c.$$

Aunque ya hemos calculado antes derivadas (y primitivas) relacionadas con exponenciales, algunos ejemplos breves servirán de recordatorio.

### Ejemplo 3.1 Derivadas de algunas exponenciales

Hallar las derivadas de las funciones (a) $e^{3x}$ y (b) $e^{\operatorname{sen} x}$.

**Solución**

(a)
$$\frac{d}{dx}\,e^{3x} = e^{3x}\underbrace{\frac{d}{dx}(3x)}_{\text{regla de la cadena}} = e^{3x}(3) = 3e^{3x}.$$

(b)
$$\frac{d}{dx}\,e^{\operatorname{sen} x} = e^{\operatorname{sen} x}\underbrace{\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x)}_{\text{regla de la cadena}} = e^{\operatorname{sen} x}(\cos x) = \cos x\, e^{\operatorname{sen} x}.$$

### Ejemplo 3.2 Integrales de algunas exponenciales

Hallar las integrales (a) $\int e^{-5x}\,dx$ y (b) $\int x^3 e^{x^4}\,dx$.

**Solución** Se pueden resolver mediante sustituciones sencillas. Para (a) basta hacer

$$\int e^{-5x}\,dx = -\frac{1}{5}\int \underbrace{e^{-5x}}_{e^u}\ \underbrace{(-5)\,dx}_{du} = -\frac{1}{5}\,e^{-5x} + c.$$

En (b), haciendo $u = x^4$, obtenemos

$$\int x^3 e^{x^4}\,dx = \frac{1}{4}\int \underbrace{e^{x^4}}_{e^u}\ \underbrace{(4x^3)\,dx}_{du} = \frac{1}{4}\,e^{x^4} + c.$$

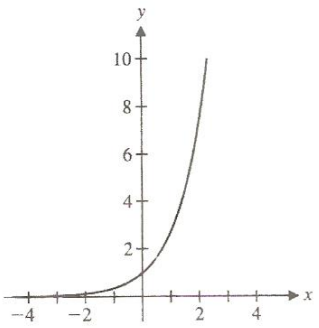



**Figura 6.16**
$y = e^x$.

Ya disponemos de los medios adecuados para volver a la gráfica de $f(x) = e^x$. Como $e = 2{,}718\ldots > 1$, se tiene

$$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0.$$

Asimismo,

$$f'(x) = e^x > 0,$$

de modo que $f$ es creciente en todo $x$ y

$$f''(x) = e^x > 0,$$

por lo que la gráfica es cóncava hacia arriba en todas partes. Ahora es fácil esbozar la gráfica de la figura 6.16.

Análogamente, para $f(x) = e^{-x}$, se tiene

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} e^{-x} = \infty.$$

Y por la regla de la cadena,

$$f'(x) = -e^{-x} < 0,$$

de modo que $f$ es decreciente para todo $x$. Y de

$$f''(x) = e^{-x} > 0$$

se sigue que la gráfica es cóncava hacia arriba en todas partes. Ya podemos esbozar la gráfica de la figura 6.17.

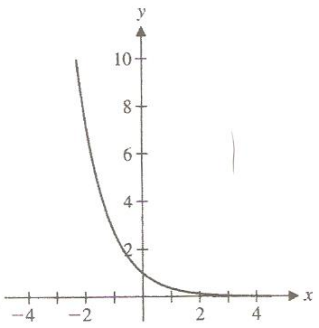



**Figura 6.17**
$y = e^{-x}$.

No hemos dicho nada acerca de las derivadas de funciones exponenciales más generales, como $f(x) = b^x$, con base $b > 0$ arbitraria. Estas funciones son fáciles de expresar en términos de la función exponencial natural, porque usando las reglas de los logaritmos y de los exponentes se tiene

$$\boxed{b^x = e^{\ln(b^x)} = e^{x \ln b}.}$$

En particular, de ahí concluimos que

$$\frac{d}{dx}\, b^x = \frac{d}{dx}\, e^{x \ln b} = e^{x \ln b}\, \frac{d}{dx}\, (x \ln b)$$

$$= e^{x \ln b}\, (\ln b) = b^x\, (\ln b),$$

tal como conjeturamos en la sección 2.6. Análogamente, las propiedades de la exponencial natural permiten integrar exponenciales más generales como sigue. Dado $b > 0$ $(b \neq 1)$, es

$$\int b^x\, dx = \int e^{x \ln b}\, dx = \frac{1}{\ln b} \int e^{\overbrace{x \ln b}^{u}}\, \underbrace{(\ln b)\, dx}_{du}$$

$$= \frac{1}{\ln b}\, e^{x \ln b} + c = \frac{1}{\ln b}\, b^x + c.$$

**Advertencia**

A veces escribiremos $e^x = \exp(x)$. Es conveniente sobre todo cuando el exponente es una expresión complicada, por ejemplo

$$\exp(x^3 - 5x^2 + 2x + 7) = e^{x^3 - 5x^2 + 2x + 7},$$

donde la primera escritura es más fácil de leer que la segunda.

Menos relevantes que la exponencial natural, las demás funciones exponenciales se pueden manejar sin dificultad reduciéndolas a ella. No merece la pena memorizar fórmulas para las derivadas e integrales de las exponenciales generales. Es mejor reescribir $f(x) = b^x$ como $f(x) = e^{x \ln b}$ y usar las reglas de derivación e integración de la exponencial natural y la regla de la cadena.

Análogamente, podemos usar nuestros conocimientos sobre el logaritmo natural para manejar logaritmos más generales. En primer lugar, recordemos que para toda base $a > 0$ $(a \neq 1)$ y cualquier $x > 0$, $y = \log_a x$ si, y sólo si, $x = a^y$. Tomando logaritmos naturales en los dos lados de esta igualdad, obtenemos

$$\ln x = \ln(a^y) = y \ln a.$$

Despejando $y$, resulta

$$y = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Esto demuestra el siguiente teorema.

**Teorema 3.2**

Para toda base $a > 0$ $(a \neq 1)$ y todo $x > 0$, $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$.

Entre otras cosas, el teorema 3.2 nos permite utilizar la calculadora para evaluar logaritmos de base arbitraria. Las calculadoras no tienen tecla específica para logaritmos generales, sino sólo para $\ln x$ y $\log_{10} x$. Pero es fácil evaluar logaritmos de cualquier otra base. Por ejemplo,

$$\log_7 3 = \frac{\ln 3}{\ln 7} \approx 0{,}564575.$$

Y, lo que es más importante, gracias al teorema 3.2, podemos expresar las derivadas de funciones logaritmo generales en términos de la derivada del logaritmo natural. En particular, para cualquier base $a > 0$ $(a \neq 1)$, se tiene

$$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right) = \frac{1}{\ln a}\frac{d}{dx}(\ln x)$$

$$= \frac{1}{\ln a}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x \ln a}.$$

Igual que con las derivadas de exponenciales generales, no merece la pena memorizar esto como una regla adicional de derivación. Cada vez que necesite la derivada de una función $f(x) = \log_a x$, reescriba $f(x) = \dfrac{\ln x}{\ln a}$ y use la derivada del logaritmo natural.

## EJERCICIOS 6.3

1. Pensando en que $e$ es un número mayor que 1, explicar por qué $\lim_{x \to \infty} e^x = \infty$ y $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$.

2. Argumentar por qué la gráfica de $y = e^{-x}$ en la figura 6.17 es la imagen especular (respecto del eje $y$) de la gráfica de $y = e^x$ en la figura 6.16.

3. En el texto hemos dado una definición precisa, pero técnica, de $e^\pi$. En este ejercicio se le invita a pensar algo más en ella. Describa qué significan $e^3$, $e^{3.1}$ y $e^{3.14}$ y, a continuación, explique la relación entre $e^\pi$ y esos números.

4. Hay muchas definiciones equivalentes del número $e$. Comparar la dada en esta sección y la de la sección 0.4. Otras definiciones se han dado en diferentes secciones por conveniencia, según el contenido. Explique por qué en el precálculo era más conveniente la definición como límite, mientras que ahora era preferible la definición en términos de funciones inversas.

**En los ejercicios 5-12, representar la función.**

5. $3e^{2x}$
6. $2e^{3x}$
7. $2e^{-x}$
8. $3e^{-2x}$
9. $3xe^{-2x}$
10. $2xe^{-3x}$
11. $2e^{-x^2}$
12. $e^{-2x^2}$

**En los ejercicios 13-26, hallar la derivada de la función propuesta.**

13. $4e^{3x}$
14. $2e^{3x}$
15. $3xe^{-2x}$
16. $2xe^{-3x}$
17. $2e^{-x^2}$
18. $e^{-2x^2}$
19. $x^2e^{-x}$
20. $2x^2e^{-3x}$
21. $2e^{x^3-3x}$
22. $e^{2x-x^2}$
23. $\sqrt{e^{2x}}$
24. $(e^{3x}+1)^2$
25. $e^{\cos x}$
26. $e^{\sqrt{x}}$

**En los ejercicios 27-44, hallar la integral.**

27. $\int e^{3x}\,dx$
28. $\int e^{2-3x}\,dx$
29. $\int xe^{x^2}\,dx$
30. $\int 2xe^{-x^2}\,dx$
31. $\int \operatorname{sen} xe^{\cos x}\,dx$
32. $\int e^x \cos(e^x)\,dx$
33. $\int \dfrac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$
34. $\int \dfrac{e^x}{1+e^x}\,dx$
35. $\int (1+e^x)^2\,dx$
36. $\int e^x(1+e^x)^2\,dx$
37. $\int \dfrac{4}{e^{2x}}\,dx$
38. $\int \dfrac{e^{2x}}{4}\,dx$
39. $\int \ln e^{x^2}\,dx$
40. $\int e^{-\ln x}\,dx$
41. $\int_0^1 e^{3x}\,dx$
42. $\int_0^2 e^{-2x}\,dx$
43. $\int_{-2}^2 xe^{-x^2}\,dx$
44. $\int_0^1 \dfrac{e^x-1}{e^{2x}}\,dx$

**En los ejercicios 45-48, hallar los extremos y los puntos de inflexión.**

45. $xe^{-2x}$
46. $xe^{-4x}$
47. $x^2e^{-2x}$
48. $\dfrac{e^x}{x}$

49. Demostrar las partes (ii) y (iii) del teorema 3.1.

50. La presión atmosférica a $h$ pies de altura sobre el nivel del mar es aproximadamente $p = 2.116e^{-0.0000318h}$. Si un globo está a 1.000 pies y sube a razón de 160 pies/s, ¿a qué ritmo está cambiando la presión atmosférica de su entorno?

**En los ejercicios 51-58, representar cada función.**

51. $3^x$
52. $2^x$
53. $\left(\frac{1}{2}\right)^x$
54. $\left(\frac{3}{4}\right)^x$
55. $3^{-x}$
56. $2^{-x}$
57. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$
58. $\left(\frac{3}{4}\right)^{-x}$

59. A la vista de los ejercicios 51-58, describir la gráfica de $y = b^x$ para $b > 1$ y para $0 < b < 1$.

60. A la vista de los ejercicios 51-58, describir la gráfica de $y = b^{-x}$ para $b > 1$ y para $0 < b < 1$.

**En los ejercicios 61-70, hallar la derivada de la función dada.**

61. $2^x$
62. $3^x$
63. $3^{2x}$
64. $5^{-2x}$
65. $3^{x^2}$
66. $4^{-x}$
67. $\log_3 x$
68. $\log_8 x$
69. $\log_4 x^2$
70. $\log_6(x^2 + 5)$

**En los ejercicios 71-76, hallar cada integral.**

71. $\int 2^x\,dx$
72. $\int 3^x\,dx$
73. $\int x2^{x^2}\,dx$
74. $\int 2x3^{-x^2}\,dx$
75. $\int 4^{3x}\,dx$
76. $\int 4^{1-x}\,dx$

77. La **función sigmoidal** $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{-x}}$ se usa como modelo en situaciones con umbral. Por ejemplo, en el cerebro cada neurona recibe entradas de otras muchas y se dispara sólo después de que la entrada total sobrepasa cierto umbral. Representar $y = f(x)$ y calcular $\lim_{x \to \infty} f(x)$ y $\lim_{x \to -\infty} f(x)$. Definir la función $g(x)$ como el valor $f(x)$ redondeado al entero más próximo. ¿Qué valor de $x$ es el umbral para que esta función pase de «off» (0) a «on» (1)? ¿Cómo se puede modificar la función para que el umbral sea $x = 4$?

78. Un ser humano se inicia de una única célula (óvulo) fertilizada, que se divide en 2, las cuales se dividen en 4, etc., hasta el recién nacido, que tiene del orden de mil trillones ($10^{15}$) de células. Sin hacer cálculos, intente estimar cuántas divisiones requiere ese número final de células. A continuación, calcule el $n$ necesario para que $2^n \approx 10^{15}$. ¿Sorprendido?

79. Un cierto tipo de células crece durante tres días y entonces se divide en dos. La distribución de las células por edades tendrá una función de distribución de probabilidad (fdp) de la forma $f(x) = 2ke^{-kx}$ en $0 \le x \le 3$. Hallar el valor de $k$ para el cual $f(x)$ es una fdp, es decir, tal que $\int_0^3 f(x)\,dx = 1$. Finalmente, calcular la probabilidad de que una célula esté entre uno y dos días de edad.

80. En cierta lotería, tiene usted una probabilidad de uno entre diez de ganar. Si juega 10 veces, la probabilidad de ganar al menos una vez es $1 - (9/10)^{10}$. Si la probabilidad de ganar fuera de 1 entre 20, jugando 20 veces la probabilidad de ganar al menos una vez ¿sería mayor o menor? Compare $1 - (9/10)^{10}$ y $1 - (19/20)^{20}$ para saberlo. Para ver qué sucede con apuestas cada vez más difíciles, calcule $\lim_{n \to \infty} \{1 - [(n-1)/n]^n\}$.

81. En el texto dejamos la demostración de que $\lim_{h \to 0} \dfrac{e^h - 1}{h} = 1$ para los ejercicios. Ahora le indicaremos una demostración. (Otra puede verse en el siguiente ejercicio). Partiendo con un $h > 0$, escribimos $h = \ln e^h = \int_1^{e^h} \dfrac{1}{x}\,dx$. Usar el teorema integral del valor medio para escribir $\int_1^{e^h} \dfrac{1}{x}\,dx = \dfrac{(e^h - 1)}{\bar{x}}$ para algún número $\bar{x}$ entre 1 y $e^h$. Esto da $\dfrac{e^h - 1}{h} = \bar{x}$. Ahora tome el límite para $h \to 0^+$. Con $h < 0$, repita el argumento cambiando $h$ por $-h$.

82. Vamos a sugerir otra demostración de que $\lim_{h \to 0} \dfrac{e^h - 1}{h} = 1$. Partimos de $f(x) = \ln x$, con lo que $f'(1) = 1$. Usando la definición alternativa de la derivada, escribimos eso como $f'(1) = \lim_{x \to 1} \dfrac{\ln x - \ln 1}{x - 1} = 1$. Explicar por qué esto implica que $\lim_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{\ln x} = 1$. Finalmente, sustituya $x = e^h$.

83. En este ejercicio demostramos que si $e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, entonces $\ln e = 1$ (o sea, que las definiciones de $e$ en las secciones 0.6 y 6.3 son equivalentes). Definimos $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Por la continuidad de la función logaritmo natural,

$$\ln e = \ln\left[\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right] = \lim_{n \to \infty} \left[\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right].$$

Aplicar la regla de L'Hôpital a $\lim_{n \to \infty} \left[\dfrac{\ln(1 + 1/n)}{1/n}\right]$ para demostrar que este límite es 1.

84. Aplicar el método de Newton a la función $f(x) = \ln x - 1$ para hallar iteraciones que aproximan el valor de $e$. Partiendo de $x_0 = 3$, ¿cuántos pasos son necesarios para lograr cinco dígitos exactos?

85. Hallar el número de intersecciones de $y = x^a$ e $y = a^x$ para $a = 3$, $a = e$ y $a = 2$. El número de intersecciones cambia entre $a = 2$ y $a = 3$. Repetir eso mismo con $a = 2{,}1$, $a = 2{,}2$, etc., para explorar si otros valores de $a$ tienen distinto número de intersecciones. Demuestre su conjetura. Le será de utilidad este hecho: si $f(c) = g(c)$, $f'(x) > g'(x)$ para $x > c$ y $f'(x) < g'(x)$ para $x < c$, entonces $x = c$ es la única intersección de $f$ y $g$.

86. Estudiar las propiedades (positiva/negativa, creciente/decreciente, cóncava hacia arriba/abajo) de las funciones $xe^{-bx}$ y $x^2e^{-bx}$ con $b > 0$ constante. En algunas aplicaciones, los matemáticos necesitan encontrar una función con $f(0) = 0$, que en $x > 0$ crezca hasta un único máximo en $x = c$ y descienda después gradualmente con $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$. Probar que las dos familias de funciones cumplen esas condiciones y hallar valores aproximados de $b$. Tomando $c = 2$, representar $xe^{-bx}$ y $x^2e^{-bx}$. Comparar y contrastar las gráficas. Explicar con qué criterio se decidiría cuál es la más realista en una aplicación.

## 6.4 PROBLEMAS DE CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO

| Tiempo (horas) | Número de bacterias (millones por ml) |
|---|---|
| 0 | 1,2 |
| 0,5 | 2,5 |
| 1 | 5,1 |
| 1,5 | 11,0 |
| 2 | 23,0 |
| 2,5 | 45,0 |
| 3 | 91,0 |
| 3,5 | 180,0 |
| 4 | 350,0 |

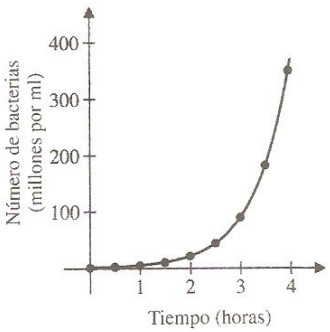



**Figura 6.18**
Crecimiento de bacterias.

En estos tiempos somos muy conscientes de las enfermedades producidas por microorganismos en los alimentos. Especialmente notorios son los efectos de la bacteria *Escherichia coli* (*E. coli*). Muchas personas desconocen el mecanismo por el que las bacterias nos hacen daño. Muchos organismos, la *E. coli* entre ellos, producen una toxina que en cantidades suficientes causa enfermedades e incluso la muerte. Algunas bacterias son capaces de reproducirse en nuestro cuerpo a un ritmo sorprendentemente rápido, llegando a superar los límites de las defensas naturales del cuerpo, y su toxina, acumulada en grandes cantidades, es causa de enfermedades serias.

La tabla del margen muestra el número de *E. coli*, en millones por mililitro (ml) en un cultivo de laboratorio medido a intervalos de media hora en el curso de un experimento. En la figura 6.18 hemos marcado esos puntos respecto del tiempo. ¿A qué función recuerda esa gráfica? Si piensa «a una exponencial», está en lo cierto. Análisis cuidadosos de datos experimentales han llevado a concluir que ciertas poblaciones se reproducen a un ritmo proporcional a su población presente. Esto se observa en cultivos de bacterias, que se reproducen por fisión binaria (cada una se divide en dos). En este caso, el ritmo de crecimiento de la población es directamente proporcional al número de bacterias (al menos mientras disponen de recursos suficientes). Sea $y(t)$ el número de bacterias en un cultivo en el instante $t$. Si el ritmo de crecimiento $y'(t)$ es proporcional a $y(t)$, debe ser

$$y'(t) = ky(t) \tag{4.1}$$

para alguna constante de proporcionalidad $k$ (la **constante de crecimiento**). Puesto que interviene en ella la derivada de una función desconocida, se dice que (4.1) es una **ecuación diferencial**. Queremos resolverla, es decir, encontrar la *función* $y(t)$. Suponiendo $y(t) > 0$ (hipótesis razonable, ya que $y(t)$ representa una población), se tiene

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = k \tag{4.2}$$

Integrando ambos lados respecto de $t$, obtenemos

$$\int \frac{y'(t)}{y(t)}\, dt = \int k\, dt. \tag{4.3}$$

Podemos sustituir en la integral de la izquierda $u = y(t)$, con lo que $du = y'(t)\, dt$. Así, (4.3) se convierte en

$$\int \frac{1}{u}\, du = \int k\, dt.$$

Evaluando estas integrales, resulta

$$\ln |u| + c_1 = kt + c_2,$$

donde $c_1$ y $c_2$ son constantes de integración. Restando $c_1$ de ambos lados queda

$$\ln |u| = kt + (c_2 - c_1) = kt + c,$$

donde hemos combinado las dos constantes de integración en una sola. Como $u = y(t) > 0$, se tiene

$$\ln y(t) = kt + c,$$

y tomando las exponenciales de los dos lados, obtenemos

$$y(t) = e^{\ln y(t)} = e^{kt+c} = e^{kt}e^{c}.$$

Como $c$ es una constante arbitraria, escribimos $A = e^{c}$, con lo que

$$y(t) = Ae^{kt}. \tag{4.4}$$

Para $k > 0$, la ecuación (4.4) se dice que es una **ley de crecimiento exponencial**, y para $k < 0$, una **ley de decrecimiento exponencial** (piense en la razón).

En el ejemplo siguiente examinamos cómo una ley de crecimiento exponencial predice el número de bacterias en un cultivo.

### Ejemplo 4.1 Crecimiento exponencial de una colonia de bacterias

Se inocula un cultivo de *Streptococcus A* (un grupo común de bacterias que produce infecciones de garganta) que contiene 100 células. Cuando el cultivo se analiza 60 minutos más tarde, contiene 450 células. Suponiendo crecimiento exponencial, determinar el número de células en cualquier instante $t$ (en minutos) y el tiempo que tarda en duplicar la población.

**Solución** Crecimiento exponencial significa

$$y'(t) = k\,y(t),$$

y por (4.4),

$$y(t) = A\,e^{kt}, \tag{4.5}$$

donde $A$ y $k$ son constantes aún por determinar. Si llamamos $t = 0$ al instante inicial, entonces

$$y(0) = 100. \tag{4.6}$$

La ecuación (4.6) se dice que es una **condición inicial**. Haciendo $t = 0$ en (4.5), obtenemos

$$100 = y(0) = A\,e^{0} = A,$$

y por tanto,

$$y(t) = 100\,e^{kt}.$$

Podemos usar la segunda observación para calcular el valor de la constante de crecimiento $k$. Se tiene

$$450 = y(60) = 100\,e^{60k}.$$

Dividiendo entre 100, resulta

$$4{,}5 = e^{60k},$$

y tomando logaritmo natural en ambos lados,

$$\ln 4{,}5 = \ln e^{60k} = 60k.$$

Así, pues,

$$k = \frac{\ln 4{,}5}{60} \approx 0{,}02507.$$

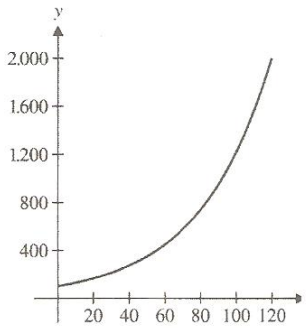



**Figura 6.19**

$y = 100\, e^{\left(\frac{\ln 4,5}{60}\, t\right)}$.

Ya tenemos una fórmula que representa la población del cultivo en todo instante $t > 0$:

$$y(t) = 100\, e^{kt} = 100 \exp\left(\frac{\ln 4,5}{60}\, t\right).$$

La figura 6.19 muestra su gráfica en los primeros 120 minutos. Otra cuestión de interés para los biólogos es el **tiempo de duplicación**, es decir, el tiempo que tarda el cultivo en doblar su población. Se calcula resolviendo la ecuación $y(t) = 200$:

$$200 = y(t) = 100 \exp\left(\frac{\ln 4,5}{60}\, t\right).$$

Dividiendo entre 100 y tomando logaritmos, obtenemos

$$\ln 2 = \frac{\ln 4,5}{60}\, t,$$

de donde

$$t = \frac{60 \ln 2}{\ln 4,5} \approx 27,65.$$

Así, pues, el tiempo de duplicación del *Streptococcus A* es de unos 28 minutos. Nótese que el tiempo de duplicación de un tipo de bacterias depende de sus características específicas, de la cantidad y calidad del alimento que consigue, de la temperatura y de otros factores ambientales. Sin embargo, no depende de la población inicial. En nuestro ejemplo, es fácil ver que la población alcanza el nivel 400 en el instante

$$t = \frac{120 \ln 2}{\ln 4,5} \approx 55,3$$

(exactamente el doble de lo que tarda en alcanzar 200).

Esto es, el cultivo pasa de 100 a 200 en 28 minutos, de 200 a 400 en 28 minutos, y así sucesivamente.

---

Hay muchos fenómenos físicos que obedecen leyes de crecimiento o decrecimiento exponenciales. Tal es el caso en la desintegración de elementos radiactivos. Los experimentos han probado que el ritmo de desintegración de un elemento radiactivo es directamente proporcional a la cantidad presente de dicho elemento. (Recordemos que los elementos radiactivos son químicamente inestables y se desintegran gradualmente en otros más estables). Sea $y(t)$ la cantidad (masa) de un elemento radiactivo presente en el instante $t$. El ritmo de cambio (ritmo de desintegración) de $y(t)$ satisface

$$y'(t) = k\, y(t). \tag{4.7}$$

Nótese que (4.7) es la misma ecuación diferencial que (4.1), encontrada en el crecimiento del cultivo de bacterias. Por tanto, según (4.4),

$$y(t) = A\, e^{kt},$$

para ciertas constantes $A$ y $k$ (la **constante de desintegración**) a determinar.

Suele analizarse el ritmo de desintegración de un elemento radiactivo en términos de su semivida. La **semivida** es el tiempo requerido para que la mitad de la cantidad inicial se haya desintegrado. Por ejemplo, los científicos han calculado que la semivida del carbono-14 ($^{14}C$) es de unos 5.730 años. En otras palabras, si hoy tenemos 2 gramos de $^{14}C$, dentro de 5.730 años quedará 1 gramo de $^{14}C$. Esta gran longevidad, unida al hecho de que todo ser vivo ingiere continuamente $^{14}C$ hasta su muerte, hace que las medidas del $^{14}C$ sean un método eficaz de datación (véanse los ejercicios 29 y 30).

### Ejemplo 4.2 Desintegración radiactiva

Si se tienen hoy 50 gramos de $^{14}C$, ¿cuánto quedará dentro de 100 años?

**Solución** Sea $y(t)$ el número de gramos presente en el instante $t$. De

$$y'(t) = k\,y(t)$$

se sigue, como ya hemos visto,

$$y(t) = A\,e^{kt}.$$

Por la condición inicial $y(0) = 50$ sabemos que

$$50 = y(0) = A\,e^{0} = A.$$

Así, pues,

$$y(t) = 50\,e^{kt}.$$

Para calcular el valor de la constante de desintegración $k$ usamos la semivida:

$$25 = y(5.730) = 50\,e^{5.730k}.$$

Dividiendo entre 50 y tomando logaritmos, resulta

$$\ln \frac{1}{2} = \ln e^{5.730k} = 5.730k,$$

de donde

$$k = \frac{\ln \frac{1}{2}}{5.730} \approx -1{,}20968 \times 10^{-4}.$$

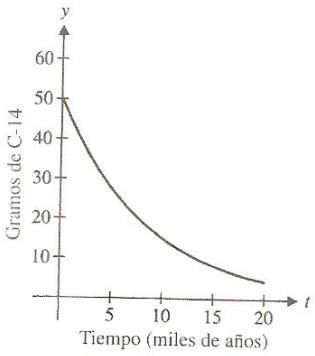



**Figura 6.20**
Desintegración del C-14.

La figura 6.20 muestra la gráfica de la masa de $^{14}C$ en función del tiempo. Nótese la escala de tiempo utilizada, lo que da una idea del ritmo increíblemente lento de desintegración del $^{14}C$. Finalmente, vemos que si partimos con 50 gramos, tras 100 años quedan

$$y(100) = 50\,e^{100k} \approx 49{,}3988 \text{ gramos.}$$

Otro principio físico fácil de observar y matemáticamente similar es la **ley de enfriamiento de Newton**. Si se introduce un objeto caliente en un ambiente frío (o viceversa), el ritmo al que se enfría el objeto es proporcional no a su temperatura, sino a la diferencia entre su temperatura y la **temperatura ambiente**. Si $y(t)$ denota la temperatura del objeto y $T_a$ la del ambiente (que suponemos constante), se tiene la ecuación diferencial

$$y'(t) = k[y(t) - T_a]. \tag{4.8}$$

La ecuación (4.8) no es la ecuación de crecimiento o decrecimiento exponencial. (¿Cuál es la diferencia?). A pesar de ello, se resuelve de forma parecida. En el caso de enfriamiento, supongamos

$$T_a < y(t).$$

(¿Por qué es razonable esta hipótesis?). Dividiendo la ecuación (4.8) entre $y(t) - T_a$ e integrando a continuación, se obtiene

$$\int \frac{y'(t)}{y(t) - T_a}\,dt = \int k\,dt = kt + c_1. \tag{4.9}$$

La integral de la izquierda se puede hallar haciendo la sustitución $u = y(t) - T_a$, con lo que $du = y'(t)\,dt$. Por tanto,

$$\int \frac{y'(t)}{y(t) - T_a}\,dt = \int \frac{1}{u}\,du$$
$$= \ln|u| + c_2 = \ln|y(t) - T_a| + c_2$$
$$= \ln[y(t) - T_a] + c_2,$$

ya que $y(t) - T_a > 0$. De (4.9) se sigue que

$$\ln[y(t) - T_a] + c_2 = kt + c_1, \quad \text{o sea,} \quad \ln[y(t) - T_a] = kt + c,$$

donde hemos combinado de nuevo las dos constantes de integración. Tomando exponenciales en los dos miembros de esa igualdad, obtenemos

$$y(t) - T_a = e^{kt+c} = e^{kt}e^{c}.$$

Finalmente, escribimos por conveniencia $A = e^{c}$, con lo que resulta

$$y(t) = A\,e^{kt} + T_a,$$

donde $A$ y $k$ son constantes a determinar.

Ilustramos la ley de enfriamiento de Newton en el próximo ejemplo.

### Ejemplo 4.3 Ley del enfriamiento de Newton para una taza de café

Una taza de café, inicialmente a 180° F, se deja en un salón, cuya temperatura ambiente es de 70°, y a los 2 minutos está a 165° F. Hallar la temperatura del café en todo instante $t$ y el tiempo que tarda en enfriarse hasta 120° F.

**Solución** Sea $y(t)$ la temperatura del café en el instante $t$. Se tiene la ecuación diferencial

$$y'(t) = k[y(t) - 70].$$

Procediendo como antes, obtenemos

$$y(t) = A\,e^{kt} + 70.$$

La condición inicial es aquí $y(0) = 180$, de modo que

$$180 = y(0) = A\,e^{0} + 70 = A + 70,$$

de donde se deduce $A = 110$. Así, pues,

$$y(t) = 110\,e^{kt} + 70.$$

Ahora podemos usar la segunda medida de temperatura para calcular $k$:

$$165 = y(2) = 110\,e^{2k} + 70.$$

Restando 70 y dividiendo entre 110 vemos que

$$e^{2k} = \frac{165 - 70}{110} = \frac{95}{110}.$$

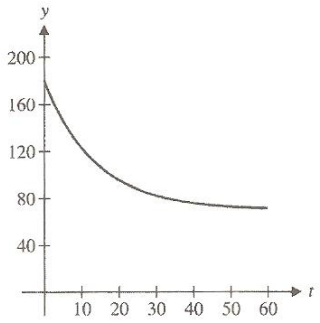



**Figura 6.21**
Temperatura del café.

Tomando logaritmos se obtiene

$$2k = \ln\left(\frac{95}{110}\right)$$

y, en consecuencia,

$$k = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{95}{110}\right) \approx -0{,}0733017.$$

La figura 6.21 muestra la temperatura en función del tiempo. Queda pendiente la cuestión de saber cuándo alcanza la temperatura soportable de 120° F. En la figura 6.21 parece que tal cosa ocurre tras unos 10 minutos. Podemos calcular exactamente el momento $t$ en el que

$$120 = y(t) = 110\, e^{kt} + 70.$$

Es fácil deducir (lo dejamos como ejercicio) que

$$t = \frac{1}{k}\ln\frac{5}{11} \approx 10{,}76 \text{ minutos.}$$

## Interés compuesto

Imagine que invierte 10.000 euros en un banco al 8% de interés anual. Al final del año tendrá

$$10.000 + (0{,}08)10.000 = 10.000(1 + 0{,}08) = 10.800 \text{ euros.}$$

Si, con esa misma tasa de interés del 8%, el banco decidiera pagarle intereses dos veces al año, recibiría el $\frac{8}{2}$% de interés al terminar cada semestre. Al finalizar el año tendría

$$10.000\left(1 + \frac{0{,}08}{2}\right)\left(1 + \frac{0{,}08}{2}\right) = 10.000\left(1 + \frac{0{,}08}{2}\right)^2$$
$$= 10.816 \text{ euros.}$$

Si le abonan los intereses cada mes, recibiría el $\frac{8}{12}$% el último día de cada mes. A fin de año tendría

$$10.000\left(1 + \frac{0{,}08}{12}\right)^{12} = 10.830{,}00 \text{ euros.}$$

Si el interés se abonara diariamente, el saldo de la inversión a fin de año sería

$$10.000\left(1 + \frac{0{,}08}{365}\right)^{365} = 10.832{,}78 \text{ euros.}$$

Es evidente que cuanto mayor sea la frecuencia con que se abonan los intereses, y pasan a engrosar su cuenta (interés «compuesto»), tanto mayor es el saldo final. ¿Hay un límite a ese crecimiento del interés final? Si $n$ denota el número de veces que se abona el interés al año, queremos calcular el rendimiento final bajo interés **compuesto continuamente** (RFIC), es decir,

$$\text{RFIC} = \lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{0{,}08}{n}\right)^n - 1.$$

Para evaluar este límite, basta recordar (Capítulo 0) que

$$e = \lim_{m \to \infty}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m.$$

Haciendo el cambio de variable $n = (0{,}08)m$, obtenemos

$$\text{RFIC} = \lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{0{,}08}{0{,}08m}\right)^{0{,}08m} - 1$$

$$= \left[\lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m}\right]^{0{,}08} - 1$$

$$= e^{0{,}08} - 1 \approx 0{,}083287.$$

Bajo interés compuesto continuamente, el rendimiento final sería de un 8,3% aproximadamente, ya que

$$10.000(e^{0{,}08} - 1) = 832{,}87 \text{ euros},$$

de modo que el capital, al finalizar el año, sería 10.832,87 euros. En general, si se invierten $P$ euros a una tasa de interés $r$, compuesto $n$ veces al año, el valor final de la inversión a los $t$ años es

$$P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}.$$

Y si el interés se compone continuamente (es decir, si se toma el límite $n \to \infty$), eso se convierte en

$$P\,e^{rt}.$$

### Ejemplo 4.4 Comparación de intereses compuestos

Si invertimos 7.000 euros a una tasa anual de interés del 5,75%, comparar el capital total al cabo de 5 años, bajo diversas formas de composición de los intereses.

**Solución** Con intereses abonados una vez al año, el capital final es

$$7.000\left(1 + \frac{0{,}0575}{1}\right)^{5} = 9.257{,}63 \text{ euros}.$$

Con abonos mensuales,

$$7.000\left(1 + \frac{0{,}0575}{12}\right)^{12(5)} = 9.325{,}23 \text{ euros}.$$

Compuesto diariamente,

$$7.000\left(1 + \frac{0{,}0575}{365}\right)^{365(5)} = 9.331{,}42 \text{ euros}.$$

Finalmente, si se compone de manera continua, el capital final es

$$7.000\,e^{0{,}0575(5)} = 9.331{,}63 \text{ euros}.$$

# EJERCICIOS 6.4

1. Una función lineal tiene pendiente constante. Si el número de habitantes en una población crece una cantidad constante año tras año, se puede representar por una función lineal. Si la población crece un *porcentaje* constante cada año, explicar por qué se puede representar por una función exponencial.

2. Si una población tiene tasa de nacimientos constante y tasa de mortalidad constante (menor que la de nacimientos), describir cómo se comporta a lo largo del tiempo. En su país, la tasa de mortalidad ¿crece, decrece o se mantiene constante? ¿Y la tasa de nacimientos?

3. Explicar, en términos monetarios, por qué para un interés fijado hay más dinero en la cuenta a fin de año cuanto más a menudo se componga el interés.

4. En los ejemplos de crecimiento y de decrecimiento exponencial, la constante $A$ resultaba ser igual al valor inicial. Explicar por qué en los ejemplos de enfriamiento no ocurre lo mismo.

**En los ejercicios 5-12, resolver el problema de valores iniciales.**

5. $y' = 4y, y(0) = 2$
6. $y' = 3y, y(0) = -2$
7. $y' = -3y, y(0) = 5$
8. $y' = -2y, y(0) = -6$
9. $y' = 2y, y(1) = 2$
10. $y' = -y, y(1) = 2$
11. $y' = -3, y(0) = 3$
12. $y' = -2, y(0) = -8$

**Los ejercicios 13-22 se refieren a crecimiento exponencial.**

13. Un cultivo de bacterias duplica su población cada 4 horas. Si la población inicial es 100, hallar una ecuación para la población. ¿Cuándo alcanza el tamaño 6.000?

14. Un cultivo de bacterias triplica su población cada 5 horas. Si la población inicial era 200, hallar una ecuación para la población. ¿Cuándo alcanza el tamaño 20.000?

15. Un cultivo tiene inicialmente 400 bacterias y una hora después 800. Hallar una ecuación para la población y calcular su tamaño a las 10 horas.

16. Un cultivo tiene inicialmente 100 bacterias y dos horas después 400. Hallar una ecuación para la población y calcular su tamaño a las 8 horas.

17. Un cultivo de bacterias crece exponencialmente con constante de crecimiento 0,44 horas$^{-1}$. Calcular su tiempo de duplicación.

18. Un cultivo de bacterias crece exponencialmente con constante de crecimiento 0,12 horas$^{-1}$. Calcular su tiempo de duplicación.

19. Supongamos que una población de *E. coli* se duplica cada 20 minutos. Un tratamiento de la infección elimina el 90% de las *E. coli* presentes y se planifica para conseguir lo siguiente. La población empieza en $10^8$, crece durante $T$ minutos, se aplica el tratamiento y la población vuelve al tamaño $10^8$. Calcular el tiempo $T$.

20. Investigaciones de Meadows, Meadows, Randers y Behrens indican que la Tierra tiene $3{,}2 \times 10^9$ acres de tierra laborable. La población mundial de 1950 necesitaba $10^9$ acres para su sustento y la de 1980 necesitaba $2 \times 10^9$. Si la población aumentara un porcentaje anual constante, ¿en qué año se utilizaría toda la tierra laborable?

21. Una magnitud (un cultivo de bacterias, por ejemplo) crece exponencialmente con ritmo de crecimiento $r$. Probar que el tiempo de duplicación es $\dfrac{\ln 2}{r}$.

22. Una magnitud decrece exponencialmente a ritmo constante $r$. Probar que su semivida es $-\dfrac{\ln 2}{r}$. ¿Cuál es la diferencia entre la semivida aquí y el tiempo de duplicación del ejercicio 21?

**Los ejercicios 23-30 se refieren a decrecimiento exponencial y desintegración radiactiva.**

23. El elemento radiactivo yodo-131 tiene una constante de desintegración de $-1{,}3863$ días$^{-1}$. Calcular su semivida.

24. El elemento radiactivo cesio-137 tiene una constante de desintegración de $-0{,}023$ años$^{-1}$. Calcular su semivida.

25. La semivida de la morfina en la sangre humana es de 3 horas. Si inicialmente hay 0,4 mg de morfina, hallar una ecuación de la presencia de morfina en la sangre en función del tiempo. ¿En qué momento baja hasta 0,01 mg?

26. Con una semivida de 3 horas, ¿en qué porcentaje ha descendido la cantidad de morfina en la sangre en 1 día?

27. El estroncio-90 es un peligroso isótopo radiactivo cuya semivida es 28 años. Por su semejanza con el calcio, es absorbido con facilidad en los huesos. Si con motivo de una explosión nuclear se absorbe en los huesos cierta cantidad, ¿qué porcentaje permanece al cabo de 50 años?

28. La semivida del uranio $^{235}$U es aproximadamente de $0{,}7 \times 10^9$ años. Si se entierran 50 gramos en un cementerio nuclear, ¿cuánto queda al cabo de 100 años?

29. Los científicos estiman que un fósil contiene el 20% de la cantidad original de carbono-14 presente. Recordando que la semivida es de 5.730 años, ¿qué edad aproximada tiene el fósil?

30. En un fósil de un millón de años de antigüedad, ¿qué porcentaje de su carbono-14 original permanece en él?

**Los ejercicios 31-38 se refieren a la ley de enfriamiento de Newton**

31. Un plato con papilla a 200° F (demasiado caliente) se deja en un lugar a 70° F. Un minuto después, está a 180° F. ¿Cuándo estará a la temperatura adecuada de 120° F?

32. Un plato más pequeño con papilla a 200° F (demasiado caliente) se enfría en un minuto hasta 160° F. ¿Qué temperatura (demasiado baja) tendrá cuando el del ejercicio anterior está a punto?

33. Un refresco, que estaba a 50° F, se deja en una habitación a 70° F y en dos minutos llega a 56° F. Hallar la temperatura del refresco en función del tiempo $t$.

34. El refresco del ejercicio 33, ¿a qué temperatura está a los 10 minutos? ¿Cuándo alcanzará los 66° F?

35. A las 10:07 P.M. encuentra usted un agente secreto asesinado. Junto a él, un martini que el agente estaba a punto de tomar cuando fue asesinado. La temperatura de la habitación es de 70° F. El martini se calienta de 60° F a 61° F entre las 10:07 P.M. y las 10:09 P.M. Sabiendo que los martinis de los agentes secretos se sirven siempre a 40° F, ¿a qué hora se produjo el deceso?

36. Veinte minutos después de servir un café, éste está a 160° F, demasiado caliente todavía. Dos minutos después, su temperatura ha bajado a 158° F. Un amigo especula que, puesto que la temperatura está descendiendo 1° F por minuto, fue servido a 180° F. Argumente por qué está equivocado. En el momento de servirlo, el café ¿estaba a más o a menos de 180° F?

37. Calcular la temperatura a la que fue servido el café del ejercicio 36 si la temperatura de la habitación es de 68° F.

38. Para la taza de café del ejemplo 4.3, supongamos que el objetivo fuera enfriarla hasta 120° F en 5 minutos. ¿A qué temperatura debe servirse para tal fin?

**Los ejercicios 39-44 se refieren al interés compuesto.**

39. Si invierte 1.000 euros a una tasa anual del 8%, compare el valor de la inversión al cabo de un año según que la composición del interés sea anual, mensual, diaria o continua.

40. Repetir el ejercicio 39 para el valor de la inversión al cabo de 5 años.

41. La persona A invierte 10.000 euros en 1990 y la persona B invierte 20.000 euros en el año 2000. Si ambos reciben un 12% de interés, compuesto continuamente, ¿cuáles son los valores de sus inversiones en el año 2010?

42. Repetir el ejercicio 41 para una tasa del 4% de interés. A continuación, determinar la tasa de interés para la cual las dos personas terminan con el mismo capital. (Ayuda: Debe hacer que la persona A tenga 20.000 euros en el año 2000).

43. Uno de los autores compró una colección de fichas (cromos) de baloncesto en 1985 por 34 euros cuyo precio de catálogo en 1995 era de 9.800 euros. Suponiendo interés constante, hallar una ecuación para su valor en función del tiempo $t$ (con $t = 0$ correspondiendo a 1985). A ese ritmo, ¿cuál sería su valor en el año 2005?

44. El mismo autor adquirió una colección de fichas de béisbol en 1985 por 22 euros. Su valor de mercado en 1995 era de 32 euros. ¿Cuál será en el año 2005?

45. Supongamos la siguiente estructura de los impuestos: los primeros 30.000 euros pagan un 15%, el resto un 28%. Calcular la tasa $T_1$ de impuestos para unos ingresos de 40.000 euros. Supongamos ahora que la inflación es del 5% y usted recibe un aumento salarial del 5%, con lo que pasa a ingresar 42.000 euros. Calcule la nueva tasa $T_2$ y compare ambas tasas (debe corregir la tasa $T_1$ en el 5% de la inflación).

46. En el ejercicio 45, la estructura de los impuestos se mantenía, pero debido al ajuste por la inflación su tasa de impuestos cambiaba. ¿Qué habría que hacer para mantenerla invariable?

47. Uno de los misterios en la biología de poblaciones es cómo éstas se regulan por sí mismas. Uno de los más llamativos es el caso de los lemmings, que se arrojan por precipicios en tiempos de superpoblación. Es cierto que las poblaciones de lemmings suben y bajan bruscamente por diversas razones (dejando aparte el suicidio). Los ecologistas, en lugar de representar la población respecto del tiempo, representan el logaritmo de la población. Para entender la razón, nótese que, para una población, caer de 1.000 a 500 significa el mismo porcentaje de descenso que de 10 a 5. Probar que las pendientes de esos dos descensos no son iguales, de modo que los descensos parecen distintos en una gráfica población/tiempo. Sin embargo, probar que las pendientes de descenso de los logaritmos de la población (por ejemplo, de ln 1.000 a ln 500) son iguales. En general, si una población cambia a un ritmo porcentual no constante, ¿cómo sería la gráfica de la población respecto del tiempo? ¿Y la de su logaritmo?

48. Demostrar que para cualquier constante $r$, $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = e^{rt}$.

49. Usando los datos de población de bacterias del comienzo de la sección, definir $x$ como el tiempo e $y$ como el logaritmo natural de la población. Marcar los puntos $(x, y)$ y comentar si son aproximadamente lineales. Tomar dos puntos representativos y hallar la ecuación de la recta que los une. A continuación, hallar la función de población $p(x) = e^{y(x)}$.

50. Comparar con un PCS la ecuación de regresión y el modelo del ejercicio 49.

51. Como en el ejercicio 49, hallar un modelo exponencial para los datos de población (0, 10), (1, 15), (2, 22), (3, 33) y (4, 49).

52. Como en el ejercicio 49, hallar un modelo exponencial para los datos de población (0, 20), (1, 16), (2, 13), (3, 11) y (4, 9).

53. Aparte de las estudiadas en esta sección, hay muchas otras ecuaciones diferenciales importantes. En particular, las **ecuaciones de segundo orden** (las que contienen hasta la segunda derivada) juegan un papel central en Física e Ingeniería. La ecuación $y''(x) + 4y'(x) + 3y(x) = 0$ puede describir el movimiento de un muelle, el movimiento de un proyectil o un circuito eléctrico. Para resolverla, empiece por leer la ecuación: estamos buscando una función cuya segunda derivada más cuatro veces la primera cancele exactamente a tres veces la función. De las funciones que hemos estudiado, explicar por qué la exponencial es la candidata más obvia. Busquemos soluciones de la forma $y = e^{rx}$ calculando sus derivadas y sustituyendo en la ecuación. La conclusión es que debe ser $r^2 + 4r + 3 = 0$, así que $r = -3$ o $r = -1$. Verificar que $e^{-3x}$ y $e^{-x}$ son realmente soluciones de esa ecuación diferencial. Demostrar a continuación que para todo par de constantes $c_1$ y $c_2$, la función $c_1e^{-3x} + c_2e^{-x}$ también es solución. Ésta se llama la **solución general**, ya que toda solución es de esa forma. Hallar la solución general de las ecuaciones de segundo orden $y''(x) - 6y'(x) + 8y(x) = 0$ e $y''(x) - 2y'(x) - 3y(x) = 0$.

## 6.5 ECUACIONES DIFERENCIALES SEPARABLES

En la sección 6.4 hemos resuelto la ecuación diferencial

$$y'(t) = k\,y(t).$$

Éste es un ejemplo de ecuación diferencial **separable**, un tipo de ecuaciones que examinaremos con detalle en esta sección. En primer lugar, consideramos la **ecuación diferencial ordinaria de primer orden** más general

$$y' = f(x, y). \tag{5.1}$$

Aquí la derivada $y'$ de cierta función desconocida $y(x)$ viene dada como una función $f$ de $x$ e $y$. Nuestro objetivo es encontrar alguna función $y(x)$ (una **solución**) que satisfaga la ecuación (5.1). La ecuación es de primer orden porque sólo contiene la primera derivada de la función incógnita. Consideraremos el caso en que $x$ e $y$ se puedan separar. Se dice que (5.1) es una **ecuación separable** si podemos separar las variables, es decir, si se puede reescribir en la forma

$$g(y)y' = h(x),$$

con todas las $x$ a un lado y todas las $y$ al otro.

### Ejemplo 5.1 Una ecuación diferencial separable

Decidir si es separable la ecuación diferencial

$$y' = xy^2 - 2xy.$$

**Solución** Es separable porque se puede reescribir como

$$y' = x(y^2 - 2y)$$

y dividiendo entre $(y^2 - 2y)$ (supuesto distinto de cero), obtenemos

$$\frac{1}{y^2 - 2y}\,y' = x.$$

### Ejemplo 5.2 Una ecuación no separable

La ecuación

$$y' = xy^2 - 2x^2y$$

no es separable, ya que no hay manera de escribirla con $x$ e $y$ separadas. (¡Inténtelo!).

Esencialmente, las $x$ y las $y$ deben separarse por multiplicación o división para que la ecuación sea separable. En el ejemplo 5.2, sacando factor común, se tiene $y' = xy(y - 2x)$. Es la diferencia $y - 2x$ la culpable de que no sea separable.

Las ecuaciones diferenciales separables son interesantes porque son fáciles de resolver. En efecto, integrando los dos miembros de

$$g(y)y'(x) = h(x)$$

con respecto a $x$, obtenemos

$$\int g(y)y'(x)\,dx = \int h(x)\,dx. \tag{5.2}$$

Como $dy = y'(x)\,dx$, la integral de la izquierda en (5.2) se convierte en

$$\int g(y)\underbrace{y'(x)\,dx}_{dy} = \int g(y)\,dy.$$

Por tanto, de (5.2) resulta

$$\int g(y)\,dy = \int h(x)\,dx.$$

Así, pues, supuesto que sepamos hallar las dos integrales implicadas, tenemos una ecuación que relaciona $x$ e $y$ en la que ya no aparece $y'$.

### Ejemplo 5.3 Solución de una ecuación separable

Resolver la ecuación diferencial

$$y' = \frac{x^2 + 7x + 3}{y^2}.$$

**Solución** Separando variables, se tiene

$$y^2y' = x^2 + 7x + 3.$$

Integrando ambos lados con respecto a $x$,

$$\int y^2y'(x)\,dx = \int (x^2 + 7x + 3)\,dx,$$

o sea,

$$\int y^2\,dy = \int (x^2 + 7x + 3)\,dx.$$

Efectuando las integraciones, resulta

$$\frac{y^3}{3} = \frac{x^3}{3} + 7\frac{x^2}{2} + 3x + c.$$

En la derecha hemos combinado las dos constantes de integración en una sola, como hemos hecho otras veces.

Ahora podemos despejar $y$:

$$y = \sqrt[3]{x^3 + \frac{21}{2}x^2 + 9x + 3c}.$$

Para cada valor de $c$ obtenemos una solución distinta de la ecuación diferencial. Es lo que se llama una **familia** uniparamétrica **de soluciones** (la **solución general**) de la ecuación diferencial. La figura 6.22 muestra varias soluciones de esa familia.

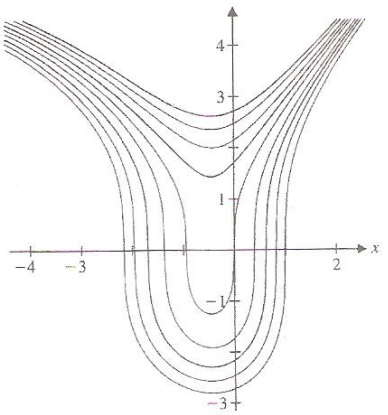



**Figura 6.22**
Una familia de soluciones.

En el caso general, la solución de una ecuación separable de primer orden depende de una constante arbitraria (la constante de integración). Para seleccionar una de las curvas solución hay que especificar un punto por el que pasa la solución buscada, digamos $(x_0, y_0)$. Es decir, exigimos que

$$y(x_0) = y_0.$$

Es lo que se conoce como una **condición inicial** (porque fija el estado inicial de un sistema físico). La ecuación diferencial junto con la condición inicial constituyen un **problema de valores iniciales** (PVI).

### Ejemplo 5.4 Resolución de un problema de valores iniciales

Resolver el PVI

$$y' = \frac{x^2 + 7x + 3}{y^2}, \; y(0) = 3.$$

**Solución** En el ejemplo 5.3 vimos que la solución general de esa ecuación diferencial es

$$y = \sqrt[3]{x^3 + \frac{21}{2}x^2 + 9x + 3c}.$$

Por la condición inicial, debe ser

$$3 = y(0) = \sqrt[3]{0 + 3c} = \sqrt[3]{3c}$$

así que $c = 9$. Por tanto, la solución del PVI propuesto es

$$y = \sqrt[3]{x^3 + \frac{21}{2}x^2 + 9x + 27}.$$

No siempre somos tan afortunados como en el ejemplo 5.4, donde hemos sido capaces de obtener una fórmula explícita de la solución $y$ en términos de $x$. Con frecuencia, debemos conformarnos con una representación **implícita** de la solución, o sea, con una ecuación que relaciona $x$ e $y$, de la que no sabemos despejar $y$ en términos de $x$.

### Ejemplo 5.5 Un PVI que sólo admite solución implícita

Hallar la solución del PVI

$$y' = \frac{9x^2 - \operatorname{sen} x}{\cos y + 5e^y}, \quad y(0) = \pi. \tag{5.3}$$

**Solución** La ecuación diferencial en (5.3) es separable, ya que se puede reescribir como

$$(\cos y + 5e^y)y'(x) = 9x^2 - \operatorname{sen} x. \tag{5.4}$$

Integrando ambos lados de (5.4) respecto de $x$, se obtiene

$$\int (\cos y + 5e^y)y'(x)\,dx = \int (9x^2 - \operatorname{sen} x)\,dx,$$

o sea,

$$\int (\cos y + 5e^y)\,dy = \int (9x^2 - \operatorname{sen} x)\,dx.$$

Evaluando las integrales, resulta

$$\operatorname{sen} y + 5e^y = 3x^3 + \cos x + c. \tag{5.5}$$

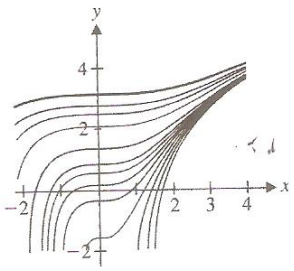



**Figura 6.23a**
Una familia de soluciones.

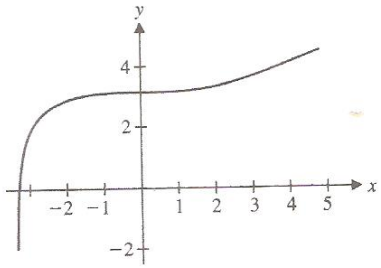



**Figura 6.23b**
La solución del PVI.

No hay manera de despejar $y$ explícitamente en términos de $x$ en esta ecuación. A pesar de ello, podemos dibujar las gráficas de unas cuantas soluciones de esa familia utilizando el modo implícito en la calculadora (figura 6.23a).

Aunque no hemos expresado $y$ explícitamente como función de $x$, podemos usar la condición inicial. Basta sustituir $x = 0$, $y = \pi$ en (5.5), con lo que se tiene

$$\operatorname{sen} \pi + 5e^{\pi} = 0 + \cos 0 + c,$$

es decir,

$$5e^{\pi} - 1 = c.$$

Obtenemos así

$$\operatorname{sen} y + 5e^{y} = 3x^3 + \cos x + 5e^{\pi} - 1$$

como representación implícita de la solución del PVI. No podemos despejar explícitamente $y$ en términos de $x$. Eso sí, dado cualquier valor particular de $x$ podemos hallar el correspondiente valor aproximado de $y$ (por el método de Newton, por ejemplo). Eso es lo que hace esencialmente un PCS (con muchísimos puntos) cuando le pedimos una gráfica en modo implícito. La figura 6.23b muestra la gráfica de la solución.

## Crecimiento logístico

En la sección 6.4 introdujimos la ecuación diferencial

$$y' = ky$$

como modelo de crecimiento de poblaciones. Ya advertimos que el modelo era válido sólo si los recursos y el espacio disponibles eran ilimitados. Pero, claro está, **todas** las poblaciones tienen factores que limitan su crecimiento. Por esa razón, el modelo anterior sólo es válido en pequeños intervalos de tiempo.

Para plantear un modelo más realista, parece razonable suponer que la población crece a un ritmo proporcional a su tamaño, pero que hay un máximo tamaño $M$ (la **capacidad límite**) del que no puede pasar. Además, conforme la población se acerca al valor $M$ y los recursos van siendo más escasos, la población crecerá más lentamente. Así, pues, podemos suponer que el ritmo de crecimiento es proporcional tanto al tamaño $y(t)$ de la población presente como a la diferencia entre ese tamaño y la capacidad límite. Es decir,

$$y'(t) = ky\,(M - y).$$

Esta ecuación diferencial es la llamada **ecuación logística**.

**Notas históricas**

**Pierre Verhulst (1804-1849).** Matemático belga, propuso el modelo logístico para el crecimiento de poblaciones. Profesor en Bruselas, investigó en teoría de números y en Estadística social. Su contribución más importante fue la ecuación logística (llamada también ecuación de Verhulst), el primer modelo realista de poblaciones con recursos limitados. Su estimación de la población de equilibrio para Bélgica ajusta muy bien el dato real.

Saltan a la vista dos soluciones de esta ecuación: las funciones constantes $y = 0$ e $y = M$. Se llaman **soluciones de equilibrio** porque, bajo la hipótesis de crecimiento logístico, una vez que la población alcanza uno de esos valores, lo mantiene para siempre.

Si $y \neq 0$ e $y \neq M$, podemos resolver la ecuación, ya que es separable:

$$\frac{1}{y(M-y)}\, y'(t) = k. \tag{5.6}$$

Integrando los dos miembros de (5.6) en $t$, obtenemos

$$\int \frac{1}{y(M-y)}\, y'(t)\, dt = \int k\, dt,$$

o sea,

$$\int \frac{1}{y(M-y)}\, dy = \int k\, dt, \tag{5.7}$$

Esa fracción se puede expresar como suma de otras dos, como sigue:

$$\frac{1}{My} + \frac{1}{M(M-y)} = \frac{M-y}{My(M-y)} + \frac{y}{My(M-y)} = \frac{1}{y(M-y)}. \tag{5.8}$$

Aunque tal vez no adivine cómo hemos dado con ellas, observe que las dos fracciones de la izquierda en (5.8) son muy fáciles de integrar. Este procedimiento que permite expresar una fracción como suma de otras más simples es un ejemplo de **descomposición en fracciones simples**, una técnica muy útil que estudiaremos en la sección 7.4. De (5.7) y (5.8) se sigue que

$$\int \left[ \frac{1}{My} + \frac{1}{M(M-y)} \right] dy = \int k\, dt.$$

Efectuando la integración, queda

$$\frac{1}{M} \ln |y| - \frac{1}{M} \ln |M-y| = kt + c.$$

Multiplicando por $M$ y recordando que $0 < y < M$, resulta

$$\ln y - \ln(M-y) = k\,Mt + Mc.$$

Tomando exponenciales en ambos lados, se tiene

$$\exp[\ln y - \ln(M-y)] = e^{k\,Mt+Mc} = e^{k\,Mt} e^{Mc}.$$

Usando ahora las reglas de exponentes y logaritmos y llamando $A$ al término constante $e^{Mc}$, obtenemos

$$\frac{y}{M-y} = A\, e^{k\,Mt}. \tag{5.9}$$

Multiplicando por $(M-y)$ se convierte en

$$\begin{aligned} y &= A\, e^{k\,Mt}(M-y) \\ &= AM\, e^{k\,Mt} - A\, e^{k\,Mt} y. \end{aligned}$$

Combinando los dos términos con $y$, eso se reescribe

$$y(1 + A\, e^{k\,Mt}) = AM\, e^{k\,Mt}.$$

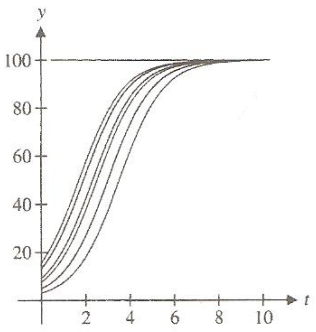



**Figura 6.24**
Varias curvas solución.

Finalmente, podemos despejar $y$ para expresar explícitamente la solución general de la ecuación logística:

$$y = \frac{AM\,e^{kMt}}{1 + A\,e^{kMt}}. \tag{5.10}$$

La figura 6.24 muestra varias de estas curvas solución para varios valores de $A$ (en la figura $M = 100$ y $k = 0{,}01$) junto con la solución de equilibrio $y = 100$. En la figura se aprecia que las curvas de crecimiento logístico arrancan con un crecimiento casi exponencial, después pasan a ser cóncavas hacia abajo y más adelante tienden asintóticamente al máximo $M$.

## Ejemplo 5.6 Un problema de crecimiento logístico

Dada una capacidad límite $M = 1.000$ (esto puede medirse en millones, toneladas...) y un ritmo de crecimiento $r = 0{,}007$, hallar una expresión $y(t)$ para la población en función del tiempo $t$ si la población inicial es $y(0) = 350$.

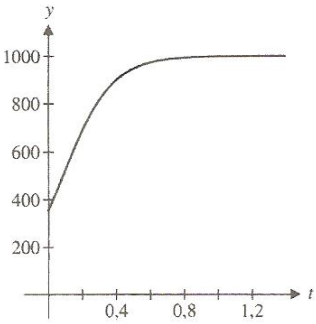



**Figura 6.25**
$y = \dfrac{35.000e^{7t}}{65 + 35e^{7t}}$.

**Solución** De la solución (5.10) de la ecuación logística deducimos que

$$y = \frac{1.000A\,e^{7t}}{1 + A\,e^{7t}}.$$

La condición inicial exige que

$$350 = y(0)\ \frac{1.000A}{1 + A}.$$

Despejando $A$, resulta $A = \frac{35}{65}$, así que la solución del PVI propuesto es

$$y = \frac{35.000e^{7t}}{65 + 35e^{7t}}.$$

La figura 6.25 muestra la gráfica de la solución.

# EJERCICIOS 6.5

1. Discutir las diferencias entre resolver ecuaciones algebraicas (por ejemplo, $x^2 - 1 = 0$) y resolver ecuaciones diferenciales. Especificar qué tipo de ente matemático se busca en cada caso.

2. Una ecuación diferencial es no separable si no se puede escribir en la forma $g(y)y' = h(x)$. ¿Cómo se sabe si una ecuación es no separable o si lo que ocurre es que no acertamos a escribirla en la forma adecuada? Discutir formas generales (como $x + y$ o $xy$) que dan claves para distinguirlo.

3. Las curvas solución en las figuras 6.22, 6.23a y 6.24 no parecen cortarse. Y es cierto. Si dos curvas solución se cortasen en un punto $(x_1, y_1)$, habría dos soluciones con la misma condición inicial $y(x_1) = y_1$. Explicar por qué eso no puede suceder. Comentar por qué eso es importante en el contexto de la ecuación logística como modelo de poblaciones.

4. La ecuación logística incluye un término que frena el crecimiento cuando la población es alta. Discutir las razones que hacen que eso ocurra en situaciones realistas.

**En los ejercicios 5-12, averiguar si la ecuación diferencial es separable.**

5. $y' = (3x + 1)\cos y$
6. $y' = 2x(y - 1)$
7. $y' = (3x + y)\cos y$
8. $y' = 2x(y - x)$
9. $y' = x^2y + y\cos x$
10. $y' = 2x\cos y - xy^3$
11. $y' = x^2y - x\cos y$
12. $y' = x^3 - 2x + 1$

**En los ejercicios 13-26, la ecuación es separable. Hallar la solución general, en forma explícita si es posible. Dibujar algunas de las soluciones.**

13. $y' = (x^2 + 1)\,y$
14. $y' = 2x(y - 1)$
15. $y' = 2x^2y^2$
16. $y' = 2(y - 1)$
17. $y' = \dfrac{6x^2}{y(1 + x^3)}$
18. $y' = \dfrac{3x}{y + 1}$
19. $y' = \dfrac{4x^2}{y^2}$
20. $y' = \dfrac{x^2 + 1}{y}$
21. $y' = y^2 - y$
22. $y' = e^{-y}$
23. $y' = \dfrac{xy}{1 + x^2}$
24. $\dfrac{2}{xy + y}$
25. $y' = \dfrac{4 \operatorname{sen} x}{y^3}$
26. $y' = \dfrac{x(y^2 + 1)}{2y}$

**En los ejercicios 27-34, resolver el PVI, explícitamente si es posible.**

27. $y' = 3(x + 1)^2 y,\ y(0) = 1$
28. $y' = \dfrac{x - 1}{y^2},\ y(0) = 2$
29. $y' = \dfrac{4x^2}{y},\ y(0) = 2$
30. $y' = \dfrac{x - 1}{y},\ y(0) = -2$
31. $y' = \dfrac{4y}{x + 3},\ y(-2) = 1$
32. $y' = \dfrac{3x}{4y + 1},\ y(1) = 4$
33. $y' = \dfrac{4x}{\cos y},\ y(0) = 0$
34. $y' = \dfrac{\tan y}{x},\ y(1) = \dfrac{\pi}{2}$

**En los ejercicios 35-40, usar la ecuación (5.10) como ayuda para resolver el PVI.**

35. $y' = 3y(2 - y),\ y(0) = 1$
36. $y' = y(3 - y),\ y(0) = 2$
37. $y' = 2y(5 - y),\ y(0) = 4$
38. $y' = y(2 - y),\ y(0) = 1$
39. $y' = y(1 - y),\ y(0) = \frac{3}{4}$
40. $y' = y(3 - y),\ y(0) = 0$

41. La ecuación logística se escribe a veces como $y'(t) = ry(t)(1 - y(t))/M$. Probar que esto es equivalente a (5.6) con $r/M = k$. Los biólogos han medido los valores de la capacidad límite $M$ y del ritmo de crecimiento $r$ para diversos tipos de peces. Para el halibut, $r = 0{,}71$ años$^{-1}$ y $M = 8 \times 10^7$ kg. Si la biomasa inicial del halibut es $y(0) = 2 \times 10^7$ kg, hallar una ecuación para su biomasa en función del tiempo. Esbozar su gráfica.

42. Estimar cuánto tardará la biomasa del ejercicio 41 en estar a menos de un 10% de la capacidad límite.

43. Hallar la solución de la ecuación (5.6) si $y(t) > M$.

44. Usando la solución del ejercicio 43 y los parámetros del ejercicio 41 para el halibut, responder la siguiente pregunta: Si la biomasa del halibut explotara hasta $3 \times 10^8$ kg, ¿cuánto tardaría en volver a estar a menos de un 10% de su capacidad límite?

**En los ejercicios 45-50, hallar las soluciones de equilibrio. Una solución de equilibrio es una solución constante, que, por tanto, es solución de $y' = 0$. Hallar todos los valores de $y$ tales que $y' = 0$.**

45. $y' = 3y(2 - y)$
46. $y' = y(3 - y)$
47. $y' = 3y(4 - y^2)$
48. $y' = 3y(1 - y^2)$
49. $y' = e^y(1 - y)$
50. $y' = \cos y - y^2$

51. Para recalcar el significado de las soluciones de equilibrio de los ejercicios 45-50, hallar la solución de la ecuación logística del ejercicio 45 que cumple las condiciones iniciales: (a) $y(0) = 0$, (b) $y(0) = 2$.

52. Hallar la solución de la ecuación logística del ejercicio 46 con las condiciones iniciales (a) $y(0) = 0$, (b) $y(0) = 3$.

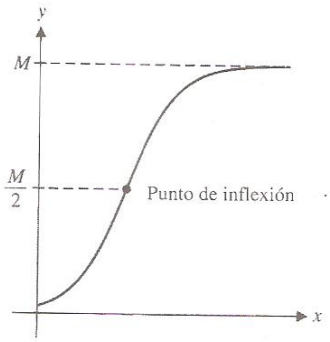
53. La velocidad de un objeto en caída obedece a la ecuación diferencial $\dfrac{dv}{dt} = 32 - 0{,}4v^2$. Si $v(0) = 0$, la velocidad crecerá hasta una cierta **velocidad terminal**. La velocidad terminal es una solución de equilibrio para la cual la fuerza de rozamiento (hacia arriba) cancela exactamente la fuerza gravitacional (hacia abajo). Calcular la velocidad terminal.

54. Un objeto más aerodinámico que el del ejercicio 53 tiene un menor coeficiente de rozamiento, lo que produce para él una ecuación $\dfrac{dv}{dt} = 32 - 0{,}2v^2$. Calcular su velocidad terminal.

55. En algunas reacciones químicas, una molécula de la sustancia A reacciona con otra de la sustancia B y producen una de la sustancia X. Si inicialmente hay 10 g de A y 12 de B, la cantidad $x(t)$ de X formada en el instante $t$ satisface el PVI $x'(t) = r(10 - x)(12 - x),\ x(0) = 0$. Explicar por qué tiene sentido suponer que $0 \le x < 10$. Resolver el PVI e indicar dónde se necesita esa hipótesis.

56. La ecuación diferencial $y' = -ay \ln(y/b)$ ($a$, $b$ constantes positivas) aparece en el estudio del crecimiento de ciertos tumores en animales. Resolver la ecuación y dibujar varias soluciones. ¿Qué adjetivo (rápido, moderado, lento) aplicaría a este tipo de crecimiento?

57. Es interesante el hecho de que el punto de inflexión en la solución de la ecuación logística (figura adjunta) ocurre en $y = \frac{1}{2}M$. Puede verificarse derivando dos veces (5.10) y exigiendo que $y'' = 0$, pero es muy engorroso y además daría la solución en



términos de $t$, no de $y$. En vez de eso, es preferible derivar los dos miembros de la ecuación diferencial $y' = ky(M - y)$. (Ayuda: Usar las reglas del producto y de la cadena en el lado derecho). Así, se obtiene $y'' = ky'(M - 2y)$. Por tanto, $y'' = 0$ si, y sólo si, $y' = 0$ o $y = \frac{1}{2}M$. Rechace $y' = 0$ viendo cómo se comporta la solución en los valores de equilibrio.

58. Usar la técnica del ejercicio 57 para demostrar que la solución de $y' = -ay \ln(y/b)$ ($a$, $b$ constantes positivas) tiene al menos un punto de inflexión, que está localizado en $y = b/e$.

59. Un modelo para la velocidad del transbordador espacial a su regreso (sección 4.1) es $v'(t) = -32 + 0{,}003v^2$, $v(0) = 0$, donde $v$ se mide en pies/s. Para resolver esta ecuación separable conviene usar la descomposición en fracciones simples

$$\frac{1}{v^2 - a} = \frac{1/2a}{v - a} - \frac{1/2a}{v + a},$$

donde

$$a = \sqrt{32.000/3} = 80\sqrt{5/3}.$$

Probar que

$$v(t) = a\,\frac{1 - e^{kt}}{1 + e^{kt}},$$

donde

$$k = 4\sqrt{15}/25.$$

60. Calcular la velocidad terminal en el ejercicio 59 evaluando $\lim_{t \to \infty} v(t)$.

61. Sobre un objeto que se mueve por el aire actúan la gravedad (vertical), la resistencia del aire (en sentido opuesto a la velocidad) y otras fuerzas (un motor, por ejemplo). Una ecuación para el movimiento horizontal de un avión a reacción es $v' = c - f(v)/m$, donde $c$ es la fuerza de empuje del motor y $f(v)$ la fuerza de resistencia del aire. En ciertos rangos de velocidad, la resistencia del aire **baja** mucho cuando se producen turbulencias en torno al objeto. Como ejemplo, supongamos que

$$v' = 32.000 - f(v), \text{ con } f(v) = \begin{cases} 0{,}8v^2 & \text{si } 0 \le v \le 100 \\ 0{,}2v^2 & \text{si } 100 < v \end{cases}.$$

Para resolver el PVI $v' = 32.000 - f(v)$, $v(0) = 0$, partimos del PVI $v' = 32.000 - 0{,}8v^2$, $v(0) = 0$. Resolver este PVI $\left[\text{Ayuda: } \frac{1}{40.000 - v^2} = \frac{1}{400}\left(\frac{1}{200 + v} + \frac{1}{200 - v}\right)\right]$ y determinar el instante $t$ en el que $v(t) = 100$. A partir de ese momento, la ecuación se convierte en $v' = 32.000 - 0{,}2v^2$. Resolver el PVI $v' = 32.000 - 0{,}2v^2$, $v(0) = 100$. Combinar esta solución con la anterior para obtener una solución válida en todo instante.

## 6.6 EL MÉTODO DE EULER

**Notas históricas**

**Leonhard Euler (1707-1783).** Las obras completas de este matemático suizo, uno de los autores más prolíficos de todos los tiempos, ocupan un centenar de volúmenes. Buena parte de su obra la llevó a cabo en sus últimos 20 años de vida, después de quedar ciego. Aportó contribuciones decisivas en numerosos campos de investigación: Cálculo, teoría de números, cálculo de variaciones, variable compleja, teoría de grafos y ecuaciones diferenciales. George Simmons se refiere a Euler como «el Shakespeare de las Matemáticas: universal, sutil e inagotable».

En la sección 6.5 vimos cómo se pueden resolver las ecuaciones diferenciales de primer orden separables. Si bien es cierto que hay muchas otras cuyas soluciones son conocidas (las estudiará si sigue un curso de ecuaciones diferenciales), la inmensa mayoría no se puede resolver exactamente. Por ejemplo, la ecuación

$$y' = x^2 + y^2 + 1$$

no es separable y no se puede resolver por las técnicas habituales. Sin embargo, se puede deducir **algo** de información acerca de sus soluciones. Por ejemplo, como $y' = x^2 + y^2 + 1 > 0$, toda solución es una función creciente. Este tipo de información se dice que es **cualitativa**, ya que establece alguna cualidad de la solución sin dar información cuantitativa.

En esta sección examinamos ecuaciones diferenciales de primer orden de la forma más general

$$y' = f(x, y). \tag{6.1}$$

No sabremos resolverlas, pero hay métodos numéricos que permiten aproximar sus soluciones. Estudiaremos un método simple, el llamado método de Euler.

Empezamos haciendo constar que toda solución de (6.1) es una función $y = y(x)$ cuya pendiente en cualquier punto particular $(x, y)$ viene dada por $f(x, y)$. Para tener una idea de cómo puede ser la solución, trazamos un pequeño segmento recto en cada punto $(x, y)$ con pendiente $f(x, y)$. Esta colección de segmentos es el **campo de direcciones** o **campo de pendientes** de la ecuación diferencial. Si una curva solución pasa por $(x, y)$ debe hacerlo con pendiente $f(x, y)$. Por tanto, el campo de pendientes indica el comportamiento de la familia de soluciones de la ecuación diferencial.

### Ejemplo 6.1 Construcción de un campo de pendientes

Construir el campo de pendientes de

$$y' = \frac{1}{2}y. \tag{6.2}$$

**Solución** Todo cuanto debemos hacer es marcar unos cuantos puntos $(x, y)$ y en cada uno de ellos un pequeño segmento recto con pendiente $f(x, y)$. Así, en el punto $(0, 1)$ trazamos un segmento con pendiente

$$y'(0) = f(0, 1) = \frac{1}{2}(1) = \frac{1}{2}.$$

Hacer eso mismo en 25 o 30 puntos a mano es tedioso, pero una calculadora facilita la tarea. La figura 6.26a muestra el campo de direcciones de la ecuación (6.2). Es una ecuación separable. Dejamos como ejercicio probar que su solución general es

$$y = A\, e^{\frac{1}{2}x}.$$

La figura 6.26b muestra varias de esas curvas solución en la misma ventana gráfica de la figura 6.26a. Nótese que si conectamos varios segmentos rectos de la figura 6.26a, obtenemos una buena aproximación a las curvas de la figura 6.26b.

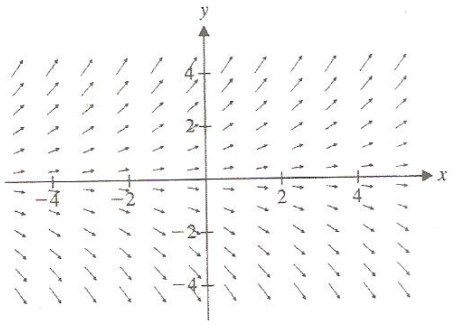



**Figura 6.26a**
Campo de direcciones para $y' = \frac{1}{2}y$.

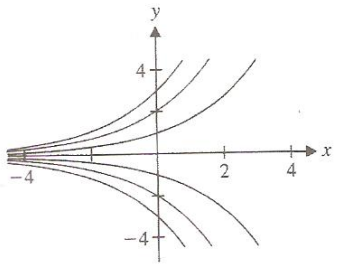



**Figura 6.26b**
Varias soluciones de $y' = \frac{1}{2}y$.

Lo notable de esto es que la figura 6.26a se ha elaborado usando álgebra elemental, **sin** resolver previamente la ecuación diferencial. Es decir, construyendo sólo el campo de direcciones hemos obtenido una gráfica razonablemente buena de cómo se comportan las curvas solución. Dado que la mayoría de las ecuaciones diferenciales no se pueden resolver exactamente, esta observación adquiere un interés extraordinario. Es lo que se entiende por información cualitativa sobre la solución: tenemos idea de cómo se comporta, pero no conocemos detalles como su valor en un punto concreto. Veremos más adelante, en esta sección, cómo aproximar los valores de la solución de un PVI numéricamente.

Como ya hemos dicho, las ecuaciones diferenciales sirven para describir una gran variedad de fenómenos físicos, por ejemplo, las líneas de flujo o las líneas equipotenciales de campos electromagnéticos. Resulta muy útil visualizar las soluciones gráficamente para entender el comportamiento de las soluciones y el fenómeno subyacente.

### Ejemplo 6.2 Visualización del comportamiento de las soluciones en un campo de pendientes

Construir el campo de pendientes de

$$y' = x + e^{-y}.$$

**Solución** Basta trazar unos cuantos segmentos rectos con pendientes adecuadas. Dejamos, una vez más, que un PCS haga el trabajo y obtenemos la figura 6.27a. A diferencia del ejemplo 6.1, no sabemos resolver la ecuación exactamente.

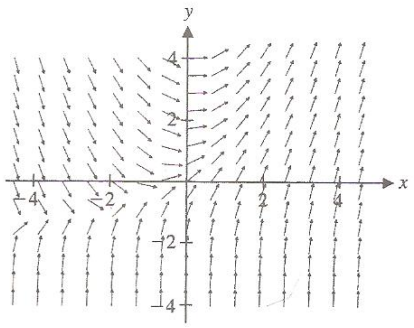



**Figura 6.27a**
Campo de direcciones para $y' = x + e^{-y}$,

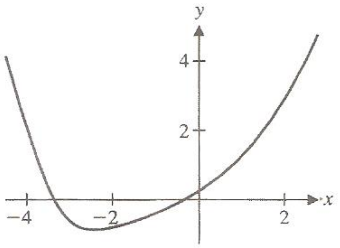



**Figura 6.27b**
Solución de $y' = x + e^{-y}$ que pasa por (–4, 2).

A pesar de ello, en la figura se aprecia claramente el comportamiento de las soluciones. Por ejemplo, las soluciones que arrancan del segundo cuadrante decrecen inicialmente muy deprisa, pueden entrar en el tercer cuadrante y desde allí ir al primer cuadrante, donde crecen rápidamente hacia el infinito. Extraída con un poco de álgebra elemental, no cabe duda de que es información valiosa. La figura 6.27b muestra la solución que satisface la condición inicial $y(-4) = 2$. Más tarde, en esta sección, veremos cómo generar una tal solución particular aproximada. Nótese lo bien que ajusta con lo obtenido al unir unos cuantos segmentos del campo de pendientes.

---

Ya sabemos (secciones 6.4 y 6.5) que las ecuaciones diferenciales sirven como modelos de la evolución de poblaciones. Un modelo que incluye un **umbral crítico** es

$$P'(t) = -2[1 - P(t)][2 - P(t)]P(t),$$

donde $P(t)$ representa la población en el tiempo $t$.

El significado del umbral crítico se entiende bien en la situación producida por una peste. Por ejemplo, suponga que intenta eliminar las hormigas en su casa. Mientras el ritmo de reproducción de las hormigas sea menor que el ritmo al que las extermina, tendrá la población de hormigas bajo control. Pero tan pronto como pase a ser mayor que el ritmo de exterminio (o sea, si traspasa el umbral crítico), perderá el control y tendrá que enfrentarse a un serio problema con las hormigas. Este tipo de comportamiento aparece en el próximo ejemplo.

### Ejemplo 6.3 Crecimiento de población con umbral crítico

Dibujar el campo de direcciones de

$$P'(t) = -2[1 - P(t)][2 - P(t)]P(t)$$

y discutir cómo evoluciona el tamaño de la población.

**Solución** En este caso, el campo de direcciones es fácil de dibujar porque el lado de la derecha depende de $P$, pero no de $t$.

Si $P(t) = 0$, entonces $P'(t) = 0$ también, así que el campo de pendientes es horizontal. Lo mismo es cierto para $P(t) = 1$ y $P(t) = 2$.

Si $0 < P(t) < 1$, entonces $P'(t) < 0$ y la solución decrece.

Si $1 < P(t) < 2$, entonces $P'(t) > 0$ y la solución crece.

Finalmente, si $P(t) > 2$, es $P'(t) < 0$ y la solución decrece. Reuniendo toda esa información, se obtiene el campo de pendientes de la figura 6.28. Las soluciones constantes $P(t) = 0$, $P(t) = 1$ y $P(t) = 2$ se llaman **soluciones de equilibrio**.

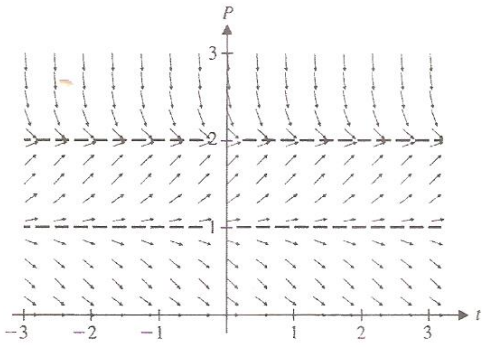



**Figura 6.28**
Campo de direcciones para
$P'(t) = -2[1 - P(t)][2 - P(t)]P(t)$.

Se dice que $P(t) = 1$ es un **equilibrio inestable**, ya que las poblaciones inicialmente próximas a 1 no permanecen cercanas a 1. $P(t) = 0$ y $P(t) = 2$ son **equilibrios estables**, porque las poblaciones crecen hasta 2 o caen a 0 (extinción) dependiendo de a qué lado del umbral crítico $P(t) = 1$ estén. (Mire de nuevo la figura 6.28).

---

Cuando estemos interesados en hallar una solución particular, la gran cantidad de flechas en el dibujo puede confundirnos. El método de Euler, que presentaremos en seguida, permite aproximar una curva solución particular. Es un método muy simple, basado en el campo de direcciones. Sin embargo, el método de Euler no es muy preciso. En los ejercicios se explora un método más refinado.

Consideremos el PVI

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

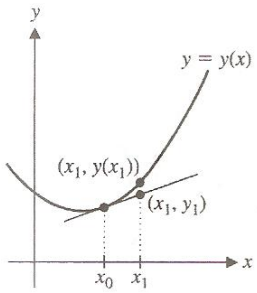



**Figura 6.29**
Aproximación por la recta tangente.

Suponiendo que exista solución $y = y(x)$, la ecuación nos dice que la **pendiente** de la recta tangente a la curva solución en un punto $(x, y)$ es $f(x, y)$. Recordemos que la recta tangente permanece próxima a la curva en un entorno del punto de tangencia. Ésta fue la idea clave del método de Newton y de las diferenciales. Ya conocemos un punto de la gráfica de $y = y(x)$: el punto inicial $(x_0, y_0)$. Si queremos aproximar $y(x_1)$, el valor de la solución en $x = x_1$ (véase figura 6.29), y $x_1$ está cerca de $x_0$, podemos seguir la recta tangente en $(x_0, y_0)$ hasta el punto con $x = x_1$ y usar el valor $y_1$ de $y$ en ese punto como aproximación de $y(x_1)$. Es el mismo orden de ideas utilizado en las aproximaciones por el método de Newton y las diferenciales (recta tangente).

La ecuación de la recta tangente en $x = x_0$ es

$$y = y_0 + y'(x_0)(x - x_0).$$

Así, pues, una aproximación del valor de la solución en $x = x_1$ es la coordenada $y$ de la recta tangente a su paso por $x = x_1$, es decir,

$$y(x_1) \approx y_1 = y_0 + y'(x_0)(x_1 - x_0). \tag{6.3}$$

Basta una mirada a la figura 6.29 para darse cuenta de que esta aproximación sólo es válida cuando $x_1$ está muy cerca de $x_0$. Al resolver un PVI estamos interesados, sin embargo, en hallar el valor de la solución en un intervalo $[a, b]$ del eje $x$. Si no podemos encontrar la solución exacta, lo que hacemos es ir aproximando sus valores en una secuencia de puntos en $[a, b]$. Pero esta aproximación sólo será válida para puntos muy próximos al inicial. En

otros puntos, podemos aproximar la solución como sigue. Partimos $[a, b]$ en $n$ subintervalos de igual tamaño (una **partición regular**, ¿dónde lo hemos hecho antes?):

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b,$$

donde

$$x_{i+1} - x_i = h,$$

para $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Se dice que $h$ es el **paso**. La aproximación por la recta tangente (6.3) da

$$\begin{aligned} y(x_1) &\approx y_1 = y_0 + y'(x_0)(x_1 - x_0) \\ &= y_0 + hf(x_0, y_0), \end{aligned}$$

donde hemos sustituido $(x_1 - x_0)$ por el paso $h$ y hemos utilizado la ecuación diferencial para escribir $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$. Ahora queremos aproximar el valor de $y(x_2)$. Podríamos usar la recta tangente en el punto $(x_1, y(x_1))$ para obtener una aproximación por recta tangente, pero no conocemos la coordenada $y$ del punto de tangencia, $y(x_1)$. Lo que sí tenemos es una aproximación, obtenida en el paso anterior. Así, pues, hacemos la aproximación

$$\begin{aligned} y(x_2) &\approx y(x_1) + y'(x_1)(x_2 - x_1) \\ &= y(x_1) + hf(x_1, y(x_1)), \end{aligned}$$

donde hemos usado la ecuación diferencial para reemplazar $y'(x_1)$ por $f(x_1, y(x_1))$ y el hecho de que $x_2 - x_1 = h$. Finalmente, tomamos para $y(x_1)$ el valor aproximado $y_1$ hallado en el paso previo, con lo que

$$\begin{aligned} y(x_2) &\approx y(x_1) + hf(x_1, y(x_1)) \\ &\approx y_1 + hf(x_1, y_1) = y_2. \end{aligned}$$

Continuando este proceso, obtenemos una secuencia de valores aproximados

**Método de Euler**

$$\boxed{y(x_{i+1}) \approx y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \text{ para } i = 0, 1, 2, \ldots} \tag{6.4}$$

Este método de aproximación por rectas tangentes se conoce como **método de Euler**.

### Ejemplo 6.4 Aplicación del método de Euler

Usar el método de Euler para aproximar la solución del PVI

$$y' = y, \quad y(0) = 1.$$

**Solución** Claro está que ésta es la ecuación diferencial más simple imaginable. Si no la ha resuelto ya a simple vista, tenga en cuenta que es separable y verá que la solución del PVI es $y = y(x) = e^x$. Usaremos esta solución exacta para contrastar la aproximada que nos va a dar el método de Euler. Tomando $h = 1$ en (6.4), con $f(x, y) = y$, se tiene

$$\begin{aligned} y(x_1) &\approx y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) \\ &= y_0 + hy_0 = 1 + 1(1) = 2. \end{aligned}$$

Del mismo modo, las siguientes aproximaciones son

$$\begin{aligned} y(x_2) &\approx y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) \\ &= y_1 + hy_1 = 2 + 1(2) = 4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(x_3) &\approx y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2) \\ &= y_2 + hy_2 \\ &= 4 + 1(4) = 8, \end{aligned}$$

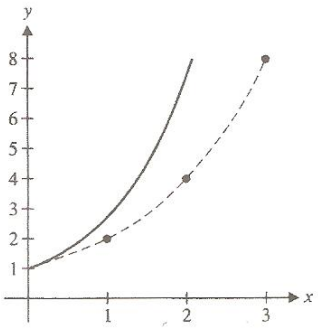



**Figura 6.30**
Comparación de la solución exacta y la solución aproximada (línea discontinua)

y así sucesivamente. Así, construimos una secuencia de valores aproximados de la función solución. En la figura 6.30 pueden verse la solución exacta (línea continua) y la aproximada (línea de trazos discontinuos). Se observa que el error crece al alejarnos del punto inicial. Eso es típico del método de Euler y de otros similares.

Este aumento del error queda aún más claro si elaboramos una tabla de valores exactos y aproximados. En la tabla que sigue hemos tomado $h = 0{,}1$ (los valores se expresan con siete dígitos).

| *x* | *Euler* | *Exacto* | *Error = Exacto – Euler* |
|---|---|---|---|
| 0,1 | 1,1 | 1,1051709 | 0,0051709 |
| 0,2 | 1,21 | 1,2214028 | 0,0114028 |
| 0,3 | 1,331 | 1,3498588 | 0,0188588 |
| 0,4 | 1,4641 | 1,4918247 | 0,0277247 |
| 0,5 | 1,61051 | 1,6487213 | 0,0382113 |
| 0,6 | 1,71561 | 1,8221188 | 0,1065088 |
| 0,7 | 1,9487171 | 2,0137527 | 0,0650356 |
| 0,8 | 2,1435888 | 2,2255409 | 0,0819521 |
| 0,9 | 2,3579477 | 2,4596031 | 0,1016554 |
| 1,0 | 2,5937425 | 2,7182818 | 0,1245393 |

Como cabe esperar, cuanto menor sea el valor de $h$, más precisa tiende a ser la aproximación. Paralelamente, son necesarios más pasos para alcanzar un cierto valor de $x$. La tabla siguiente muestra la aproximación de Euler, el error y el número de pasos necesarios para llegar a $x = 1$. El valor exacto de la solución en $x = 1$ es $y = e^1 \approx 2{,}718281828459$.

| *x* | *Euler* | *Error = Exacto – Euler* | *Número de pasos* |
|---|---|---|---|
| 1,0 | 2 | 0,7182818 | 1 |
| 0,5 | 2,25 | 0,4682818 | 2 |
| 0,25 | 2,4414063 | 0,2768756 | 4 |
| 0,125 | 2,5657845 | 0,1524973 | 8 |
| 0,0625 | 2,6379285 | 0,0803533 | 16 |
| 0,03125 | 2,6769901 | 0,0412917 | 32 |
| 0,015625 | 2,697345 | 0,0209369 | 64 |
| 0,0078125 | 2,707739 | 0,0105428 | 128 |
| 0,00390625 | 2,7129916 | 0,0052902 | 256 |

Observe que cada vez que $h$ se divide entre dos el error se reduce aproximadamente a la mitad. Esta precisión creciente exige pagar un precio: mayor número de pasos para llegar al punto deseado (se duplica al dividir $h$ entre dos).

---

Naturalmente, un método capaz de aproximar las soluciones sólo es necesario cuando no se sabe hallar la solución exacta. El próximo ejemplo es de esta clase.

**Ejemplo 6.5** **Cálculo de una solución aproximada**

Hallar una solución aproximada del PVI

$$y' = x^2 + y^2,\ y(-1) = -\frac{1}{2}.$$

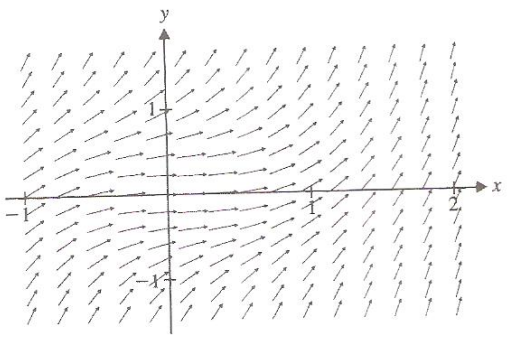



**Figura 6.31**
Campo de direcciones para $y' = x^2 + y^2$.

**Solución** El campo de direcciones (figura 6.31) nos da una idea de cómo se comportan las soluciones. Por el método de Euler, con $h = 0{,}1$,

$$\begin{aligned} y(x_1) \approx y_1 &= y_0 + hf(x_0, y_0) \\ &= y_0 + h(x_0^2 + y_0^2) \\ &= -\frac{1}{2} + 0{,}1\left[(-1)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2\right] = -0{,}375 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(x_2) \approx y_2 &= y_1 + hf(x_1, y_1) \\ &= y_1 + h(x_1^2 + y_1^2) \\ &= -0{,}375 + 0{,}1[(-0{,}9)^2 + (-0{,}375)^2] = -0{,}2799375, \end{aligned}$$

y así sucesivamente. Continuando el proceso, se genera la siguiente tabla de valores:

| $x$ | *Euler* | $x$ | *Euler* | $x$ | *Euler* |
|---|---|---|---|---|---|
| –0,9 | –0,375 | 0,1 | –0,0575822 | 1,1 | 0,3369751 |
| –0,8 | –0,2799375 | 0,2 | –0,0562506 | 1,2 | 0,4693303 |
| –0,7 | –0,208101 | 0,3 | –0,0519342 | 1,3 | 0,6353574 |
| –0,6 | –0,1547704 | 0,4 | –0,0426645 | 1,4 | 0,8447253 |
| –0,5 | –0,116375 | 0,5 | –0,0264825 | 1,5 | 1,1120813 |
| –0,4 | –0,0900207 | 0,6 | –0,0014123 | 1,6 | 1,4607538 |
| –0,3 | –0,0732103 | 0,7 | 0,0345879 | 1,7 | 1,9301340 |
| –0,2 | –0,0636743 | 0,8 | 0,0837075 | 1,8 | 2,5916757 |
| –0,1 | –0,0592689 | 0,9 | 0,1484082 | 1,9 | 3,587354 |
| 0,0 | –0,0579176 | 1,0 | 0,2316107 | 2,0 | 5,235265 |

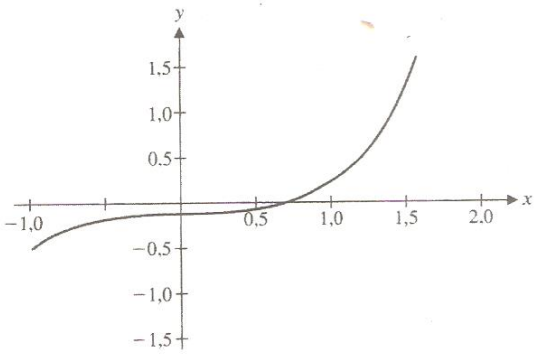



**Figura 6.32a**
Solución aproximada de $y' = x^2 + y^2$, que pasa por $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$.

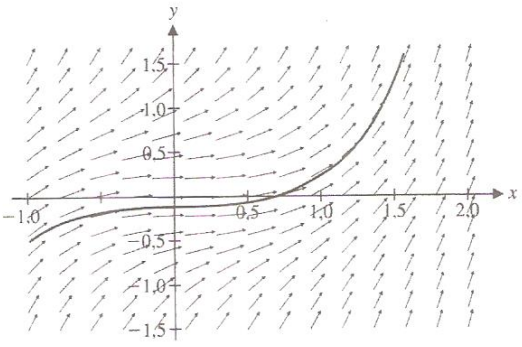



**Figura 6.32b**
La solución aproximada superpuesta al campo de pendientes.

La figura 6.32a representa los datos de la tabla. Se aprecia un buen ajuste con el campo de direcciones de la figura 6.31. Para dejar más clara esa coincidencia, hemos superpuesto ambas cosas en la figura 6.32b. Dado que la curva aproximada sigue muy bien las indicaciones del campo de pendientes, cabe esperar que los errores en la aproximación hayan sido pequeños. (Siempre hay un cierto error debido al redondeo y otros de tipo numérico).

## EJERCICIOS 6.6

1. Explicar por qué, en el método de Euler, al tomar un paso más pequeño cabe esperar una aproximación mejor.

2. Observe el campo de direcciones de la figura 6.31 y la solución que da el método de Euler en la figura 6.32. Describa en qué sentido el campo de direcciones nos da una idea más segura de la solución exacta. Aun con eso y con todo, argumentar por qué es importante el método de Euler. (Ayuda: ¿Puede calcular valores aproximados de la solución sólo viendo el campo de direcciones?).

3. En la situación del ejemplo 6.3, si sólo quisiéramos conocer la estabilidad de una solución de equilibrio, explicar por qué es preferible un método cualitativo que intentar resolver la ecuación diferencial. Describir una situación en la que sería preciso resolver la ecuación.

4. Imagine curvas solución superpuestas a la figura 6.27a. Explicar por qué la aproximación del método de Euler nos lleva de una solución a otra cercana. Usar uno de los ejemplos de esta sección para describir cómo un pequeño error puede dar lugar a errores muy grandes para valores alejados de $x$.

**En los ejercicios 5-16, construir cuatro flechas del campo de direcciones a mano y completar con un PCS.**

5. $y' = x + 4y$
6. $y' = \sqrt{x^2 + y^2}$
7. $y' = 2y - y^2$
8. $y' = y^3 - 1$
9. $y' = 2xy - y^2$
10. $y' = y^3 - x$
11. $y' = \cos y + 1/x$
12. $y' = \operatorname{sen} y - x^2$
13. $y' = 1 - y^2 - e^{-x}$
14. $y' = 1 - x^2 + e^{-y}$
15. $y' = 1 - \dfrac{y^2}{x}$
16. $y' = \dfrac{y^3}{x} - 1$

**En los ejercicios 17-24, usar el método de Euler con $h = 0{,}1$ y $h = 0{,}05$ para aproximar $y(1)$ e $y(2)$. Hacer los dos primeros pasos a mano.**

17. $y' = 2xy$, $y(0) = 1$
18. $y' = x/y$, $y(0) = 2$
19. $y' = 4y - y^2$, $y(0) = 1$
20. $y' = x/y^2$, $y(0) = 2$
21. $y' = 1 - y + e^{-x}$, $y(0) = 3$
22. $y' = \operatorname{sen} y - x^2$, $y(0) = 1$
23. $y' = \sqrt{x + y}$, $y(0) = 1$
24. $y' = \sqrt{x^2 + y^2}$, $y(0) = 4$

25. Hallar las soluciones exactas de los ejercicios 17 y 18 y comparar $y(1)$ e $y(2)$ con sus aproximaciones por el método de Euler.

26. Hallar las soluciones exactas de los ejercicios 19 y 20 y comparar $y(1)$ e $y(2)$ con sus aproximaciones por el método de Euler.

27. Dibujar el campo de direcciones de los ejercicios 21 y 22, la curva correspondiente a la condición inicial dada y compararla con la aproximación de Euler en $x = 1$ y en $x = 2$.

28. Dibujar el campo de direcciones de los ejercicios 23 y 24, la curva correspondiente a la condición inicial dada y compararla con la aproximación de Euler en $x = 1$ y en $x = 2$.

**En los ejercicios 29-34, hallar las soluciones de equilibrio y determinar cuáles son estables y cuáles inestables.**

29. $y' = 2y - y^2$

30. $y' = y^3 - 1$

31. $y' = y^2 - y^4$

32. $y' = e^{-y} - 1$

33. $y' = (1 - y)\sqrt{1 + y^2}$

34. $y' = \sqrt{1 - y^2}$

35. Las franjas de las cebras y los dibujos en las alas de las mariposas parecen ser consecuencia de procesos químicos activados genéticamente. Sea $g(t)$ la cantidad de genes activados en el tiempo $t$. La ecuación diferencial

$$g' = -g + \frac{3g^2}{1 + g^2}$$

se ha usado como modelo para esos procesos. Probar que hay tres soluciones de equilibrio: 0 y dos positivas $a$ y $b$, con $a < b$. Demostrar que $g' > 0$ si $a < g < b$ y $g' < 0$ si $0 < g < a$ o si $g > b$. Explicar por qué $\lim_{t \to \infty} g(t)$ puede ser 0 o $b$, dependiendo de la cantidad inicial de genes activados. Supongamos que una franja de una cebra se extiende desde $x = 0$ hasta $x = 4\pi$ con una distribución inicial de genes activados $g(0) = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}$ sen $x$ en la posición $x$.

Si negro corresponde a un nivel 0 de activación y blanco a un nivel $b$, mostrar qué aspecto tendrán las franjas de la cebra.

36. Muchas especies de árboles sufren plagas repentinas de gusanos. Sea $x(t)$ la población de una especie de gusanos en un árbol particular. Para algunas especies, un modelo para su cambio de población es $x' = 0{,}1x(1 - x/k) - x^2/(1 + x^2)$, para alguna constante $k > 0$. Si $k = 10$, probar que existe una única solución de equilibrio. Si $k = 50$, demostrar que hay tres soluciones de equilibrio. Esbozar el campo de direcciones para $k = 50$. Explicar por qué el valor intermedio de equilibrio se llama *umbral*. Una explosión del número de gusanos corresponde a cruzar el umbral para un valor grande de $k$ ($k$ viene determinado por los recursos disponibles por los gusanos).

37. Aplicar el método de Euler con $h = 0{,}1$ al PVI $y' = y^2 - 1$, $y(0) = 3$ para estimar $y(0{,}5)$. Repetir lo mismo con $h = 0{,}05$ y $h = 0{,}01$. En general, el método de Euler es más preciso con $h$ menor. Conjeturar cómo se comporta la solución exacta. (Esto se analiza con más detalle en los próximos tres ejercicios).

38. Probar que $f(x) = \dfrac{2 + e^{2x}}{2 - e^{2x}}$ es solución del PVI del ejercicio 37. Calcular $f(0{,}1)$, $f(0{,}2)$, $f(0{,}3)$, $f(0{,}4)$ y $f(0{,}5)$ y comparar con las aproximaciones del ejercicio 37.

39. Representar la solución de $y' = y^2 - 1$, $y(0) = 3$, dada en el ejercicio 38. Hallar una ecuación de la asíntota vertical. Explicar por qué para el método de Euler esa asíntota pasa desapercibida y daría lugar, por tanto, a aproximaciones nada fiables.

40. En los ejercicios 37-39, supongamos que $x$ representa el tiempo (en horas) e $y$ la fuerza (en newtons) ejercida sobre el brazo de un robot. Explicar qué le ocurre al brazo. A la vista de la respuesta, explicar por qué los valores negativos de la función en el ejercicio 38 son irrelevantes y, en cierto sentido, las aproximaciones por el método de Euler en el ejercicio 37 dan información útil.

41. Hay varios caminos para deducir la fórmula del método de Euler. La ventaja de una deducción alternativa es que puede sugerir una mejora del método. Aquí vamos a usar una forma alternativa del método de Euler para deducir el llamado **método de Euler mejorado**. Partimos de la ecuación diferencial $y'(x) = f(x, y(x))$ e integramos ambos lados desde $x = x_n$ hasta $x = x_{n+1}$.

Probar que

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x))\, dx.$$

Dado $y(x_n)$, podemos estimar $y(x_{n+1})$ aproximando la integral

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x))\, dx.$$

Una posible aproximación es la suma de Riemann con punto de evaluación a la izquierda, $f(x_n, y(x_n))\,\Delta x$.

Probar que con esta estimación se obtiene el método de Euler. Hay otras aproximaciones mejores de la integral. Una de ellas es la regla de los trapecios,

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x))\, dx \approx \frac{f(x_n, y(x_n)) + f(x_{n+1}, y(x_{n+1}))}{2}\,\Delta x.$$

La pega con esta estimación es que conocemos $y(x_n)$, pero **no** $y(x_{n+1})$. Explicar por qué.

La salida consiste en utilizar el método de Euler, aproximando $y(x_{n+1})$ por $y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + hf(x_n, y(x_n))$.

Con todo eso resulta el método de Euler mejorado:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\,[f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n))].$$

Aplicar este método al PVI $y' = y$, $y(0) = 1$ con $h = 0{,}1$ para calcular $y_1$, $y_2$, $y_3$. Compararlos con los valores exactos y con los del método de Euler en el ejemplo 6.4.

## 6.7 LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

En esta sección añadimos a la colección de funciones ya conocidas las inversas de las funciones trigonométricas. Para empezar, observamos la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ (figura 6.33) y concluimos que no se puede definir una función inversa de sen $x$, ya que no es inyectiva. Podemos remediarlo considerando sen $x$ en sólo una parte de su dominio. Restringida al intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $y = \operatorname{sen} x$ es inyectiva (figura 6.34) y, en consecuencia, tiene inversa. Por tanto, definimos la **función seno inverso** como

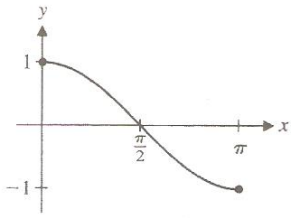



**Figura 6.33**
$y = \operatorname{sen} x$.

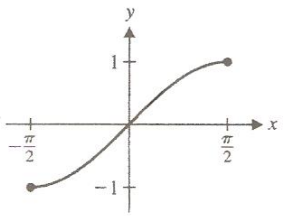



**Figura 6.34**
$y = \operatorname{sen} x$ en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$y = \operatorname{sen}^{-1} x \text{ si, y sólo si, } \operatorname{sen} y = x \text{ y } -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}. \tag{7.1}$$

En esta definición, $y = \operatorname{sen}^{-1} x$ significa que $y$ es el ángulo $\left(\text{entre } -\frac{\pi}{2} \text{ y } \frac{\pi}{2}\right)$ tal que $\operatorname{sen} y = x$. Podríamos haber elegido cualquier otro intervalo en el que sen $x$ sea inyectiva, pero $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ es el más conveniente. Para verificar que son funciones inversas, basta observar que

$$\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1} x) = x, \text{ para todo } x \in [-1, 1]$$

y

$$\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} x) = x, \text{ para todo } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \tag{7.2}$$

Lea con mucho cuidado la ecuación (7.2). **No dice** que $\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} x) = x$ para **todo** $x$, sino **sólo** para los $x$ del dominio restringido, $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Así, pues, aunque puede dar la impresión de que $\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} \pi) = \pi$, esto es **incorrecto**, ya que

$$\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} \pi) = \operatorname{sen}^{-1}(0) = 0.$$

**Nota 1.1**

En Matemáticas se usa indistintamente la notación arcsen $x$ en lugar de $\operatorname{sen}^{-1} x$. Por eso se lee $\operatorname{sen}^{-1} x$ como «seno inverso de $x$» o «arco cuyo seno es $x$».

### Ejemplo 7.1 Cálculo de un seno inverso

Evaluar $\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

**Solución** Buscamos un ángulo $\theta$ en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tal que $\operatorname{sen} \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Como $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, tenemos que $\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$.

### Ejemplo 7.2 Un seno inverso con argumento negativo

Evaluar $\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$.

**Solución** Aquí nótese que $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$ y $-\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Así, pues,

$$\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}.$$

A juzgar por los dos ejemplos precedentes, puede estar pensando que (7.2) no es sino una forma de definir una función dando un rodeo. Si es así, ha acertado. De hecho, todo cuanto sabemos de la función seno inverso es a través de la función seno. No encontraremos otra definición de arcsen $x$ ni hay fórmula para ella (como ocurre para casi todas las funciones inversas). Además, recuerde que en la sección 6.2 hemos dibujado una gráfica de

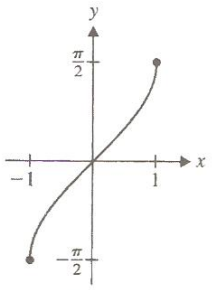



**Figura 6.35**
$y = \text{sen}^{-1}\, x$.

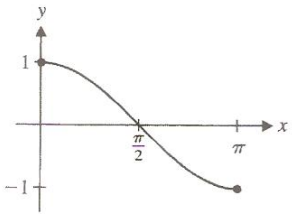



**Figura 6.36**
$y = \cos x$ en $[0, \pi]$.

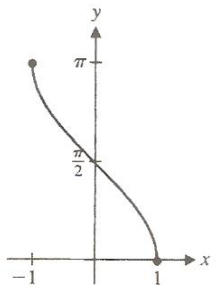



**Figura 6.37**
$y = \cos^{-1} x$.

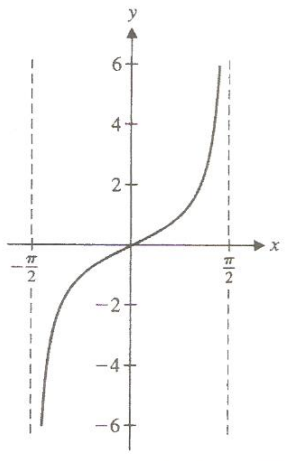



**Figura 6.38**
$y = \tan x$ en $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

$y = \text{sen}^{-1}\, x$ reflejando la de $y = \text{sen}\, x$ sobre el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (de la figura 6.34) en la recta $y = x$ (figura 6.35).

En cuanto a $y = \cos x$, ¿cómo se puede restringir su dominio para que sea inyectiva? Restringir el dominio al intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, como hicimos para el seno, no funciona ahora (¿por qué no?). Lo más simple es restringirla al intervalo $[0, \pi]$ (figura 6.36). Por consiguiente, definimos la **función coseno inversa** como

$$\boxed{y = \cos^{-1} x \text{ si, y sólo si, } \cos y = x \text{ y } 0 \le y \le \pi.} \qquad (7.3)$$

Ahora se tiene

$$\cos(\cos^{-1} x) = x, \text{ para todo } x \in [-1, 1]$$

y

$$\cos^{-1}(\cos x) = x, \text{ para todo } x \in [0, \pi].$$

Al igual que con arcsen $x$, conviene ver $\cos^{-1} x$ como el ángulo $\theta$ en $[0, \pi]$ tal que $\cos\theta = x$. Se usa indistintamente la notación arccos $x$ en lugar de $\cos^{-1} x$.

### Ejemplo 7.3 Evaluación de un coseno inverso

Evaluar $\cos^{-1}(0)$.

**Solución** Hemos de encontrar un ángulo $\theta$ en $[0, \pi]$ tal que $\cos\theta = 0$. No es difícil darse cuenta de que $\cos^{-1}(0) = \frac{\pi}{2}$. (Si calcula esto en la calculadora y obtiene 90 como respuesta, su calculadora está en modo grados. En tal caso, cambie inmediatamente a modo radianes).

### Ejemplo 7.4 Una función inversa con argumento negativo

Evaluar $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

**Solución** Ahora buscamos un ángulo $\theta \in [0, \pi]$ tal que $\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Nótese que $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\frac{3\pi}{4} \in [0, \pi]$. En consecuencia,

$$\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}.$$

Una vez más obtenemos la gráfica de esta función inversa reflejando en la recta $y = x$ la porción de la gráfica de $y = \cos x$ sobre el intervalo $[0, \pi]$ (figuras 6.36 y 6.37).

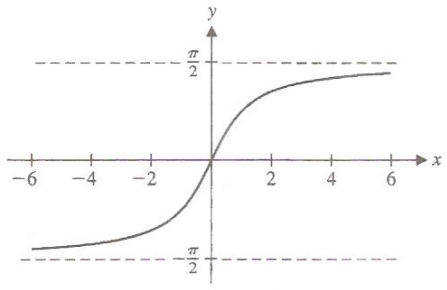



**Figura 6.39**
$y = \tan^{-1} x$.

Definimos las inversas de cada una de las cuatro restantes funciones trigonométricas de modo análogo. Para $y = \tan x$ restringimos su dominio al intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Piense por qué no incluimos los extremos del intervalo (figura 6.38). Hecho eso, definimos la función **tangente inversa** como

$$y = \tan^{-1} x \text{ si, y sólo si, } \tan y = x \text{ y } -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}. \tag{7.4}$$

La figura 6.39 muestra la gráfica de $y = \tan x$, obtenida reflejando en la recta $y = x$ la de la figura 6.38.

### Ejemplo 7.5 Evaluación de una tangente inversa

Calcular $\tan^{-1}(1)$.

**Solución** Hay que encontrar un ángulo $\theta$ en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ con $\tan\theta = 1$. Es muy fácil: como $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ y $\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, se tiene que $\tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$.

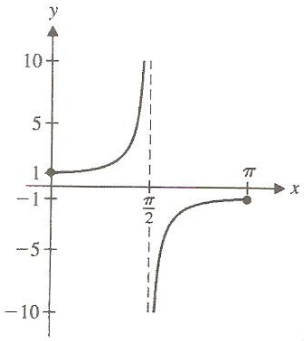



**Figura 6.40**
$y = \sec x$ en $[0, \pi]$.

Vamos con la inversa de sec $x$. Pero antes una advertencia. Como hemos dicho, hay diversas restricciones posibles del dominio de las funciones trigonométricas que las hacen inyectivas. Para las tres primeras había una elección obvia y hay consenso general sobre esas tres elecciones. En el caso de sec $x$, eso ya **no** es verdad. Hay varias restricciones razonables y los autores difieren en su elección. Optamos (arbitrariamente) por restringir el dominio a $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. Pensará que es extraño. ¿Por qué no $[0, \pi]$ completo? Basta que piense en la definición de sec $x$ para entender que necesitamos excluir el punto $x = \frac{\pi}{2}$. La figura 6.40 muestra la gráfica de sec $x$ en ese dominio. (Hay una asíntota vertical en $x = \frac{\pi}{2}$). En consecuencia, definimos la función **secante inversa** como

$$y = \sec^{-1} x \text{ si, y sólo si, } \sec y = x \quad \text{e} \quad y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]. \tag{7.5}$$

Su gráfica puede verse en la figura 6.41.

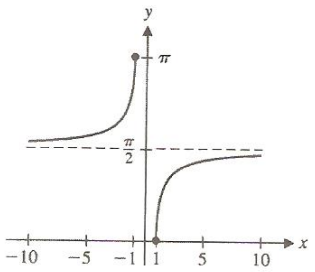



**Figura 6.41**
$y = \sec^{-1} x$.

### Ejemplo 7.6 Evaluación de una secante inversa

Calcular $\sec^{-1}(-\sqrt{2})$.

**Solución** Buscamos un ángulo $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ tal que $\sec\theta = -\sqrt{2}$, lo cual implica $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Recordemos, del ejemplo 7.4, que $\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Además, el ángulo $\frac{3\pi}{4}$ está en el intervalo $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, luego $\sec^{-1}(-\sqrt{2}) = \frac{3\pi}{4}$.

**Nota 7.2**

Omitimos la definición de las funciones inversas de cot $x$ y cosec $x$ porque se usan rara vez. Las examinaremos en los ejercicios.

Las calculadoras no suelen tener incorporadas sec $x$ o $\sec^{-1} x$. En tal caso, puede convertir el valor deseado de la secante en un valor del coseno y usar la función coseno inversa, como hicimos en el ejemplo 7.6.

Con cierta frecuencia, y como parte de un problema más largo (como calcular una integral por alguno de los métodos del Capítulo 7), necesitaremos identificar ciertas relaciones entre las funciones trigonométricas y sus inversas. Vamos a presentarlas a continuación. En tales circunstancias, le aconsejamos tener presente las definiciones de las funciones inversas y dibujar una figura.

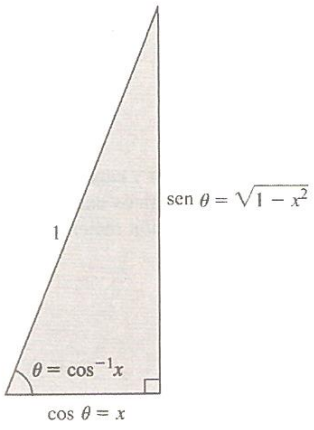



**Figura 6.42**
$\theta = \cos^{-1} x$.

### Ejemplo 7.7 Simplificación de expresiones con funciones trigonométricas inversas

Simplificar $\operatorname{sen}(\cos^{-1} x)$ y $\tan(\cos^{-1} x)$.

**Solución** No hurgue en su memoria en busca de fórmulas arcaicas que le ayuden. **Piense**: $\cos^{-1} x$ es el ángulo $\theta$ tal que $x = \cos\theta$. Consideremos primero el caso $x > 0$. En la figura 6.42 hemos dibujado un triángulo rectángulo con hipotenusa 1 y ángulo adyacente $\theta$. Por la definición del seno y del coseno, la base del triángulo es $\cos\theta = x$ y su altura $\operatorname{sen}\theta$, que por el teorema de Pitágoras es

$$\operatorname{sen}(\cos^{-1} x) = \operatorname{sen}\theta = \sqrt{1 - x^2}.$$

Hay dos sutilezas a aclarar. En primer lugar, ¿qué cambia en la figura 6.42 si $x < 0$? (Reflexione acerca de esto). En segundo lugar, como $\theta = \cos^{-1} x$, se tiene $\theta \in [0, \pi]$ y, por tanto, $\operatorname{sen}\theta \geq 0$. Finalmente, de la figura 6.42 se deduce que

$$\tan(\cos^{-1} x) = \tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}.$$

Nótese que esta última identidad es válida independientemente de que $x = \cos\theta$ sea positivo o negativo.

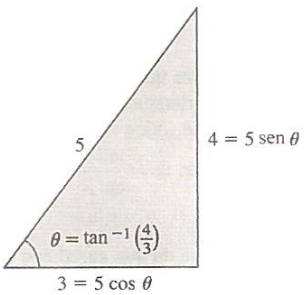



**Figura 6.43**
$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$.

### Ejemplo 7.8 Simplificación de una expresión con una tangente inversa

Simplificar $\operatorname{sen}\left(\tan^{-1}\frac{4}{3}\right)$.

**Solución** De nuevo tenga presente que $\tan^{-1}\frac{4}{3}$ es el ángulo $\theta$, en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, tal que $\tan\theta = \frac{4}{3}$. Como ayuda tenemos el triángulo de la figura 6.43. Su lado opuesto al ángulo mide 4 y el lado adyecente 3, así que la tangente del ángulo es $\frac{4}{3}$, como queríamos. Por el teorema de Pitágoras, la hipotenusa mide 5, claro está. Con esa figura como guía, podemos leer el valor deseado.

$$\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\left(\tan^{-1}\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{5}.$$

De paso, hemos encontrado que

$$\cos\theta = \cos\left(\tan^{-1}\frac{4}{3}\right) = \frac{3}{5}.$$

## EJERCICIOS 6.7

1. Discutir cómo hallar $\sec^{-1} x$, $\operatorname{cosec}^{-1} x$ y $\cot^{-1} x$ con una calculadora que sólo tiene incorporadas $\operatorname{sen}^{-1} x$, $\cos^{-1} x$ y $\tan^{-1} x$.

2. Dar un dominio diferente al del texto para $\sec^{-1} x$. ¿Para qué valores de $x$ cambiaría el valor de $\sec^{-1} x$? A la vista del ejercicio 1, dar una razón que justifique la elección del texto.

3. Las funciones inversas son necesarias para resolver ecuaciones. El dominio restringido que hemos de utilizar para definir las inversas de las funciones trigonométricas también restringe su utilidad en esa tarea. Explicar cómo usar $\operatorname{sen}^{-1} x$ para hallar todas las soluciones de la ecuación $\operatorname{sen} u = x$.

4. La idea de restringir los dominios se usa para definir las inversas de muchas funciones. Explicar cómo definir una inversa de $f(x) = x^2$.

**En los ejercicios 5-18, evaluar la función inversa dibujando la circunferencia unidad y localizando el ángulo correcto sobre ella.**

5. $\text{sen}^{-1} 0$
6. $\cos^{-1} 0$
7. $\tan^{-1} 1$
8. $\tan^{-1} 0$
9. $\text{sen}^{-1}(-1)$
10. $\cos^{-1}(1)$
11. $\sec^{-1} 1$
12. $\text{cosec}^{-1} 0$
13. $\tan^{-1}(-1)$
14. $\cot^{-1} 1$
15. $\sec^{-1} 2$
16. $\text{cosec}^{-1} 2$
17. $\text{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$
18. $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

**En los ejercicios 19-34, usar un triángulo para simplificar cada expresión. Especificar el dominio de los $x$ para los cuales es válida la simplificación.**

19. $\cos(\text{sen}^{-1} x)$
20. $\cos(\tan^{-1} x)$
21. $\sec^{-1}(\cos x)$
22. $\text{cosec}^{-1}(\text{sen } x)$
23. $\tan(\sec^{-1} x)$
24. $\cot(\cos^{-1} x)$
25. $\text{sen}^{-1}(\text{sen } x)$
26. $\cos^{-1}(\cos x)$
27. $\text{sen}\left(\cos^{-1}\frac{1}{2}\right)$
28. $\cos\left(\text{sen}^{-1}\frac{1}{2}\right)$
29. $\tan\left(\cos^{-1}\frac{3}{5}\right)$
30. $\text{cosec}\left(\text{sen}^{-1}\frac{2}{3}\right)$
31. $\cos^{-1}(\cos(-\pi/8))$
32. $\text{sen}^{-1}(\text{sen } 3\pi/4)$
33. $\text{sen}(2 \text{ sen}^{-1} x/3)$
34. $\cos(2 \text{ sen}^{-1} 2x)$

**En los ejercicios 35-40, dibujar un esbozo de la gráfica de la función.**

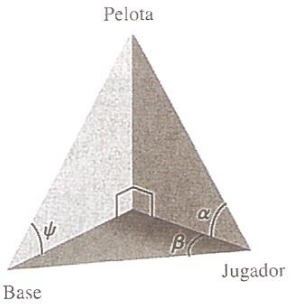
35. $\cos^{-1}(2x)$
36. $\cos^{-1}(x^3)$
37. $\text{sen}^{-1}(3x)$
38. $\text{sen}^{-1}(x/4)$
39. $\tan^{-1}(5x)$
40. $\tan^{-1}(x^2)$

**En los ejercicios 41-50, hallar todas las soluciones.**

41. $\cos(2x) = 0$
42. $\cos(3x) = 1$
43. $\text{sen}(3x) = 0$
44. $\text{sen}(x/4) = 1$
45. $\tan(5x) = 1$
46. $\tan(2x) = 1$
47. $\text{sen}(3x) = \frac{1}{2}$
48. $\text{sen}(x/4) = -\frac{1}{2}$
49. $\sec(2x) = 2$
50. $\text{cosec}(2x) = -2$

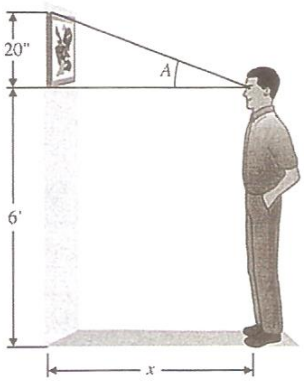
51. Definir de forma precisa $\text{cosec}^{-1} x$ y $\cot^{-1} x$.

52. Los jugadores de béisbol son capaces de seguir y capturar pelotas con trayectorias muy altas y largas. Los físicos han discutido durante años cómo lo hacen. Una explicación reciente utiliza la siguiente geometría.




El jugador puede atrapar la pelota si corre manteniendo constante el ángulo $\psi$ (con lo que logra la apariencia de que la pelota se mueve en línea recta). Supuesto que todos los triángulos de la figura son rectángulos, probar que $\tan\psi = \dfrac{\tan\alpha}{\tan\beta}$ y a continuación resolver en $\psi$.

53. Un cuadro de 20 pulgadas de altura cuelga de una pared con su base a 6 pies sobre el suelo. Una persona de 6 pies de altura lo mira desde una distancia $x$. Expresar el ángulo $A$ de la figura como función de $x$ y representar la función $y = A(x)$.




54. En golf, el objetivo es introducir la bola en un agujero de 4,5 pulgadas de diámetro. Un jugador tiene su bola en el *green*, a $x$ pies del agujero. Una primera aproximación del margen de error en el golpe lo da la medida del ángulo $A$ que forman los segmentos rectos que van desde la bola hasta los bordes opuestos del agujero. Expresar $A$ como función de $x$.

## 6.8 CÁLCULO DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Una vez definidas en la sección 6.7 las inversas de las funciones trigonométricas, vamos a examinar cómo se calculan. Comenzamos con $\text{sen}^{-1} x$. Podríamos pensar en la definición de derivada,

$$\frac{d}{dx}\,\text{sen}^{-1} x = \lim_{h \to 0} \frac{\text{sen}^{-1}(x+h) - \text{sen}^{-1} x}{h}$$

pero no conocemos lo bastante de $\text{sen}^{-1} x$ como para calcular ese límite. De hecho, ¿qué sabemos acerca de esta función? Apenas la definición y unos pocos valores. Así, pues, aunque podemos aproximar ese límite, para valores de $x$ fijados, hay poca esperanza de calcularlo exactamente. Sin embargo, es una función inversa y desde esa perspectiva se abre el siguiente análisis. La definición de $\text{sen}^{-1} x$, dada en (7.1), es

$$y = \text{sen}^{-1} x \text{ si, y sólo si, } \text{sen } y = x \text{ e } y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Derivando la ecuación $\text{sen } y = x$ implícitamente, se obtiene

$$\frac{d}{dx}\,\text{sen } y = \frac{d}{dx}\,x,$$

y en consecuencia,

$$\cos y \,\frac{d}{dx} = 1.$$

Despejando $\dfrac{dy}{dx}$, vemos que (si $\cos y \neq 0$)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}.$$

No hemos terminado, porque esa derivada está expresada en términos de $y$. Ahora bien, $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos y \geq 0$ y, por consiguiente,

$$\cos y = \sqrt{1 - \text{sen}^2 y} = \sqrt{1 - x^2}.$$

De ahí resulta

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

en $-1 < x < 1$. Es decir,

$$\boxed{\frac{d}{dx}\,\text{sen}^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \text{ en } -1 < x < 1.}$$

Como alternativa, se puede deducir esta misma fórmula usando el teorema 2.3 de la sección 6.2. Análogamente, se demuestra (lo dejamos como ejercicio) que

$$\boxed{\frac{d}{dx}\cos^{-1} x = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}, \text{ en } -1 < x < 1.}$$

Asimismo, para hallar $\dfrac{d}{dx}\tan^{-1} x$ haremos uso de la definición (7.4), es decir,

$$y = \tan^{-1} x \text{ si, y sólo si, } \tan y = x \text{ e } y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Por derivación implícita, se obtiene

$$\frac{d}{dx}\tan y = \frac{d}{dx}x,$$

o sea,

$$(\sec^2 y)\frac{dy}{dx} = 1.$$

Despejando $\frac{dy}{dx}$, resulta finalmente

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\sec^2 y}\\ &= \frac{1}{1+\tan^2 y}\\ &= \frac{1}{1+x^2}.\end{aligned}$$

Esto es,

$$\boxed{\frac{d}{dx}\tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2}.}$$

De manera análoga se demuestra (lo dejamos como ejercicio) que

$$\boxed{\frac{d}{dx}\sec^{-1} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, \text{ si } |x| > 1.}$$

Por su escaso interés, no discutimos las derivadas de las dos restantes funciones trigonométricas inversas.

### Ejemplo 8.1 Derivada de una función trigonométrica inversa

Hallar la derivada de (a) $\cos^{-1}(3x^2)$ y (b) $(\sec^{-1} x)^2$.

**Solución** (a) Por la regla de la cadena,

$$\frac{d}{dx}\cos^{-1}(3x^2) = \frac{-1}{\sqrt{1-(3x^2)^2}}\frac{d}{dx}(3x^2)$$

$$= \frac{-6x}{\sqrt{1-9x^4}}.$$

(b) De nuevo, por la regla de la cadena,

$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x)^2 = 2(\sec^{-1} x)\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x)$$

$$= 2(\sec^{-1} x)\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}.$$

### Ejemplo 8.2 Un modelo para el ritmo de cambio de la mirada

Uno de los principios básicos en varios deportes es «mirar la pelota en todo instante». En béisbol, un bateador está a 2 pies de la base cuando le lanzan una pelota a 130 pies/s (unas 90 mph). ¿A qué ritmo debe cambiar el ángulo de su mirada cuando la pelota cruza la base?

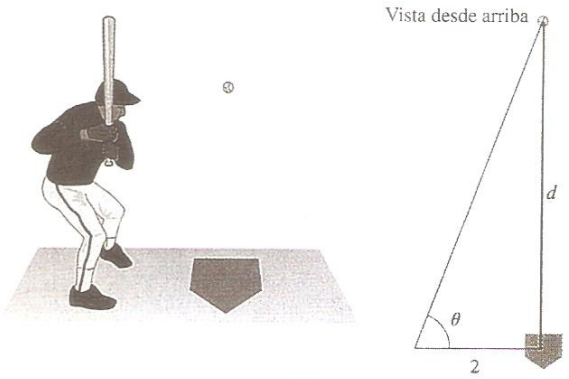



**Figura 6.44**

La mirada de un bateador.

**Solución** En la figura 6.44, $\theta$ es el ángulo de la mirada y $d = d(t)$ la distancia de la pelota a la base, que cambia con el tiempo $t$. La velocidad de 130 pies/s nos dice que $d'(t) = -130$. [¿Por qué $d'(t)$ es negativo?]. En la figura vemos que

$$\theta(t) = \tan^{-1}\left[\frac{d(t)}{2}\right].$$

Por tanto, el ritmo de cambio del ángulo es

$$\theta'(t) = \frac{1}{1 + \left[\frac{d(t)}{2}\right]^2} \frac{d'(t)}{2}$$

$$= \frac{2d'(t)}{4 + [d(t)]^2} \text{ radianes/segundos.}$$

Cuando $d(t) = 0$, momento en el que la pelota cruza la base, el ritmo de cambio es

$$\theta'(t) = \frac{2(-130)}{4} = -65 \text{ radianes/segundo.}$$

Esto plantea un problema, ya que la mayoría de los seres humanos sólo pueden seguir con la mirada objetos que no superen los 3 rad/s. Por tanto, es físicamente imposible, en la situación descrita, mantener la mirada sobre la pelota. ¿Cómo lo consiguen los bateadores? Ciertas investigaciones apuntan a que anticipan hacia dónde se dirige la pelota en lugar de intentar seguirla con la vista de forma continua (véase Watts y Bahill, *Keep Your Eye on the Ball*).

## Integrales que contienen funciones trigonométricas inversas

Ya habrá adivinado el próximo paso: cada una de las fórmulas de derivación produce una nueva fórmula de integración. Para empezar, de

$$\frac{d}{dx} \operatorname{sen}^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

se deduce que

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = \operatorname{sen}^{-1} x + c.} \qquad (8.1)$$

Análogamente, de

$$\frac{d}{dx} \cos^{-1} x = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

se sigue que

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\cos^{-1} x + c. \tag{8.2}$$

Ahora bien, dado que la integral en (8.2) es la misma que la de (8.1), ignoraremos (8.2). Del mismo modo se obtienen

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1} x + c$$

y

$$\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}\,dx = \sec^{-1} x + c.$$

---

**Ejemplo 8.3** **Una integral relacionada con $\tan^{-1} x$**

Hallar $\displaystyle\int \frac{1}{9+x^2}\,dx$.

**Solución** El integrando es casi exactamente la derivada de $\tan^{-1} x$. Sin embargo, la constante en el denominador no es 1, como necesitaríamos, sino 9. Teniendo eso en cuenta, reescribimos la integral como

$$\int \frac{1}{9+x^2}\,dx = \frac{1}{9}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}\,dx.$$

Si hacemos $u = \frac{x}{3}$, entonces $du = \frac{1}{3}\,dx$, de modo que

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{9+x^2}\,dx &= \frac{1}{9}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}\,dx \\
&= \frac{1}{3}\int \underbrace{\frac{1}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}}_{1+u^2}\underbrace{\frac{1}{3}\,dx}_{du} \\
&= \frac{1}{3}\int \frac{1}{1+u^2}\,du \\
&= \frac{1}{3}\tan^{-1} u + c \\
&= \frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + c.
\end{aligned}$$

---

Dejamos como ejercicio demostrar la siguiente fórmula más general:

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c.$$

**Ejemplo 8.4** **Una integral que requiere una sustitución simple**

Hallar $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$.

**Solución** Piense cómo abordar esa integral. Tal vez no acierte a ver una primitiva inmediatamente. Recuerde que muchas veces ayuda buscar partes que sean derivadas de otras. También conviene advertir que $e^{2x} = (e^x)^2$. Con esa información, hacemos $u = e^x$, con lo que $du = e^x\,dx$. Así, se obtiene

$$\begin{aligned}\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx &= \int \underbrace{\frac{1}{1+(e^x)^2}}_{1+u^2}\underbrace{e^x\,dx}_{du} \\ &= \int \frac{1}{1+u^2}\,du \\ &= \tan^{-1} u + c \\ &= \tan^{-1}(e^x) + c.\end{aligned}$$

**Ejemplo 8.5** **Otra integral que requiere una sustitución simple**

Hallar $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$.

**Solución** Empiece por convencerse de que no conoce una primitiva del integrando. Y observe a continuación que

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{1-(x^2)^2}}\,dx.$$

Una vez reconocido esto, el problema lo resuelve la sustitución $u = x^2$, $du = 2x\,dx$, con lo que

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2)^2}}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1} u + c \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1}(x^2) + c.\end{aligned}$$

En los ejercicios hay más integrales relativas a funciones trigonométricas inversas. Al trabajar con ellas conviene tener presente las definiciones, dominios y recorridos incluidos. Memorizar las fórmulas para las derivadas de $\operatorname{sen}^{-1} x$, $\tan^{-1} x$ y $\sec^{-1} x$ será suficiente. A partir de ellas, podrá resolver cuanto necesite mediante técnicas elementales (la sustitución, por ejemplo).

# EJERCICIOS 6.8

1. Explicar por qué, tal como se afirma en el texto, las primitivas de tres de las seis funciones trigonométricas inversas pueden ignorarse.

2. Explicar por qué de las ecuaciones (8.1) y (8.2) se sigue que $\text{sen}^{-1} x = -\cos^{-1} x + c$. A la vista de las gráficas de $y = \text{sen } x$ e $y = \cos x$, explicar por qué eso era de esperar e identificar la constante $c$ para $0 < x < \pi/2$.

**En los ejercicios 3-16, hallar la derivada de la función.**

3. $\text{sen}^{-1}(3x^2)$
4. $\text{sen}^{-1}(x^3 + 1)$
5. $\cos^{-1}(x^3)$
6. $\cos^{-1}(x^3 + 1)$
7. $\tan^{-1}(x^2)$
8. $\cot^{-1}(\sqrt{x})$
9. $\sec^{-1}(x^2)$
10. $\text{cosec}^{-1}(\sqrt{x})$
11. $x \cos^{-1}(2x)$
12. $\text{sen } x \text{ sen}^{-1}(2x)$
13. $\cos^{-1}(\text{sen } x)$
14. $\tan^{-1}(\cos x)$
15. $\tan^{-1}(\sec x)$
16. $\cot^{-1}(\text{sen } x)$

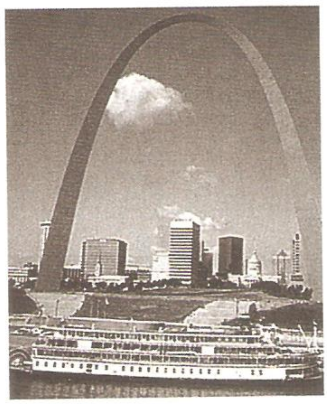
**En los ejercicios 17-38, hallar la integral propuesta.**

17. $\displaystyle\int \frac{6}{1+x^2}\,dx$
18. $\displaystyle\int \frac{2}{9+x^2}\,dx$
19. $\displaystyle\int \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$
20. $\displaystyle\int \frac{2}{|x|\sqrt{x^2-1}}\,dx$
21. $\displaystyle\int \frac{2x}{1+x^4}\,dx$
22. $\displaystyle\int \frac{3x^2}{1+x^6}\,dx$
23. $\displaystyle\int \frac{4x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$
24. $\displaystyle\int \frac{2x^2}{\sqrt{1-x^6}}\,dx$
25. $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2\sqrt{x^4-1}}\,dx$
26. $\displaystyle\int \frac{3}{|x|\sqrt{x^6-1}}\,dx$
27. $\displaystyle\int \frac{2}{4+x^2}\,dx$
28. $\displaystyle\int \frac{2x}{4+x^2}\,dx$
29. $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx$
30. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt{1-\text{sen}^2 x}}\,dx$
31. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{4+\text{sen}^2 x}\,dx$
32. $\displaystyle\int \frac{2x}{9+9x^4}\,dx$
33. $\displaystyle\int_0^2 \frac{6}{4+x^2}\,dx$
34. $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{2+2x^2}\,dx$
35. $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{4}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx$
36. $\displaystyle\int_2^4 \frac{2}{x\sqrt{x^4-1}}\,dx$
37. $\displaystyle\int_0^{1/4} \frac{3}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$
38. $\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$
39. Deducir la fórmula $\dfrac{d}{dx}\cos^{-1} x = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.
40. Deducir la fórmula $\dfrac{d}{dx}\sec^{-1} x = \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$.
41. Deducir la fórmula $\displaystyle\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$ para cualquier constante $a > 0$.
42. En este ejercicio deducimos la derivada de $\text{sen}^{-1} x$ de forma diferente a la del texto. Usando el teorema 2.3, probar que $\dfrac{d}{dx}\text{sen}^{-1} x = \dfrac{1}{\cos(\text{sen}^{-1} x)}$. A continuación, hallar $\cos(\text{sen}^{-1} x)$.
43. En el ejemplo 8.2 vimos que, en el momento en que la pelota cruza por la base, el ritmo de giro de la mirada del jugador ($\theta'$) es demasiado rápido para que el ojo humano siga la trayectoria. Supuesto que $\theta' = -3$ es el máximo admisible, calcular $d$ tal que $\theta' = -3$. Es decir, determinar lo más cerca que puede seguirla el jugador con la mirada. En una situación real, el jugador debe comenzar el giro para golpear cuando la pelota está a 30 pies de la base. ¿Ha perdido de vista para entonces la pelota?
44. Supongamos que la velocidad $x'$ del lanzamiento en el ejemplo 8.2 es distinta. Entonces $\theta'$ será distinta, así como el valor de $x$ para el cual $\theta' = -3$. Expresar $x$ como función de $x'$ para $x'$ entre 30 pies/s (velocidad de un lanzamiento blando) y 140 pies/s (lanzamiento más rápido de un jugador profesional). Representar su gráfica.
45. Un cuadro, colgado en una pared, ocupa desde 6 hasta 8 pies de altura sobre el nivel del suelo. Una persona de 5 pies de altura, situada a $x$ pies de la pared, lo está mirando. Su mirada a los bordes superior e inferior del cuadro forman un ángulo $A$. Calcular el valor de $x$ que hace máximo el ángulo visual $A$.
46. ¿Cómo cambia el ejercicio 45 si la persona mide 6 pies?
47. Supongamos que cuando los astronautas despegaron de la Luna, el módulo lunar (ML) tenía aceleración

$$a(t) = \begin{cases} 40 & \text{si } 0 \le t \le 2 \\ 0 & \text{si } 2 < t \end{cases} \text{ pies/s}^2.$$

Una cámara situada en el suelo de la Luna, a 200 pies del ML, permitía seguir el despegue. Obviamente, no había operador, así que el movimiento de la cámara debía estar programado de antemano. Calcular el ángulo de elevación de la cámara respecto del suelo, en su seguimiento del ML, en función de la altura $h$ del ML. Integrar la ecuación $h''(t) = a(t)$ para hallar la altura, y en consecuencia el ángulo, en función del tiempo. Para girar la cámara había que aplicar un par de fuerzas a su eje de giro proporcional a la segunda derivada del ángulo. Hallar esta derivada.

## 6.9 LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS


Gateway Arch, San Luis, MO

El Gateway Arch de San Luis es una de las obras arquitectónicas más características de Estados Unidos. Su forma ofrece varios rasgos sorprendentes. Por ejemplo, ¿el arco es más alto que ancho? La mayor parte de la gente cree que sí, pero es una ilusión óptica. En efecto, la anchura es igual a la altura. Otra ilusión, un poco menos misteriosa, es que, contra lo que parece, **no** es una parábola. Tiene la forma de la gráfica de la función coseno hiperbólico (también llamada **catenaria**). Esta función y las otras cinco funciones hiperbólicas son objeto de estudio en esta sección.

Tiene derecho a preguntarse por qué son necesarias estas funciones. Pues bien, de hecho no son del todo nuevas. Son simplemente combinaciones de exponenciales de uso común. Las estudiamos debido a sus múltiples aplicaciones (el Gateway Arch, entre otras) y su utilidad en la resolución de ecuaciones, en particular ecuaciones diferenciales.

La función **seno hiperbólico** se define como

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

para todo $x \in (-\infty, \infty)$. La función **coseno hiperbólico** se define como

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

también para todo $x \in (-\infty, \infty)$. Es fácil verificar la importante identidad

$$\cosh^2 u - \operatorname{senh}^2 u = 1, \tag{9.1}$$

para todo valor de $u$. Lo dejamos como ejercicio. A la vista de esta identidad, nótese que si $x = \cosh u$ e $y = \operatorname{senh} u$, entonces

$$x^2 - y^2 = \cosh^2 u - \operatorname{senh}^2 u = 1,$$

que es la ecuación de una hipérbola. De ahí la denominación de «hiperbólicas». Nótese el evidente paralelismo con las funciones trigonométricas $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$, que quedará más patente todavía en lo que sigue.

Las cuatro funciones hiperbólicas restantes se definen en términos del seno y del coseno hiperbólicos, igual que ocurre en las trigonométricas. La **tangente hiperbólica** $\tanh x$, la **cotangente hiperbólica** $\coth x$, la **secante hiperbólica** $\operatorname{sech} x$ y la **cosecante hiperbólica** $\operatorname{cosech} x$ se definen así:

$$\tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x}$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}, \quad \operatorname{cosech} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x}.$$

Estas funciones son de manejo sencillo y su comportamiento fácil de determinar por cuanto ya sabemos de las exponenciales. En primer lugar,

$$\frac{d}{dx}\operatorname{senh} x = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x.$$

Análogamente, se deducen las demás fórmulas de derivación:

$$\frac{d}{dx}\cosh x = \operatorname{senh} x, \qquad \frac{d}{dx}\tanh x = \operatorname{sech}^2 x$$

$$\frac{d}{dx}\coth x = -\operatorname{cosech}2\, x, \qquad \frac{d}{dx}\operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x \tanh x$$

y $$\frac{d}{dx}\operatorname{cosech} x = -\operatorname{cosech} x \coth x.$$

Son simples aplicaciones de reglas de derivación anteriores y se dejan como ejercicios. A decir verdad, sólo las tres primeras son importantes.

### Ejemplo 9.1 Derivada de una función hiperbólica

Hallar la derivada de $f(x) = \operatorname{senh}^2(3x)$.

**Solución** Por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\operatorname{senh}^2(3x) = \frac{d}{dx}[\operatorname{senh}(3x)]^2 \\ &= 2\operatorname{senh}(3x)\frac{d}{dx}[\operatorname{senh}(3x)] \\ &= 2\operatorname{senh}(3x)\cosh(3x)\frac{d}{dx}(3x) \\ &= 2\operatorname{senh}(3x)\cosh(3x)(3) \\ &= 6\operatorname{senh}(3x)\cosh(3x). \end{aligned}$$

### Ejemplo 9.2 Una integral con una función hiperbólica

Hallar $\int x\cosh(x^2)\,dx$.

**Solución** Se puede resolver la integral mediante la sustitución $u = x^2$, con lo que $du = 2x\,dx$. Así, se obtiene

$$\begin{aligned} \int x\cosh(x^2)\,dx &= \frac{1}{2}\int \underbrace{\cosh(x^2)}_{\cosh u}\underbrace{(2x)\,dx}_{du} \\ &= \frac{1}{2}\int \cosh u\,du = \frac{1}{2}\operatorname{senh} u + c \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{senh}(x^2) + c. \end{aligned}$$

Para $f(x) = \operatorname{senh} x$ conviene advertir que

$$f(x) = \operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \begin{cases} > 0 & \text{si } x > 0 \\ < 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Dejamos la demostración como ejercicio. Además, como $f'(x) = \cosh x > 0$, la función $\operatorname{senh} x$ es creciente para todo $x$. Y como $f''(x) = \operatorname{senh} x$, la gráfica es cóncava hacia abajo en $x < 0$ y cóncava hacia arriba en $x > 0$. Finalmente, es fácil comprobar que

$$\lim_{x\to\infty}\operatorname{senh} x = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty}\operatorname{senh} x = -\infty$$

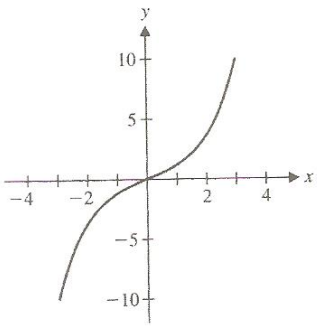



**Figura 6.45**

$y = \operatorname{senh} x$.

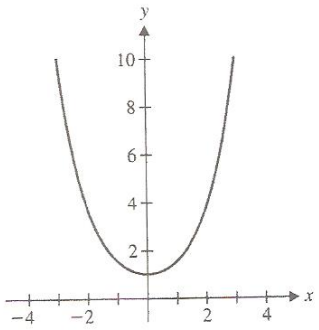



**Figura 6.46a**

$y = \cosh x$.

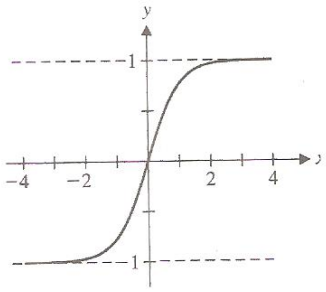



**Figura 6.46b**

$y = \tanh x$.

Con todo eso ya podemos dibujar la gráfica de senh $x$ (figura 6.45). De manera similar se pueden dibujar las gráficas de cosh $x$ y tanh $x$ (figuras 6.46a y 6.46b). Dejamos como ejercicios las tres restantes.

Si un cable flexible (un tendido eléctrico, por ejemplo) cuelga entre dos postes o torres, adopta la forma de una curva catenaria (del latín *catenarius* = cadena). Al final de esta sección demostraremos que esta curva, frecuente en situaciones reales, corresponde a la gráfica de la función coseno hiperbólico, $f(x) = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$.

## Ejemplo 9.3 Pandeo de un cable colgante

Para un cable que adopta la forma de la catenaria $f(x) = 20 \cosh\left(\frac{x}{20}\right)$, con $-20 \le x \le 20$, calcular la altura de pandeo y la longitud total del cable.

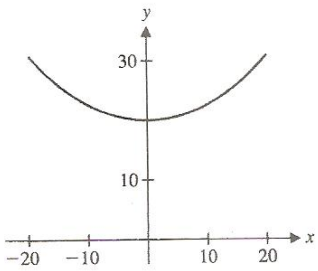



**Figura 6.47**

$y = 20 \cosh\left(\frac{x}{20}\right)$.

**Solución** En la figura 6.47 vemos que el mínimo de la función está en $x = 0$ y el máximo en $x = -20$ y en $x = 20$. Para verificarlo, basta hallar

$$f'(x) = \operatorname{senh}\left(\frac{x}{20}\right),$$

de donde $f'(0) = 0$, mientras $f'(x) < 0$ para $x < 0$ y $f'(x) > 0$ para $x > 0$. Así, pues, $f$ decrece hasta alcanzar un mínimo $f(0) = 0$ en $x = 0$. Además, $f(-20) = f(20) \approx 30{,}86$ es el máximo en $-20 \le x \le 20$, luego la altura de pandeo del cable es 10,86. Por la fórmula usual de la longitud de arco (sección 5.4), la longitud del cable es

$$L = \int_{-20}^{20} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx = \int_{-20}^{20} \sqrt{1 + \operatorname{senh}^2\left(\frac{x}{20}\right)}\, dx.$$

Según (9.1), se tiene

$$1 + \operatorname{senh}^2 x = \cosh^2 x.$$

Usando esta identidad, la integral de la longitud de arco se simplifica.

$$L = \int_{-20}^{20} \sqrt{1 + \operatorname{senh}^2\left(\frac{x}{20}\right)}\, dx = \int_{-20}^{20} \cosh\left(\frac{x}{20}\right) dx$$

$$= 20 \operatorname{senh}\left(\frac{x}{20}\right)\Big|_{-20}^{20} = 20[\operatorname{senh}(1) - \operatorname{senh}(-1)]$$

$$= 40 \operatorname{senh}(1) \approx 47.$$

## Funciones hiperbólicas inversas

En las gráficas de senh $x$ y tanh $x$ se ve que ambas funciones son inyectivas. Por su parte, cosh $x$ es inyectiva en $x \geq 0$. Así, pues, podemos definir sus inversas como sigue. Para todo $x \in (-\infty, \infty)$, definimos el **seno hiperbólico inverso** como

$$y = \operatorname{senh}^{-1} x \quad \text{si, y sólo si,} \quad \operatorname{senh} y = x.$$

Para todo $x \geq 1$, definimos el **coseno hiperbólico inverso** como

$$y = \cosh^{-1} x \quad \text{si, y sólo si,} \quad \cosh y = x, \text{ e } y \geq 0.$$

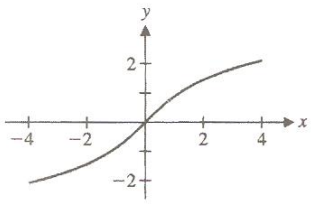



**Figura 6.48a**

$y = \operatorname{senh}^{-1} x$.

Y finalmente, para todo $x \in (-1, 1)$, definimos la **tangente hiperbólica inversa** como

$$y = \tanh^{-1} x \quad \text{si, y sólo si,} \quad \tanh y = x.$$

De forma análoga se definen las inversas de las otras tres funciones hiperbólicas (véanse los ejercicios de la sección). Las figuras 6.48a, 6.48b y 6.48c muestran las gráficas de $y = \operatorname{senh}^{-1} x$, $y = \cosh^{-1} x$ e $y = \tanh^{-1} x$. (Como sabemos, se obtienen reflejando en la recta $y = x$ las gráficas de las funciones originales).

Igual que para las inversas de casos anteriores, las derivadas de las funciones hiperbólicas se deducen por derivación implícita. Sabemos que

$$y = \operatorname{senh}^{-1} x \quad \text{si, y sólo si,} \quad \operatorname{senh} y = x. \tag{9.2}$$

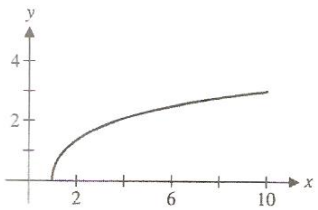



**Figura 6.48b**

$y = \cosh^{-1} x$.

Derivando los dos miembros de esta ecuación con respecto a $x$, resulta

$$\frac{d}{dx} \operatorname{senh} y = \frac{d}{dx} x,$$

o sea,

$$\cosh y \frac{dy}{dx} = 1.$$

Despejando la derivada, se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{senh}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}},$$

puesto que

$$\cosh^2 y - \operatorname{senh}^2 y = 1,$$

según (9.1). Así, pues, hemos probado que

$$\boxed{\frac{d}{dx} \operatorname{senh}^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.}$$

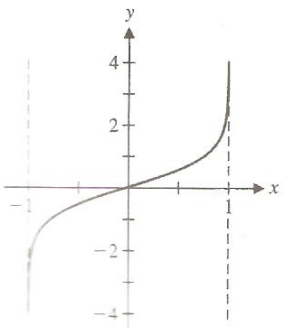



**Figura 6.48c**

$y = \tanh^{-1} x$.

Nótese el parecido con la derivada de $\operatorname{sen}^{-1} x$. De manera análoga, se demuestran las restantes fórmulas de derivación de la tabla adjunta.

$$\frac{d}{dx} \operatorname{senh}^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \qquad \frac{d}{dx} \cosh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\frac{d}{dx} \tanh^{-1} x = \frac{1}{1 - x^2} \qquad \frac{d}{dx} \coth^{-1} x = \frac{1}{1 - x^2}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{sech}^{-1} x = \frac{-1}{x\sqrt{1 - x^2}} \qquad \frac{d}{dx} \operatorname{cosech}^{-1} x = \frac{-1}{|x|\sqrt{1 + x^2}}$$

Antes de cerrar esta sección, queremos hacer constar que las funciones hiperbólicas inversas tienen una ventaja frente a otras inversas anteriores: se pueden expresar explícitamente en términos de funciones elementales.

### Ejemplo 9.4 Una fórmula para el seno hiperbólico inverso

Hallar una fórmula explícita para $\operatorname{senh}^{-1} x$.

**Solución** Por (9.2), sabemos que

$$y = \operatorname{senh}^{-1} x \quad \text{si, y sólo si,} \quad \operatorname{senh} y = x.$$

Usando esta definición, se tiene

$$x = \operatorname{senh} y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}. \tag{9.3}$$

Para despejar $y$ en esta ecuación, empezamos recordando que

$$\cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2}.$$

Ahora, sumando estas dos últimas ecuaciones y la identidad (9.1), obtenemos

$$\begin{aligned} e^y &= \operatorname{senh} y + \cosh y = \operatorname{senh} y + \sqrt{\cosh^2 y} \\ &= \operatorname{senh} y + \sqrt{\operatorname{senh}^2 y + 1} \\ &= x + \sqrt{x^2 + 1}, \end{aligned}$$

por (9.3). Finalmente, tomando logaritmos naturales en ambos lados, resulta

$$y = \ln(e^y) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

De esta forma hemos deducido una fórmula para la función seno hiperbólico inverso:

$$\operatorname{senh}^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

Análogamente, se demuestra que para $x \geq 1$,

$$\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

y para $-1 < x < 1$,

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right).$$

Dejamos como ejercicios las deducciones de estas fórmulas y las correspondientes a las demás funciones hiperbólicas inversas. No tiene mucho sentido memorizarlas. En caso de necesidad, se pueden recuperar con algo de álgebra.

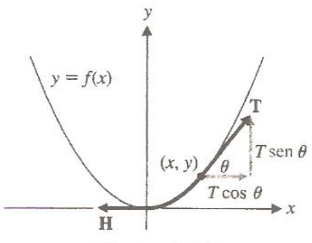



**Figura 6.49**

Fuerzas que actúan sobre un cable colgante.

## La catenaria

Cerramos la sección deduciendo la ecuación de la curva catenaria. Preste atención a la cantidad de resultados del Cálculo utilizados en el proceso.

En la figura 6.49 se ha supuesto que el punto más bajo de la catenaria es el origen. Se supone además que la función $y = f(x)$ tiene dos derivadas continuas. Nos fijamos en la porción de curva desde el origen hasta un punto genérico $(x, y)$. Puesto que está en reposo, las fuerzas horizontales y las verticales deben estar compensadas. Horizontalmente, esta por-

ción del cable sufre, hacia la izquierda, la acción de la tensión $H$ en el origen y, hacia la derecha, la de la componente horizontal $T\cos\theta$ de la tensión $T$ en el punto $(x, y)$. El equilibrio de esas dos fuerzas exige que

$$H = T\cos\theta. \tag{9.4}$$

Verticalmente, sobre esa porción de cable actúa, hacia arriba, la componente vertical $T$ sen $\theta$ de la tensión y hacia abajo su peso, que es el producto de su densidad $\rho$ (peso por unidad de longitud) por su longitud. Por lo visto en el Capítulo 5, la longitud de arco viene dada por $\int_0^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\, dt$. Por tanto, el equilibrio de las fuerzas exige

$$T \text{ sen } \theta = \rho \int_0^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\, dt. \tag{9.5}$$

Multiplicando (9.4) por tan $\theta$ se obtiene $H$ tan $\theta = T$ sen $\theta$. Usando ahora (9.5), concluimos que

$$H \tan\theta = \rho \int_0^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\, dt.$$

La figura 6.49 muestra que tan $\theta = f'(x)$, de modo que

$$Hf'(x) = \rho \int_0^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\, dt.$$

Derivando en ambos lados, el teorema fundamental del Cálculo permite escribir

$$Hf''(x) = \rho\sqrt{1 + [f'(x)]^2}. \tag{9.6}$$

Ahora dividimos esta ecuación entre $H$ y denotamos $b = \frac{\rho}{H}$. Además, sustituimos $u(x) = f'(x)$. Así, la ecuación (9.6) se convierte en

$$u'(x) = b\sqrt{1 + [u(x)]^2},$$

que es una ecuación diferencial separable. Reuniendo todos los términos en $u$ e integrando con respecto a $x$, se obtiene

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 + [u(x)]^2}}\, u'(x)\, dx = \int b\, dx.$$

Identificamos la integral de la izquierda como $\text{senh}^{-1}(u(x))$, de manera que

$$\text{senh}^{-1}(u(x)) = bx + c.$$

Nótese que, puesto que $f(x)$ tiene un mínimo en $x = 0$, ha de ser $u(0) = f'(0) = 0$. Así, pues, tomando $x = 0$, obtenemos $c = \text{senh}^{-1}(0) = 0$. De $\text{senh}^{-1}(u(x)) = bx$ se sigue $u(x) = \text{senh}(bx)$, que al ser $u(x) = f'(x)$ significa $f'(x) = \text{senh}(bx)$. Integrando esto, resulta

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \text{senh}(bx)\, dx \\ &= \frac{1}{b}\cosh(bx) + c. \end{aligned}$$

Ahora, de $f(0) = 0$ concluimos que $c = \frac{-1}{b}$, y por tanto, $f(x) = \frac{1}{b}\cosh(bx) - \frac{1}{b}$. Finalmente, llamando $a = \frac{1}{b}$, llegamos a la ecuación de la catenaria: $f(x) = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right) - a$.

# EJERCICIOS 6.9

1. Comparar las derivadas e integrales de las funciones trigonométricas con las de las hiperbólicas. Nótese que la identidad trigonométrica $\cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1$ sólo difiere en un signo de la correspondiente identidad hiperbólica $\cosh^2 x - \text{senh}^2 x = 1$.

2. Ya hemos comentado en el texto que las funciones hiperbólicas no son realmente funciones nuevas. Simplemente asignan nombres a ciertas combinaciones útiles de las exponenciales. Explicar por qué es conveniente hacerlo en lugar de dejarlas como combinaciones de exponenciales.

3. Describir brevemente las gráficas de senh $x$, cosh $x$ y tanh $x$. ¿A qué polinomios simples recuerdan las dos primeras?

4. La catenaria (coseno hiperbólico) es la forma que adopta un cable colgante debido a que así el peso se distribuye de forma adecuada. Sabiendo eso, ¿por qué fue inteligente construir el Gateway Arch con esa forma? ¿Por qué puede uno sospechar que el perfil de un huevo tiene esa misma forma?

**En los ejercicios 5-12, esbozar la gráfica de la función.**

5. $\cosh 2x$
6. $\text{senh } 3x$
7. $\tanh 4x$
8. $\tanh x^2$
9. $\cosh 2x \text{ senh } 2x$
10. $e^{-x} \text{ senh } x$
11. $x^2 \text{ senh } 2x$
12. $x^3 \text{ senh } x$

**En los ejercicios 13-24, hallar la derivada de cada función.**

13. $\cosh 4x$
14. $\cosh x^2$
15. $\text{senh } 2x$
16. $\text{senh } \sqrt{x}$
17. $\tanh 4x$
18. $\tanh x^2$
19. $\cosh^{-1} 2x$
20. $\text{senh}^{-1} 3x$
21. $x^2 \text{ senh } 2x$
22. $x^3 \text{ senh } x$
23. $\tanh^{-1} 4x$
24. $\text{senh}^{-1} x^2$

**En los ejercicios 25-36, hallar cada integral.**

25. $\int \cosh 6x \, dx$
26. $\int \text{senh } 2x \, dx$
27. $\int \tanh 3x \, dx$
28. $\int \text{sech}^2 x \, dx$
29. $\int_0^1 \frac{e^{4x} - e^{-4x}}{2} \, dx$
30. $\int_0^1 \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{2x} + e^{-2x}} \, dx$
31. $\int \frac{2}{\sqrt{1 + x^2}} \, dx$
32. $\int \frac{2}{\sqrt{1 + x^4}} \, dx$
33. $\int \cos x \text{ senh}(\text{sen } x) \, dx$
34. $\int x \cosh(x^2) \, dx$
35. $\int_0^1 \cosh x \, e^{\text{senh } x} \, dx$
36. $\int_0^1 \frac{\cosh 2x}{3 + \text{senh } 2x} \, dx$

37. Demostrar las fórmulas $\frac{d}{dx} \cosh x = \text{senh } x$ y $\frac{d}{dx} \tanh x = \text{sech}^2 x$.

38. Deducir las fórmulas para las derivadas de coth $x$, sech $x$ y cosech $x$.

39. Usando las propiedades de las funciones exponenciales, probar que senh $x > 0$ si $x > 0$ y que senh $x < 0$ si $x < 0$.

40. Explicar las propiedades de la gráfica de tanh $x$ usando sus dos primeras derivadas.

41. Explicar las propiedades de la gráfica de cosh $x$ usando sus dos primeras derivadas.

42. Demostrar que $\cosh^2 x - \text{senh}^2 x = 1$.

43. Hallar una fórmula explícita para $\cosh^{-1} x$, como en el ejemplo 9.4.

44. Hallar una fórmula explícita para $\tanh^{-1} x$, como en el ejemplo 9.4.

45. Un cable colgante tiene la forma $10 \cosh(x/10)$ con $-20 \le x \le 20$. Hallar su altura de pandeo.

46. Hallar la longitud del cable del ejercicio 45.

47. Un cable colgante tiene la forma $15 \cosh(x/15)$ con $-25 \le x \le 25$. Hallar su altura de pandeo.

48. Hallar la longitud del cable del ejercicio 47.

49. Un cable colgante tiene la forma $a \cosh(x/a)$ con $-b \le x \le b$. Probar que su altura de pandeo viene dada por $a \cosh(b/a) - a$ y su longitud por $2a \cosh(b/a)$.

50. Demostrar que $\cosh(-x) = \cosh x$ (es decir, que cosh $x$ es una función par) y que $\text{senh}(-x) = -\text{senh } x$ (senh $x$ es una función impar).

51. Probar que $e^x = \cosh x + \text{senh } x$. De hecho, vamos a demostrar que ésa es la única manera de expresar $e^x$ como suma de una función par y una impar. En efecto, si $e^x = f(x) + g(x)$, con $f$ par y $g$ impar, demostrar que $e^{-x} = f(x) - g(x)$. Sumando las dos expresiones y dividiendo entre 2 resulta ser $f(x) = \cosh x$. Concluir entonces que $g(x) = \text{senh } x$.

52. Verificar que cosh $x$ y senh $x$ son soluciones de la ecuación diferencial $y'' - y = 0$. Paralelamente, comprobar que cos $x$ y sen $x$ son soluciones de $y'' + y = 0$.

53. Probar que $\lim_{x \to \infty} \tanh x = 1$ y $\lim_{x \to -\infty} \tanh x = -1$.

54. Probar que $\tanh x = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$.

55. En este ejercicio resolvemos el problema de valores iniciales para la velocidad $v(t)$ de un objeto en caída, sujeto a la fuerza de la gravedad y a la resistencia del aire. Suponemos que $mv'(t) = -mg + kv^2$ para alguna constante $k > 0$.

(a) Reescribir la ecuación como $\dfrac{1}{v^2 - mg/k}\, v'(t) = \dfrac{k}{m}$.

(b) Usar la identidad $\dfrac{1}{v^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\left(\dfrac{1}{v-a} - \dfrac{1}{v+a}\right)$ con $a = \sqrt{\dfrac{mg}{k}}$ para resolver la ecuación de (a).

(c) Demostrar que $v(t) = -\sqrt{\dfrac{mg}{k}}\,\dfrac{ce^{2\sqrt{kg/m}t} - 1}{ce^{2\sqrt{kg/m}t} + 1}$.

(d) Usar la condición inicial $v(0) = 0$ para probar que $c = 1$.

(e) Usar el resultado del ejercicio 54 para concluir que $v(t) = -\sqrt{\dfrac{mg}{k}}\tanh\left(\sqrt{\dfrac{kg}{m}}\,t\right)$.

(f) Calcular la velocidad terminal evaluando $\lim_{t\to\infty} v(t)$.

56. Integrar la función velocidad del ejercicio 55, apartado (e), para calcular la distancia caída en $t$ segundos.

57. Dos paracaidistas de 800 N de peso inician su caída a una altura de 1.000 m, el primero cabeza abajo, con coeficiene de rozamiento $k = \frac{1}{8}$, y el segundo con los brazos abiertos, con $k = \frac{1}{2}$. Comparar sus velocidades terminales y las distancias que han caído en 2 segundos y en cuatro segundos.

58. Un paracaidista, con el paracaídas abierto, tiene una velocidad terminal de 5 m/s. Sabiendo que pesa 800 N, determinar el valor de $k$.

59. Long y Weiss proponen la siguiente ecuación para la velocidad horizontal del transbordador espacial a su regreso a la atmósfera (véase sección 4.1): $v(t) = 7.901\tanh(-0{,}00124t + \tanh^{-1}(v_0/7.901))$ m/s, donde $v_0$ es la velocidad en el instante $t = 0$. Calcular la aceleración máxima experimentada por el transbordador en su movimiento horizontal (es decir, maximizar $|v'(t)|$).

60. Representar la función velocidad del ejercicio 59 con $v_0 = 2000$. Estimar el instante $t$ en el cual $v(t) = 0$.

61. El Gateway Arch de San Luis mide 630 pies de ancho y de alto. Su forma se asemeja a una parábola, pero es en realidad un coseno hiperbólico. Vamos a explorar las diferencias entre esas dos funciones. En primer lugar, consideremos el modelo $y = 757{,}7 - 127{,}7\cosh(x/127{,}7)$ para $y \geq 0$. Hallar las intersecciones con los ejes y probar que el modelo se ajusta aproximadamente a los 630 pies del arco Gateway. ¿Por qué número habría que cambiar 127,7 en el modelo para que las ajuste exactamente? Ahora consideremos un modelo parabólico. Para que corte al eje $x$ en $x = -315$ y en $x = 315$, explicar por qué el modelo debe ser de la forma $y = -c(x + 315)(x - 315)$ para alguna constante $c > 0$. A continuación, determinar $c$ de modo que la intersección con el eje $y$ sea 630. Dibujar la parábola y el coseno hiperbólico, en unos mismos ejes, en $-315 \leq x \leq 315$. ¿Cuánto difieren las gráficas? Hallar la máxima distancia vertical entre las dos gráficas. Los autores han visto algunos libros de Matemáticas donde el arco se modela mediante una parábola. Discutir el grado de falsedad de tal modelo.

62. Una persona salta de un avión a gran altura. Actúan sobre ella dos fuerzas: la gravedad y la resistencia del aire, que es proporcional al cuadrado de la velocidad. La velocidad (hacia abajo), en tales circunstancias, cumple la ecuación $v' = g - cv^2$, donde $g$ es la aceleración de la gravedad y $c$ una constante determinada por la orientación del cuerpo de la persona. Sustituir $c$ por $g/v_T^2$ y explicar por qué la condición inicial $v(0) = 0$ es razonable. Probar que la solución del PVI es de la forma $v = v_T\tanh(gt/v_T)$. Demostrar que la velocidad $v$ es una función creciente y calcular la **velocidad terminal**, es decir, el límite de la velocidad cuando $t \to \infty$. Ya hemos dicho que el valor de $c$ depende de la posición del cuerpo. Si en la posición de brazos en cruz tiene un valor cuatro veces mayor que en la posición cabeza abajo, comparar las velocidades terminales. Habrá visto en algún documental a varias personas que van saltando y se unen unos con otros poco después para formar un círculo. Explicar cómo se puede alcanzar a alguien que ha saltado antes. Ahora, integrar la función velocidad para obtener la función distancia. ¿Cuánto tiempo tarda y qué altura ha caído uno de ellos hasta alcanzar el 90% de la velocidad terminal?

# EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO

**En los ejercicios 1-16, hallar la derivada de la función.**

1. $\ln(x^3 + 5)$
2. $\ln(1 - \operatorname{sen} x)$
3. $\ln \sqrt{x^4 + x}$
4. $\ln \dfrac{x^2 - 1}{x^3 + 2x + 1}$
5. $e^{-x^2\sqrt{x}}$
6. $e^{\tan x}$
7. $4^{x^3}$
8. $3^{1-2x}$
9. $\operatorname{sen}^{-1} 2x$
10. $\cos^{-1} x^2$
11. $\tan^{-1}(\cos 2x)$
12. $\sec^{-1}(3x^2)$
13. $\cosh \sqrt{x}$
14. $\operatorname{senh}(e^{2x})$
15. $\operatorname{senh}^{-1} 3x$
16. $\tanh^{-1}(3x + 1)$

**En los ejercicios 17-40, hallar la integral.**

17. $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^3 + 4}\,dx$
18. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 4}\,dx$
19. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1}\,dx$
20. $\displaystyle\int_{\pi/12}^{\pi/4} \frac{\cos 2x}{\operatorname{sen} 2x}\,dx$
21. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(\ln x)}{x}\,dx$
22. $\displaystyle\int \frac{\ln x + 1}{x}\,dx$
23. $\displaystyle\int e^{-4x}\,dx$
24. $\displaystyle\int e^{2x}\cos(e^{2x})\,dx$
25. $\displaystyle\int \frac{e}{\sqrt{x}}\,dx$
26. $\displaystyle\int xe^{-x^2}\,dx$
27. $\displaystyle\int_0^2 e^{3x}\,dx$
28. $\displaystyle\int_{-2}^0 e^{-3x}\,dx$
29. $\displaystyle\int 3^{4x}\,dx$
30. $\displaystyle\int 2^{-5x}\,dx$
31. $\displaystyle\int \frac{3}{x^2 + 4}\,dx$
32. $\displaystyle\int \frac{6}{\sqrt{4 - x^2}}\,dx$
33. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^6}}\,dx$
34. $\displaystyle\int \frac{e^{-x}}{1 + e^{-2x}}\,dx$
35. $\displaystyle\int \frac{9x}{x^2\sqrt{x^4 - 1}}\,dx$
36. $\displaystyle\int \frac{9x^3}{x^4 - 1}\,dx$
37. $\displaystyle\int \frac{4}{\sqrt{1 + x^2}}\,dx$
38. $\displaystyle\int \frac{4}{x^2 - 1}\,dx$
39. $\displaystyle\int \cosh 4x\,dx$
40. $\displaystyle\int \tanh 3x\,dx$

**En los ejercicios 41-44, averiguar si la función es inyectiva. Si lo es, hallar su inversa.**

41. $x^3 - 1$
42. $e^{-4x}$
43. $e^{2x^2}$
44. $x^3 - 2x + 1$

**En los ejercicios 45-48, responder los dos apartados sin hallar explícitamente la función inversa: (a) hallar la derivada de la inversa en $x = a$, (b) representar la gráfica de la inversa.**

45. $x^5 + 2x^3 - 1,\ a = 2$
46. $x^3 + 5x + 2,\ a = 2$
47. $\sqrt{x^3 + 4x},\ a = 4$
48. $e^{x^3+2x},\ a = 1$

**En los ejercicios 49-54, resolver el PVI propuesto.**

49. $y' = 2y,\ y(0) = 3$
50. $y' = -3y,\ y(0) = 2$
51. $y' = \dfrac{2x}{y},\ y(0) = 2$
50. $y' = -3xy^2,\ y(0) = 4$
53. $y' = \sqrt{xy},\ y(1) = 4$
54. $y' = x + y^2x,\ y(0) = 1$

55. Un cultivo de bacterias tiene una población inicial $10^4$ y se duplica cada 2 horas. Hallar una ecuación para la población en función del tiempo y averiguar cuándo alcanza el valor $10^6$.

56. Una población es 100 en $t = 0$ y 140 en $t = 2$. Hallar una ecuación para la población en función del tiempo y averiguar cuál es la población en el instante $t = 6$.

57. La semivida de la nicotina en la sangre del cuerpo humano es 2 horas. Si hay inicialmente 2 mg de nicotina en la sangre, hallar una ecuación para la cantidad presente en función del tiempo $t$ y determinar cuándo cae hasta 0,1 mg.

58. La semivida de un material radiactivo es 3 horas. ¿Qué porcentaje del material queda a las 9 horas? ¿Y a las 11 horas?

59. Invertimos 2.000 euros al 8% de interés compuesto continuamente. ¿Cuánto tiempo tardamos en doblar el capital?

60. Invertimos 4.000 euros al 6% de interés compuesto continuamente. ¿Qué capital tendremos a los 10 años?

61. Una taza de café a 180° F se sirve en una sala cuya temperatura es 68° F. Tras un minuto, la temperatura del café es 176° F. Hallar una ecuación para la temperatura en función del tiempo y averiguar cuándo llega a 120° F.

62. Una bebida fría, a 46° F, se sirve en una sala cuya temperatura es de 70° F. Cuatro minutos después, la temperatura ha subido hasta 48° F. Hallar una ecuación para la temperatura en función del tiempo y averiguar cuándo llega a 58° F.

**En los ejercicios 63-66, resolver la ecuación diferencial separable, explícitamente si es posible.**

63. $y' = 2x^3y$
64. $y' = \dfrac{y}{\sqrt{1 - x^2}}$
65. $y' = \dfrac{4}{(y^2 + y)(1 + x^2)}$
66. $y' = e^{x+y}$

**En los ejercicios 67-70, hallar las soluciones de equilibrio y determinar si son estables o inestables.**

67. $y' = 3y(2 - y)$
68. $y' = y(1 - y^2)$
69. $y' = -y\sqrt{1 + y^2}$
70. $y' = y + \dfrac{2y}{1 - y}$

**En los ejercicios 71-74, esbozar el campo de direcciones.**

71. $y' = -x(4 - y)$
72. $y' = 4x - y^2$
73. $y' = 2xy - y^2$
74. $y' = 4x - y$

**En los ejercicios 75 y 76, aproximar $y(1)$ e $y(2)$ por el método de Euler con (a) $h = 0{,}1$ y (b) $h = 0{,}05$. Hacer los dos primeros pasos a mano.**

75. $y' = 2x - y$, $y(0) = 3$
76. $y' = 3xy$, $y(0) = 1$

**En los ejercicios 77-80, evaluar la cantidad usando la circunferencia unidad.**

77. $\text{sen}^{-1} 1$
78. $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$
79. $\tan^{-1}(-1)$
80. $\text{cosec}^{-1}(-2)$

**En los ejercicios 81-84, simplificar la expresión con ayuda de un triángulo.**

81. $\text{sen}(\sec^{-1} 2)$
82. $\tan(\cos^{-1}(4/5))$
83. $\text{sen}^{-1}(\text{sen}(3\pi/4))$
84. $\cos^{-1}(\text{sen}(-\pi/4))$

**En los ejercicios 85 y 86, hallar todas las soluciones de la ecuación.**

85. $\text{sen}\, 2x = 1$
86. $\cos 3x = \frac{1}{2}$

**En los ejercicios 87-92, dibujar un esbozo de la gráfica.**

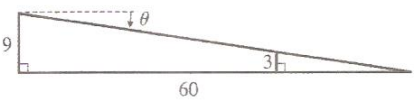
87. $y = \cosh 2x$
88. $y = \tanh^{-1} 3x$
89. $y = \text{sen}^{-1} 2x$
90. $y = \tan^{-1} 3x$
91. $y = e^{-x^2}$
92. $y = \ln 2x$

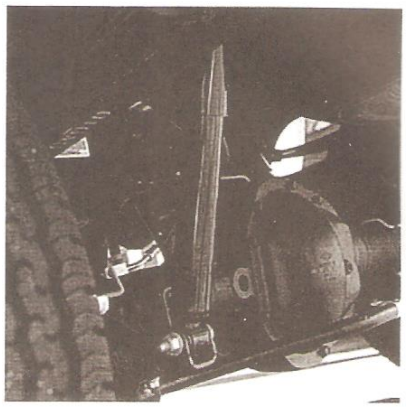
93. Un cable colgante adopta la forma de $y = 20 \cosh \dfrac{x}{20}$, con $-25 \le x \le 25$. Calcular la altura de pandeo del cable.

94. Calcular la longitud del cable del ejercicio 93.

95. En tenis, el servicio tiene que salvar la red y caer dentro de la zona de saque. Vamos a investigar el margen de error de un buen servicio. En primer lugar, consideremos un servicio en línea recta (lo que significaría velocidad infinita) golpeado a 9 pies de altura. Llamemos (0, 9) al punto inicial. La línea límite de la zona donde debe entrar el servicio está a 60 pies de distancia, en el punto (60, 0). La parte superior de la red está a 3 pies del suelo y a 39 pies del jugador que efectúa el saque, en el punto (39, 3). Hallar el ángulo $\theta$ del saque (medido sobre la horizontal) en el triángulo formado por los puntos (0, 9), (0, 0) y (60, 0).

Naturalmente, en un servicio real, la bola se curva por efecto de la gravedad. Ignorando la resistencia del aire, la trayectoria de una bola lanzada con ángulo $\theta$ y con velocidad inicial $v$ pies/s es $y = -\dfrac{16}{(v \cos \theta)^2} x^2 - (\tan \theta)x + 9$. Para dar en la línea de fondo de la zona de saque debe ser $y = 0$ en $x = 60$. Sustituya estos valores, junto con $v = 120$. Multiplique por $\cos^2 \theta$ y cambie $\text{sen}\, \theta$ por $\sqrt{1 - \cos^2 \theta}$. Denotando $z = \cos \theta$ se obtiene una ecuación algebraica en $z$. Estimar $z$ numéricamente. Análogamente, sustituya $x = 39$ e $y = 3$ y encuentre una ecuación para $w = \cos \theta$. Estime $w$ numéricamente. El margen de error en el servicio viene dado por $\cos^{-1} z < \theta < \cos^{-1} w$.



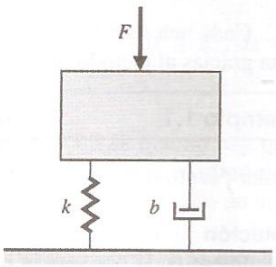


# CAPÍTULO 7

# TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

El objetivo del ciclo de centrifugado en una lavadora es expulsar el agua de la ropa antes de ponerla a secar. El tambor de la lavadora gira rápidamente y la ropa es presionada contra la superficie cilíndrica. Cuando la lavadora está muy cargada o hay alguna prenda muy pesada, la distribución de la carga no es uniforme y puede causar vibraciones fuertes e incluso pérdida de la estabilidad. Una cuestión importante en el diseño de las lavadoras (y de otras máquinas) es la fuerza y la situación de los muelles y de otros mecanismos de absorción para amortiguar las vibraciones. Un buen diseño debe minimizar las vibraciones y la fuerza transmitida al suelo. La figura muestra un esquema de una máquina del tipo de una lavadora.

La figura muestra una fuerza vertical $F$ que empuja hacia abajo contra un muelle (la constante $k$ del muelle mide su rigidez) y un mecanismo de absorción (cuya constante de amortiguamiento $b$ mide su resistencia al movimiento). El análisis matemático de uno de estos sistemas comienza típicamente con la segunda ley del movimiento de Newton, que produce una ecuación diferencial que describe el movimiento de la máquina. Entonces se resuelve la ecuación diferencial o, si es demasiado difícil para resolverla, se utiliza para deducir importantes propiedades de la solución. Los ingenieros suelen usar una técnica basada en la transformada de Laplace para investigar tales ecuaciones (véase, por ejemplo, *Mathematical Models and Their Analysis*, de Wan, o cualquier libro elemental sobre ecuaciones diferenciales).



Esquema de una máquina.

Las matemáticas desarrolladas en este capítulo son esenciales en la resolución de problemas de ingeniería, tales como el análisis de las vibraciones de una máquina. Tal vez recuerde del Capítulo 6 que la integración desempeña un papel clave en la resolución de ecuaciones diferenciales. Las cinco primeras secciones de este capítulo repasan la integración y presentan métodos más avanzados para hallar primitivas. En las dos últimas secciones introducimos las ideas necesarias para definir la transformada de Laplace y otras nociones interesantes. En particular, investigamos cómo calcular integrales sobre dominios infinitos. Definimos tales **integrales impropias** en la sección 7.7. Antes de eso, extendemos la aplicación de la regla de L'Hôpital a diversas formas indeterminadas.

Haremos uso de esta regla de L'Hôpital extendida para calcular algunos de los límites que aparecen en la evaluación de integrales impropias.

Aunque al final del capítulo estaremos en condiciones de afrontar la definición y las aplicaciones de la transformación de Laplace, un estudio más profundo de estas cuestiones debe quedar relegado a cursos futuros. Lo citamos sólo como ejemplo de las múltiples direcciones que las clases de matemáticas pueden tomar tras un curso de Cálculo.

## 7.1 REPASO DE FÓRMULAS Y TÉCNICAS

En esta sección vamos a reunir todas las fórmulas de integración y la única técnica de integración (la sustitución o cambio de variable) estudiadas hasta ahora. Las usaremos para desarrollar fórmulas más generales y resolver problemas de integración más complicados. Las fórmulas de la tabla siguiente han sido expuestas en los Capítulos 4 y 6.

| | |
|---|---|
| $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$, si $n \neq -1$ (regla de las potencias) | $\int \dfrac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + c$, para $x \neq 0$ |
| $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + c$ | $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + c$ |
| $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$ | $\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + c$ |
| $\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\cot x + c$ | $\int \operatorname{cosec} x \cot x\,dx = -\operatorname{cosec} x + c$ |
| $\int e^x\,dx = e^x + c$ | $\int e^{-x}\,dx = -e^{-x} + c$ |
| $\int \tan x\,dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + c$ | $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{sen}^{-1} x + c$ |
| $\int \dfrac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1} x + c$ | $\int \dfrac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}\,dx = \sec^{-1} x + c$ |

Cada una de ellas proviene de una fórmula de derivación. Y hemos ampliado algo esta lista gracias al método de sustitución, como en el ejemplo que sigue.

### Ejemplo 1.1 Una sustitución simple

Hallar $\int \operatorname{sen}(ax)\,dx$, con $a \neq 0$.

**Solución** Tal vez vea ya cuál es la solución, pero piense un momento para asegurarse de que entiende por qué la respuesta es correcta. La elección obvia es hacer $u = ax$, con $du = a\,dx$, con lo cual

$$\int \operatorname{sen}(ax)\,dx = \frac{1}{a}\int \underbrace{\operatorname{sen}(ax)}_{\operatorname{sen} u}\,\underbrace{a\,dx}_{du} = \frac{1}{a}\int \operatorname{sen} u\,du$$

$$= -\frac{1}{a}\cos u + c = -\frac{1}{a}\cos(ax) + c.$$

No es necesario memorizar reglas generales como la del ejemplo 1.1, aunque puede ser conveniente. Lo más importante es ser capaz de reproducirlas en cualquier momento mediante sustitución. El próximo ejemplo contiene otra regla general.

### Ejemplo 1.2 Generalización de una regla básica de integración

Hallar $\int \dfrac{1}{a^2+x^2}\,dx$, con $a \neq 0$.

**Solución** Nótese que es casi igual que $\int \dfrac{1}{1+x^2}\,dx$ y podemos escribir

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2}\, dx = \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2}\, dx.$$

Ahora, haciendo $u = \frac{x}{a}$, es $du = \frac{1}{a}\, dx$ y por tanto,

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2}\, dx = \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2}\, dx = \frac{1}{a} \int \underbrace{\frac{1}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2}}_{1 + u^2} \underbrace{\left(\frac{1}{a}\right) dx}_{du}$$

$$= \frac{1}{a} \int \frac{1}{1 + u^2}\, du = \frac{1}{a} \tan^{-1} u + c = \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c.$$

Las fórmulas básicas de integración de la tabla anterior junto con sustitución y una pizca de ingenio permiten hallar un buen número de integrales. Bien es verdad que la sustitución no arreglará todos nuestros problemas, como pone de relieve el siguiente ejemplo.

### Ejemplo 1.3 Un integrando que debe ser desarrollado

Hallar $\int (x^2 - 5)^2\, dx$.

**Solución** Tal como está escrita, no la sabemos resolver. Un primer impulso es hacer $u = x^2 - 5$, pero no funciona porque no tenemos $du = 2x\, dx$ en el integrando. (Podemos arreglar la falta del factor 2, pero no la de $x$). Por otra parte, siempre queda el recurso de efectuar las operaciones, con lo que resulta

$$\int (x^2 - 5)^2\, dx = \int (x^4 - 10x^2 + 25)\, dx = \frac{x^5}{5} - 10\,\frac{x^3}{3} + 25x + c.$$

La enseñanza del ejemplo 1.3 es que no hay que menospreciar los métodos más simples. La receta más general en integración es **intentarlo todo**. En ocasiones hará falta alguna manipulación algebraica para reconocer el tipo de integral.

### Ejemplo 1.4 Una integral en la que hay que completar el cuadrado

Hallar $\int \frac{1}{\sqrt{-5 + 6x - x^2}}\, dx$.

**Solución** Aquí su mente habrá quedado en blanco. Ni la sustitución del denominador completo ni la de la cantidad bajo la raíz funcionan. (¿Por qué no?). Entonces, ¿qué nos queda por ensayar? Recuerde que sólo hay dos alternativas con un polinomio cuadrático: factorizarlo o completar el cuadrado. En este caso, la segunda posibilidad abre la puerta a la esperanza. Se tiene

$$\int \frac{1}{\sqrt{-5 + 6x - x^2}}\, dx = \int \frac{1}{\sqrt{-5 - (x^2 - 6x + 9) + 9}}\, dx = \int \frac{1}{\sqrt{4 - (x - 3)^2}}\, dx.$$

Nótese que esto se parece mucho a $\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = \operatorname{sen}^{-1} x + c$. Si sacamos de la raíz un factor 4, queda

$$\int \frac{1}{\sqrt{-5 + 6x - x^2}}\, dx = \int \frac{1}{\sqrt{4 - (x - 3)^2}}\, dx = \int \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x-3}{2}\right)^2}}\, \frac{1}{2}\, dx.$$

Ahora hacemos $u = \dfrac{x-3}{2}$, con lo que $du = \frac{1}{2}\,dx$. Así, se obtiene

$$\int \frac{1}{\sqrt{-5+6x-x^2}}\,dx = \int \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x-3}{2}\right)^2}}}_{\sqrt{1-u^2}} \underbrace{\frac{1}{2}\,dx}_{du} = \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du$$

$$= \operatorname{sen}^{-1} u + c = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x-3}{2}\right) + c.$$

El próximo ejemplo ilustra el valor de la perseverancia.

**Ejemplo 1.5** **Una integral que requiere cierta imaginación**

Hallar $\displaystyle\int \frac{4x+1}{2x^2+4x+10}\,dx$.

**Solución** Como ocurre con la mayoría de las integrales, no sabemos resolverla tal cual está. El numerador es casi la derivada del denominador, pero no exactamente. Así que pregúntese: ¿qué se puede intentar con este integrando? El polinomio cuadrático del denominador no factoriza. Por tanto, la única técnica que queda es completar el cuadrado:

$$\int \frac{4x+1}{2x^2+4x+10}\,dx = \int \frac{4x-1}{2(x^2+2x+1)-2+10}\,dx = \int \frac{4x+1}{2(x+1)^2+8}\,dx.$$

¿Y ahora qué? Cuando el paso siguiente no es evidente, es recomendable buscar alguna pauta. Vamos a centrarnos en el denominador. Es del mismo tipo que el de $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1} x + c$. Si sacamos un factor 8, todavía se parece más. En efecto,

$$\int \frac{4x+1}{2x^2+4x+10}\,dx = \int \frac{4x+1}{2(x+1)^2+8}\,dx.$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{4x+1}{\frac{1}{4}(x+1)^2+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{4x+1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}\,dx.$$

Ahora hacemos la sustitución $u = \dfrac{x+1}{2}$, de modo que $du = \frac{1}{2}\,dx$ y $x = 2u - 1$. Obtenemos así

$$\int \frac{4x+1}{2x^2+4x+10}\,dx = \frac{1}{8}\int \frac{4x+1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}\,dx = \frac{1}{4}\int \underbrace{\frac{\overbrace{4x+1}^{4(2u-1)+1}}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}}_{u^2+1} \underbrace{\frac{1}{2}\,dx}_{du}$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{4(2u-1)+1}{u^2+1}\,du = \frac{1}{4}\int \frac{8u-3}{u^2+1}\,du$$

$$= \frac{4}{4}\int \frac{2u}{u^2+1}\,du - \frac{3}{4}\int \frac{1}{u^2+1}\,du$$

$$= \ln(u^2 + 1) - \frac{3}{4}\tan^{-1} u + c$$

$$= \ln\left[\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + 1\right] - \frac{3}{4}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + c.$$

Este último ejemplo es algo tedioso, pero razonablemente directo. Lo esencial en integración es reconocer los fragmentos adecuados en el integrando y ver cómo se puede reescribir la integral de una forma más familiar. En la próxima sección presentaremos un instrumento eficaz de integración.

## EJERCICIOS 7.1

1. En el ejemplo 1.2, explicar cómo se escribiría el denominador en la forma $a^2\left[1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2\right]$. ¿Seguiría siendo una estrategia acertada si el numerador fuera $x$ en vez de 1? ¿Qué haría si el denominador fuera $\sqrt{a^2 - x^2}$?

2. En los ejemplos 1.4 y 1.5 hemos completado el cuadrado y hallado primitivas que contienen $\text{sen}^{-1} x$, $\tan^{-1} x$ y $\ln(x^2 + 1)$. Describa brevemente cómo decide cuál de ellas es primitiva la presencia de un $x$ en el numerador o de una raíz cuadrada en el denominador.

**En los ejercicios 3-40, hallar la integral.**

3. $\int \text{sen } 6x\, dx$
4. $\int 3\cos 4x\, dx$
5. $\int \sec 2x \tan 2x\, dx$
6. $\int x \sec x^2 \tan x^2\, dx$
7. $\int e^{3-2x}\, dx$
8. $\int \frac{3}{e^{6x}}\, dx$
9. $\int \frac{\text{sen } \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$
10. $\int \frac{\cos 1/x}{x^2}\, dx$
11. $\int_0^{\pi} \cos x\, e^{\text{sen } x}\, dx$
12. $\int_0^{\pi/4} \sec^2 x\, e^{\tan x}\, dx$
13. $\int_{-\pi/4}^{0} \frac{\text{sen } x}{\cos^2 x}\, dx$
14. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{\text{sen}^2 x}\, dx$
15. $\int \frac{3}{16 + x^2}\, dx$
16. $\int \frac{2}{4 + 4x^2}\, dx$
17. $\int \frac{x^2}{1 + x^6}\, dx$
18. $\int \frac{x^5}{1 + x^6}\, dx$
19. $\int \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}\, dx$
20. $\int \frac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}}\, dx$
21. $\int \frac{x}{\sqrt{1 - x^4}}\, dx$
22. $\int \frac{2x^3}{\sqrt{1 - x^4}}\, dx$
23. $\int \frac{4}{5 + 2x + x^2}\, dx$
24. $\int \frac{4x + 4}{5 + 2x + x^2}\, dx$
25. $\int \frac{4x}{5 + 2x + x^2}\, dx$
26. $\int \frac{x + 1}{x^2 + 2x + 4}\, dx$
27. $\int (x^2 + 4)^2\, dx$
28. $\int x(x^2 + 4)^2\, dx$
29. $\int \frac{1}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}\, dx$
30. $\int \frac{x + 1}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}\, dx$
31. $\int \frac{2}{\sqrt{4x - x^2}}\, dx$
32. $\int \frac{3}{\sqrt{5 - 4x - x^2}}\, dx$
33. $\int_{-2}^{-1} e^{\ln(x^2 + 1)}\, dx$
34. $\int_1^3 e^{2 \ln x}\, dx$
35. $\int_3^4 x\sqrt{x - 3}\, dx$
36. $\int_0^1 x(x - 3)^2\, dx$
37. $\int_0^2 \frac{e^x}{1 + e^{2x}}\, dx$
38. $\int_{-1}^{0} e^x \cot(e^x) \operatorname{cosec}(e^x)\, dx$
39. $\int_1^4 \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x}}\, dx$
40. $\int_{-2}^{0} xe^{-x^2}\, dx$

**En los ejercicios 41-48, hallar la integral (usando fórmulas no citadas en esta sección, pero sí en otras partes del libro).**

41. $\int \text{senh } 2x\, dx$
42. $\int \cosh 4x\, dx$
43. $\int \tanh 3x\, dx$
44. $\int e^x \cosh e^x\, dx$
45. $\int x \cosh x^2\, dx$
46. $\int \sec^2 x \cosh(\tan x)\, dx$
47. $\int \frac{3}{\sqrt{x^2 - 1}}\, dx$
48. $\int \frac{3}{\sqrt{x^2 + 1}}\, dx$
49. $\int \frac{3x}{x^2\sqrt{x^4 - 1}}\, dx$
50. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\text{sen}^2 x + 1}}\, dx$

**En los ejercicios 51-56 se proponen dos integrales. Hallar, en cada caso, la que sea posible mediante técnicas estudiadas hasta ahora (las demás, no).**

51. $\int \frac{5}{3 + x^2}\, dx$ y $\int \frac{5}{3 + x^3}\, dx$

52. $\int \operatorname{sen} 2x\,dx$ y $\int \operatorname{sen}^2 x\,dx$

53. $\int \ln x\,dx$ y $\int \dfrac{\ln x}{2x}\,dx$

54. $\int \dfrac{x^3}{1+x^8}\,dx$ y $\int \dfrac{x^4}{1+x^8}\,dx$

55. $\int e^{-x^2}\,dx$ y $\int x\,e^{-x^2}\,dx$

56. $\int \sec x\,dx$ y $\int \sec^2 x\,dx$

57. Hallar $\int_0^2 f(x)\,dx$, donde $f(x) = \begin{cases} x/(x^2+1) & \text{si } x \le 1 \\ x^2/(x^2+1) & \text{si } x > 1 \end{cases}$

58. Hallar $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$, donde $f(x) = \begin{cases} x\,e^{x^2} & \text{si } x < 0 \\ x^2 e^{x^3} & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

59. Hallar las dos integrales del ejercicio 51 con un PCS. Intentarlo también con $\int \dfrac{5}{3+x^4}\,dx$ y $\int \dfrac{5}{3+x^5}\,dx$. Comentar cualquier pauta observada. Intente decidir si se puede encontrar una primitiva de $\int \dfrac{5}{3+x^n}\,dx$ para cualquier potencia $n$.

60. Hallar las dos integrales del ejercicio 52 con un PCS. Intentarlo también con $\int \operatorname{sen}^3 x\,dx$ y $\int \operatorname{sen}^4 x\,dx$. Comentar cualquier pauta observada. Intente decidir si se pueden hallar primitivas de cualquier potencia de sen $x$.

## 7.2 INTEGRACIÓN POR PARTES

A estas alturas ya sabemos que, aunque derivación e integración son operaciones estrechamente vinculadas, calcular derivadas y calcular integrales son dos cosas muy distintas. Disponemos de reglas para derivar casi cualquier función imaginable, mientras que, por el contrario, de momento podemos hallar primitivas de pocas funciones. Hasta ahora hemos elaborado una colección de reglas básicas de integración asociadas casi todas a fórmulas de derivación correspondientes. Aparte de esas reglas básicas, conocemos la técnica de sustitución que permite escribir algunas integrales de manera más sencilla. Por desgracia, muchas integrales quedan todavía fuera de nuestro alcance. Por ejemplo, no sabemos hallar

$$\int x \operatorname{sen} x\,dx.$$

En esta sección mejoraremos nuestra situación gracias a una técnica muy potente: la integración por partes.

Hemos dicho varias veces que cada regla de derivación lleva asociada otra de integración. Pues bien, recordemos la regla del producto:

$$\frac{d}{dx}\,[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Si integramos los dos miembros de esta ecuación, obtenemos

$$\int \frac{d}{dx}\,[f(x)g(x)]\,dx = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx.$$

La integral de la izquierda es simplemente $f(x)g(x)$. Por tanto, despejando la segunda integral de la derecha, resulta

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx.$$

Esta regla se conoce como **integración por partes**. (Es aconsejable que derive ambos lados para verificar la igualdad directamente). Puede que esté pensando: ¿para qué diablos sirve eso? Sin duda, es difícil apreciar su utilidad a primera vista. Los ejemplos le irán convenciendo. Antes de seguir, conviene reescribirla utilizando la notación $u = f(x)$, $v = g(x)$. Así, se tiene

$$du = f'(x)\,dx \quad \text{y} \quad dv = g'(x)\,dx,$$

**Notas históricas**

**Brook Taylor (1685-1731).** Matemático inglés a quien se atribuye la introducción de la integración por partes. Taylor hizo importantes contribuciones a las probabilidades, al magnetismo y a la teoría de la perspectiva. Sin embargo, es conocido sobre todo por el teorema de Taylor (sección 8.7), que generaliza un resultado de Newton, Halley, los Bernoulli y otros. Tragedias personales (sus dos esposas murieron al dar a luz) y una salud quebradiza mermaron la aportación de este matemático brillante.

de modo que la fórmula de la integración por partes se expresa

**Integración por partes**

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \tag{2.1}$$

Para aplicarla es necesario elegir astutamente $u$ y $dv$ en el integrando, de manera tal que la integral de la derecha en (2.1) sea fácil de resolver.

### Ejemplo 2.1 Integración por partes

Hallar $\int x \operatorname{sen} x\,dx$.

**Solución** En la forma propuesta no la sabemos resolver con las reglas básicas y tampoco con una sustitución. Para aplicar integración por partes, hemos de elegir $u$ (algo para derivar) y $dv$ (algo para integrar). Tomando

$$u = x \quad \text{y} \quad dv = \operatorname{sen} x\,dx,$$

se tiene $du = dx$, e integrando $dv$, encontramos

$$v = \int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + k.$$

Al integrar por partes, dejamos de lado esta constante de integración (piense por qué es correcto hacer esto). Es costumbre escribir de un golpe toda esa información:

$$\begin{aligned} u &= x & dv &= \operatorname{sen} x\,dx \\ du &= dx & v &= -\cos x \end{aligned}$$

Así, obtenemos

$$\begin{aligned} \int \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{\operatorname{sen} x\,dx}_{dv} &= \int u\,dv = uv - \int v\,du \\ &= -x\cos x - \int (-\cos x)\,dx \\ &= -x\cos x + \operatorname{sen} x + c. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Resulta muy fácil derivar la expresión final de (2.2) para verificar directamente que es una primitiva de $x \operatorname{sen} x$.

**Nota 2.1**

Al integrar por partes, estamos separando el integrando en dos fragmentos: $u$, que será derivado, y $dv$, que será integrado. Como derivar no plantea problema alguno, hay que pensar sobre todo en la elección de $dv$, ya que necesitamos conocer una primitiva. Desgraciadamente, no siempre es fácil adivinar el proceso de principio a fin. Sólo la práctica enseña a intuir las elecciones adecuadas. Aunque no vea cómo va a discurrir el problema de principio a fin, ¡**intente algo**! (Al menos, aprenderá que el intento no era bueno).

Insistimos en que la elección de $u$ y $dv$ es crítica. Observe lo que sucede en el ejemplo 2.1 si las intercambiamos.

### Ejemplo 2.2 Una desafortunada elección de $u$ y $dv$

Intentar resolver la integral $\int x \operatorname{sen} x\,dx$ del ejemplo 2.1, pero intercambiando la elección de $u$ y $dv$.

**Solución** Ahora se tiene

$$\begin{aligned} u &= \operatorname{sen} x & dv &= x\,dx \\ du &= \cos x\,dx & v &= \tfrac{1}{2}x^2 \end{aligned}$$

Así, obtenemos

$$\int \underbrace{\operatorname{sen} x}_{u}\,\underbrace{x\,dx}_{dv} = uv - \int v\,du = \tfrac{1}{2}x^2 \operatorname{sen} x - \tfrac{1}{2}\int x^2 \cos x\,dx.$$

Pero esta vez la integral final es aún más difícil que la original. Hemos empeorado la situación porque la potencia de $x$ ha aumentado.

**Ejemplo 2.3** **Un integrando con un solo término**

Hallar $\int \ln x \, dx$.

**Solución** A pesar de que esta integral es muy simple, ni se resuelve con las reglas básicas ni hay sustitución que la simplifique. Sólo nos queda el recurso de la integración por partes. Tenemos que elegir $u$ (que derivaremos) y $dv$ (que integraremos). Es obvio que no podemos tomar $dv = \ln x \, dx$, ya que el problema es precisamente integrar eso. Por tanto, elegimos

$$u = \ln x \qquad dv = dx$$
$$du = \frac{1}{x}\,dx \qquad v = x$$

Integrando por partes, obtenemos

$$\int \underbrace{\ln x}_{u}\,\underbrace{dx}_{dv} = uv - \int v\,du = x\ln - \int x\left(\frac{1}{x}\right)dx$$
$$= x\ln x - \int 1\,dx = x\ln x - x + c.$$

En ocasiones, al integrar por partes, llegamos a una integral que no sabemos hallar directamente, pero que se puede resolver aplicando una vez más (o varias) integración por partes.

**Ejemplo 2.4** **Integración por partes iterada**

Hallar $\int x^2 \operatorname{sen} x \, dx$.

**Solución** Está claro que ni la sabemos hallar tal como está ni hay sustitución que la simplifique. Elegimos

$$u = x^2 \qquad dv = \operatorname{sen} x\,dx$$
$$du = 2x\,dx \qquad v = -\cos x$$

e integramos por partes:

$$\int \underbrace{x^2}_{u}\,\underbrace{\operatorname{sen} x\,dx}_{dv} = -x^2\cos x + 2\int x\cos x\,dx.$$

No sabemos hallar la integral de la derecha, pero si le aplicamos integración por partes con

$$u = x \qquad dv = \cos x\,dx$$
$$du = dx \qquad v = \operatorname{sen} x$$

obtenemos finalmente

$$\int x^2 \operatorname{sen} x\,dx = -x^2\cos x + 2\int \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{\cos x\,dx}_{dv}$$
$$= -x^2\cos x + 2\left(x\operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\,dx\right)$$
$$= -x^2\cos x + 2x\operatorname{sen} x + 2\cos x + c.$$

**Nota 2.2**

En la segunda integración por partes del ejemplo 2.4, si se toma $u = \cos x$, $dv = x\,dx$, la integración por partes lleva a la nada interesante conclusión de que la integral original es igual a sí misma. (Hágalo como ejercicio).

A la vista del ejemplo 2.4, intente adivinar cuántas integraciones por partes sucesivas se necesitan para hallar $\int x^n \operatorname{sen} x\,dx$ para un entero $n > 0$. (Volveremos a este asunto en los ejercicios).

A veces, sucesivas integraciones por partes nos devuelven a la integral original. Eso puede significar una mala noticia (véase la nota 2.2) o un camino ingenioso para hallar la integral, como en el próximo ejemplo.

**Ejemplo 2.5** **Integración por partes iterada y un giro inesperado**

Hallar $\int e^{2x} \operatorname{sen} x\, dx$.

**Solución** Puede comprobar que tampoco en esta ocasión sirven los métodos elementales que conocemos. En consecuencia, nos queda la integración por partes. Hay dos elecciones viables para $u$ y $dv$. Tomamos

$$u = e^{2x} \qquad dv = \operatorname{sen} x\, dx$$
$$du = 2e^{2x}\, dx \qquad v = -\cos x$$

(La elección cambiando los papeles también funciona. Verifíquelo como ejercicio). Integrando por partes,

$$\int \underbrace{e^{2x}}_{u} \underbrace{\operatorname{sen} x\, dx}_{dv} = -e^{2x} \cos x + 2 \int e^{2x} \cos x\, dx.$$

La integral de la derecha exige otra integración por partes. Con

$$u = e^{2x} \qquad dv = \cos x\, dx$$
$$du = 2e^{2x}\, dx \qquad v = \operatorname{sen} x$$

se obtiene

$$\int e^{2x} \operatorname{sen} x\, dx = -e^{2x} \cos x + 2 \int \underbrace{e^{2x}}_{u} \underbrace{\cos x\, dx}_{dv}$$
$$= -e^{2x} \cos x + 2\left(e^{2x} \operatorname{sen} x - 2 \int e^{2x} \operatorname{sen} x\, dx\right)$$
$$= -e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \operatorname{sen} x - 4 \int e^{2x} \operatorname{sen} x\, dx. \qquad (2.3)$$

Mire atentamente la integral final. ¡Es la integral inicial! Si tratamos la integral $\int e^{2x} \operatorname{sen} x\, dx$ como una incógnita que deseamos calcular, podemos sumar $4 \int e^{2x} \operatorname{sen} x\, dx$ a ambos lados de la ecuación (2.3). Así, obtenemos

$$5 \int e^{2x} \operatorname{sen} x\, dx = -e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \operatorname{sen} x + K,$$

donde hemos añadido la constante de integración $K$ a la derecha. Dividiendo entre 5 queda

$$\int e^{2x} \operatorname{sen} x\, dx = -\frac{1}{5} e^{2x} \cos x + \frac{2}{5} e^{2x} \operatorname{sen} x + c,$$

donde hemos reemplazado la constante de integración arbitraria $\frac{K}{5}$ por $c$.

**Nota 2.3**

Para integrales como $\int e^{2x} \cos x\, dx$ (u otras del mismo tipo, como $\int e^{-3x} \operatorname{sen} x\, dx$), sucesivas integraciones por partes producirán una primitiva, como en el ejemplo 2.5. La primera elección de $u$ y $dv$ es libre (cualquir elección funciona), pero en la segunda integración por partes la elección de $u$ y $dv$ ha de ser consistente con la primera. Así, en el ejemplo 2.5, nuestra primera elección $u = e^{2x}$ nos obliga a tomar también $u = e^{2x}$. Para ver la razón, repita esa segunda integral con $u = \cos x$. ¡Verá lo que ocurre!

Para todo entero $n > 0$, la integral $\int x^n e^x\, dx$ requiere integración por partes. Ya no sorprende la elección

$$u = x^n \qquad dv = e^x\, dx$$
$$du = nx^{n-1}\, dx \qquad v = e^x$$

Aplicando integración por partes,

$$\int \underbrace{x^n}_{u} \underbrace{e^x\, dx}_{dv} = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x\, dx. \qquad (2.4)$$

Si $n - 1 > 0$, será necesaria otra integración por partes. De hecho, habrá que hacer un total de $n$ integraciones por partes para completar el proceso. Una alternativa es usar la **fórmula de reducción** (2.4) repetidas veces, como ilustra el próximo ejemplo.

### Ejemplo 2.6 Aplicación de una fórmula de reducción

Hallar la integral $\int x^4 e^x \, dx$.

**Solución** La perspectiva de tener que efectuar cuatro integraciones por partes le resultará poco atractiva, sin duda. No obstante, podemos usar repetidamente la fórmula de reducción (2.4) para hallar la integral con menos esfuerzo, como sigue. De (2.4), con $n = 4$, se deduce que

$$\int x^4 e^x \, dx = x^4 e^x - 4 \int x^{4-1} e^x \, dx = x^4 e^x - 4 \int x^3 e^x \, dx.$$

Aplicando ahora (2.4) con $n = 3$, se tiene

$$\int x^4 e^x \, dx = x^4 e^x - 4 \left( x^3 e^x - 3 \int x^2 e^x \, dx \right).$$

Ya se ve que podemos resolver la integral aplicando dos veces más la fórmula de reducción. Si se hace, se obtiene

$$\int x^4 e^x \, dx = x^4 e^x - 4x^3 e^x + 12x^2 e^x - 24x e^x + 24 e^x + c.$$

Dejamos los detalles del cálculo final al cuidado del lector.

Para evaluar una integral definida, se puede aplicar integración por partes a la correspondiente integral indefinida y evaluar la primitiva resultante entre los límites de integración. Sin embargo, siempre que sea posible (es decir, cuando la integral no sea demasiado complicada), es preferible aplicar la integración por partes directamente a la integral definida. El método de integración por partes para integrales definidas es simplemente

**Integración por partes en una integral definida**

$$\int_{x=a}^{x=b} u \, dv = uv \Big|_{x=a}^{x=b} - \int_{x=a}^{x=b} v \, du,$$

donde hemos indicado con claridad los límites de integración para dejar constancia de que se refieren a los valores de $x$. (Recuerde que la integración por partes se formuló tomando ambas, $u$ y $v$, como funciones de $x$).

### Ejemplo 2.7 Integración por partes en una integral definida

Calcular $\int_1^2 x^2 \ln x \, dx$.

**Solución** Una vez más, como los métodos más elementales no ayudan, intentamos integración por partes. Puesto que no sabemos cómo integrar $\ln x$ (salvo usando integración por partes), elegimos

$$u = \ln x \qquad dv = x^2 \, dx$$
$$du = \frac{1}{x} \, dx \qquad v = \frac{1}{3} x^3$$

y, por tanto,

$$\int_1^2 \underbrace{\ln x}_{u} \underbrace{x^2 \, dx}_{dv} = uv \Big|_1^2 - \int_1^2 v \, du = \frac{1}{3} x^3 \ln x \Big|_1^2 - \frac{1}{3} \int_1^2 x^3 \left( \frac{1}{x} \right) dx$$

$$= \frac{1}{3} (2^3 \ln 2 - 1^3 \ln 1) - \frac{1}{3} \int_1^2 x^2 \, dx$$

$$= \frac{8 \ln 2}{3} - 0 - \frac{1}{9} x^3 \Big|_1^2 = \frac{8 \ln 2}{3} - \frac{1}{9} (2^3 - 1^3)$$

$$= \frac{8 \ln 2}{3} - \frac{1}{9} (8 - 1) = \frac{8 \ln 2}{3} - \frac{7}{9}.$$

La integración por partes es la técnica más potente en nuestro arsenal de integración. Para dominarla es preciso resolver muchos problemas. En la colección de ejercicios que sigue tendrá oportunidad de adquirir práctica.

## EJERCICIOS 7.2

1. Describa la mejor estrategia para elegir qué partes del integrando se deben tomar como $u$ y como $dv$.

2. La integración por partes proviene de la regla del producto para la derivación. ¿Qué método de integración proviene de la regla de la cadena? Argumentar por qué no hay ninguna técnica de integración de uso común asociada a la regla del cociente.

**En los ejercicios 3-32, hallar las integrales.**

3. $\int x \cos x \, dx$
4. $\int x \operatorname{sen} 4x \, dx$
5. $\int xe^{2x} \, dx$
6. $\int x \ln x \, dx$
7. $\int x^2 \ln x \, dx$
8. $\int \frac{\ln x}{x} \, dx$
9. $\int x^2 e^{-3x} \, dx$
10. $\int x^2 e^{x^3} \, dx$
11. $\int x^2 \cos 2x \, dx$
12. $\int x^2 \operatorname{sen} 3x \, dx$
13. $\int e^x \operatorname{sen} 4x \, dx$
14. $\int e^{2x} \cos x \, dx$
15. $\int \cos x \cos 2x \, dx$
16. $\int \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x \, dx$
17. $\int x \sec^2 x \, dx$
18. $\int x^3 e^{x^2} \, dx$
19. $\int (\ln x)^2 \, dx$
20. $\int x^2 e^{3x} \, dx$
21. $\int \cos x \ln(\operatorname{sen} x) \, dx$
22. $\int x \operatorname{sen} x^2 \, dx$
23. $\int x \cosh 2x \, dx$
24. $\int 2x \operatorname{senh} 3x \, dx$
25. $\int_0^1 x \operatorname{sen} 2x \, dx$
26. $\int_0^{\pi} 2x \cos x \, dx$
27. $\int_0^1 x \cos \pi x \, dx$
28. $\int_0^1 xe^{3x} \, dx$
29. $\int_0^1 x \operatorname{sen} \pi x \, dx$
30. $\int_0^1 x \cos 2\pi x \, dx$
31. $\int_1^{10} \ln x \, dx$
32. $\int_1^2 x \ln x \, dx$

**En los ejercicios 33-36, aplicar integración por partes para resolver la integral (como se aconseja en el texto, «intente algo»).**

33. $\int \cos^{-1} x \, dx$
34. $\int \tan^{-1} x \, dx$
35. $\int \operatorname{sen} \sqrt{x} \, dx$
36. $\int e^{\sqrt{x}} \, dx$

37. ¿Cuántas veces hay que integrar por partes para hallar $\int x^n \operatorname{sen} x \, dx$ (donde $n$ es un entero positivo)?

38. ¿Cuántas veces hay que integrar por partes para hallar $\int x^n \ln x \, dx$ (donde $n$ es un entero positivo)?

39. Las **fórmulas de reducción** se utilizan para automatizar el proceso de efectuar sucesivas integraciones por partes. Demostrar que para todo entero $n > 0$,

$$\int \cos^n x \, dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx.$$

(Usar integración por partes con $u = \cos^{n-1} x$ y $dv = \cos x \, dx$).

40. Demostrar, integrando por partes, que para todo entero $n > 0$,

$$\int \operatorname{sen}^n x \, dx = -\frac{1}{n} \operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sen}^{n-2} x \, dx.$$

**En los ejercicios 41-48, hallar la integral aplicando alguna fórmula de reducción de los ejercicios 39 y 40 y (2.4).**

41. $\int x^3 e^x \, dx$
42. $\int \cos^5 x \, dx$
43. $\int \cos^3 x \, dx$
44. $\int \operatorname{sen}^4 x \, dx$
45. $\int_0^1 x^4 e^x \, dx$
46. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^4 x \, dx$
47. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^5 x \, dx$
48. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^6 x \, dx$

49. A la vista de los ejercicios 46-48, conjeturar una fórmula para $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^m x \, dx$. (Nota: Es necesario distinguir entre $m$ par y $m$ impar).

50. Conjeturar una fórmula para $\int_0^{\pi/2} \cos^m x \, dx$.

51. La excelente película *Stand and Deliver* narra la historia de un profesor de matemáticas, Jaime Escalante, que desarrolla un programa de Cálculo en Los Ángeles. En una escena, Escalante enseña a un alumno cómo hallar la integral $\int x^2 \operatorname{sen} x \, dx$. Elabora una tabla como ésta:

| | sen $x$ | |
|---|---|---|
| $x^2$ | $-\cos x$ | + |
| $2x$ | $-\operatorname{sen} x$ | − |
| 2 | $\cos x$ | + |

Multiplicando los términos de cada fila se obtiene la primitiva $-x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2 \cos x + c$. Explicar de dónde procede cada columna y por qué ese método resuelve este problema.

**En los ejercicios 52-57, aplicar el método del ejercicio 51.**

52. $\int x^4 \operatorname{sen} x\, dx$
53. $\int x^4 \cos x\, dx$
54. $\int x^4 e^x\, dx$
55. $\int x^4 e^{2x}\, dx$
56. $\int x^5 \cos 2x\, dx$
57. $\int x^3 e^{-3x}\, dx$

58. Queremos dejar claro que el método del ejercicio 51 no funciona siempre, especialmente si ambas columnas, la de la derivada y la de la primitiva, tienen potencias de $x$. Probar que el método falla para $\int x^2 \ln x\, dx$.

59. Demostrar que $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx)\, dx = 0$ para enteros positivos $m \neq n$.

60. Demostrar que $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(mx) \operatorname{sen}(nx)\, dx = 0$ para enteros positivos $m \neq n$.

61. Probar que $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx)\, dx = 0$ para todo par de enteros positivos $m$ y $n$.

62. Probar que $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 nx\, dx = \pi$ para todo entero positivo $n$.

63. La integración por partes permite calcular los coeficientes de las **series de Fourier** (que se estudian en el Capítulo 8). Aquí vamos a descubrir en qué consiste parte del trabajo.

Empezamos calculando $a_n = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen} nx\, dx$ para un entero positivo $n$ arbitrario. Escribir los valores de $a_1$, $a_2$, $a_3$ y $a_4$ y formar la función

$$f(x) = a_1 \operatorname{sen} x + a_2 \operatorname{sen} 2x + a_3 \operatorname{sen} 3x + a_4 \operatorname{sen} 4x.$$

Comparar la gráfica de $y = x$ con la de $y = f(x)$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$. Al escribir $a_1, \ldots, a_4$ habrá apreciado una pauta clara. Úsela para formar la función

$$g(x) = f(x) + a_5 \operatorname{sen} 5x + a_6 \operatorname{sen} 6x + a_7 \operatorname{sen} 7x + a_8 \operatorname{sen} 8x.$$

Comparar las gráficas de $y = x$ e $y = g(x)$ en $[-\pi, \pi]$. ¿No es sorprendente que sumando funciones seno se obtenga una recta? Resulta que las series de Fourier se pueden utilizar para aproximar mediante senos y cosenos casi cualquier función continua en un intervalo cerrado.

64. Aparte de permitir hallar primitivas, la integración por partes es muy importante desde el punto de vista teórico, donde puede verse como un método para trasvasar derivadas de una función a otra. Para explicar lo que queremos decir, suponga que $f(x)$ y $g(x)$ son funciones con $f(0) = g(0) = 0$, $f(1) = g(1) = 0$ y con segundas derivadas continuas $f''(x)$ y $g''(x)$. Use dos veces integración por partes para demostrar que

$$\int_0^1 f''(x)g(x)\, dx = \int_0^1 f(x)g''(x)\, dx.$$

## 7.3 TÉCNICAS TRIGONOMÉTRICAS DE INTEGRACIÓN

### Integrales con potencias de funciones trigonométricas

Los integrandos con potencias de funciones trigonométricas suelen requerir alguna sustitución astuta. Y aparecen con tanta frecuencia que las analizamos en grupo.

Nuestro objetivo es hallar integrales del tipo

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx,$$

donde $m$ y $n$ son enteros positivos.

#### Caso 1: $m$ o $n$ impar (ambos positivos)

Si $m$ es impar, aislamos primero un factor sen $x$ (lo necesitaremos para $du$). A continuación, cambiamos cada factor $\operatorname{sen}^2 x$ por $1 - \cos^2 x$ y hacemos la sustitución $u = \cos x$.

Análogamente, si $n$ es impar, aislamos primero un factor cos $x$ (lo necesitaremos para $du$). A continuación, cambiamos cada factor $\cos^2 x$ por $1 - \operatorname{sen}^2 x$ y hacemos $u = \operatorname{sen} x$.

Ilustramos este procedimiento para $m$ impar en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 3.1** **Una sustitución típica**

Hallar $\int \cos^4 x \operatorname{sen} x\, dx$.

**Solución** No hay nada especialmente nuevo o sutil en esta integral. Como no sabemos resolverla tal como está, buscamos una sustitución adecuada. (Ayuda: Mirar las partes que son derivadas de otras). Se ve pronto que conviene hacer $u = \cos x$, $du = -\operatorname{sen} x\, dx$. Así, se obtiene

$$\int \cos^4 x \operatorname{sen} x\, dx = -\int \underbrace{\cos^4 x}_{u^4}\ \underbrace{(-\operatorname{sen} x)\, dx}_{du} = -\int u^4\, du$$

$$= -\frac{u^5}{5} + c = \frac{\cos^5 x}{5} + c. \qquad u = \cos x.$$

**Ejemplo 3.2** **Un integrando con potencia impar del seno**

Hallar $\int \cos^4 x \operatorname{sen}^3 x\, dx$.

**Solución** Ya que buscamos cosas que sean derivadas de otras, debemos fijarnos en los términos seno y coseno. Pero ¿cuál tomamos para la sustitución? Con $u = \cos x$, $du = -\operatorname{sen} x\, dx$ se puede reescribir la integral como

$$\int \cos^4 x \operatorname{sen}^3 x\, dx = \int \cos^4 x\ \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} x\, dx = -\int \cos^4 x\ \operatorname{sen}^2 x\, (-\operatorname{sen} x)\, dx$$

$$= -\int \underbrace{\cos^4 x(1 - \cos^2 x)}_{u^4(1-u^2)} \underbrace{(-\operatorname{sen} x)\, dx}_{du} = -\int u^4(1 - u^2)\, du$$

$$= -\int (u^4 - u^6)\, du = -\left(\frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7}\right) + c$$

$$= -\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7} + c. \qquad u = \cos x.$$

Preste atención a lo que hemos hecho. Hemos tomado la potencia impar ($\operatorname{sen}^3 x$ en este caso) y hemos sacado un factor $\operatorname{sen} x$ (para usarlo en $du$). La potencia restante (par) de $\operatorname{sen} x$ la reescribimos en términos de $\cos x$ mediante la identidad de Pitágoras

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1.$$

La idea del ejemplo 3.2 es aplicable a cualquier integral de ese tipo.

**Ejemplo 3.3** **Un integrando con potencia impar del coseno**

Hallar $\int \sqrt{\operatorname{sen} x} \cos^5 x\, dx$.

**Solución** Podemos reescribirla como

$$\int \sqrt{\operatorname{sen} x} \cos^5 x\, dx = \int \sqrt{\operatorname{sen} x} \cos^4 x \cos x\, dx = \int \sqrt{\operatorname{sen} x}(1 - \operatorname{sen}^2 x)^2 \cos x\, dx.$$

Haciendo $u = \operatorname{sen} x$, $du = \cos x\, dx$, se obtiene

$$\int \sqrt{\operatorname{sen} x} \cos^5 x\, dx = \int \underbrace{\sqrt{\operatorname{sen} x}(1 - \operatorname{sen}^2 x)^2}_{\sqrt{u}(1-u^2)^2} \underbrace{\cos x\, dx}_{du}.$$

$$= \int \sqrt{u}(1 - u^2)^2\, du = \int u^{1/2}(1 - 2u^2 + u^4)\, du$$

$$= \int (u^{1/2} - 2u^{5/2} + u^{9/2})\, du$$

$$= \frac{2}{3} u^{3/2} - 2\left(\frac{2}{7}\right) u^{7/2} + \frac{2}{11} u^{11/2} + c$$

$$= \frac{2}{3} \operatorname{sen}^{3/2} x - \frac{4}{7} \operatorname{sen}^{7/2} + \frac{2}{11} \operatorname{sen}^{11/2} x + c. \quad u = \operatorname{sen} x.$$

Aunque aquí los detalles del cálculo son aburridos, fíjese en lo esencial: todos los integrandos de esta forma se calculan de manera análoga.

**Notas**

Fórmulas del ángulo mitad:

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

### Caso 2: $m$ y $n$ pares (ambos positivos)

En este caso usaremos las fórmulas del ángulo mitad (véase al margen) para reducir las potencias en el integrando, como ilustra el próximo ejemplo.

**Ejemplo 3.4** **Un integrando con potencia par del seno**

Hallar $\int \operatorname{sen}^2 x\, dx$.

**Solución** Haciendo uso de las fórmulas del ángulo mitad, podemos reescribir

$$\int \operatorname{sen}^2 x\, dx = \frac{1}{2}\int (1 - \cos 2x)\, dx.$$

La integral de la derecha se resuelve mediante la sustitución $u = 2x$, $du = 2\, dx$. Se tiene

$$\int \operatorname{sen}^2 x\, dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\int \underbrace{(1 - \cos 2x)}_{1-\cos u}\underbrace{2\, dx}_{du} = \frac{1}{4}\int (1 - \cos u)\, du$$

$$= \frac{1}{4}(u - \operatorname{sen} u) + c = \frac{1}{4}(2x - \operatorname{sen} 2x) + c. \qquad u = 2x.$$

En algunas integrales hay que aplicar las fórmulas del ángulo mitad más de una vez, como en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 3.5** **Un integrando con potencia par del coseno**

Hallar $\int \cos^4 x\, dx$.

**Solución** Por la fórmula del ángulo mitad para el coseno, se tiene

$$\int \cos^4 x\, dx = \int (\cos^2 x)^2\, dx = \frac{1}{4}\int (1 + \cos 2x)^2\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x)\, dx.$$

Usando de nuevo esa fórmula del ángulo mitad en el último término de la integral, obtenemos

$$\int \cos^4 x\, dx = \frac{1}{4}\int \left[1 + 2\cos 2x + \frac{1}{2}(1 + \cos 4x)\right] dx$$

$$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{32}\operatorname{sen} 4x + c.$$

Dejamos como ejercicio (fácil) deducir esta última expresión.

Nuestro próximo objetivo es diseñar una estrategia para las integrales del tipo

$$\int \tan^m x \sec^n x\, dx,$$

con $m$ y $n$ enteros.

### Caso 1: $m$ impar positivo

En primer lugar, aislamos un factor $\sec x \tan x$ (lo necesitaremos para $du$). A continuación, cambiamos cada $\tan^2 x$ restante por $\sec^2 x - 1$ y hacemos la sustitución $u = \sec x$.

El ejemplo que sigue ilustra el proceso.

**Ejemplo 3.6** **Un integrando con potencia impar de la tangente**

Hallar $\int \tan^3 x \sec^3 x\, dx$.

**Solución** Buscando partes que sean derivadas de otras, reescribimos la integral como

$$\int \tan^3 x \sec^3 x\, dx = \int \tan^2 x \sec^2 x\, (\sec x \tan x)\, dx$$
$$= \int (\sec^2 x - 1) \sec^2 x\, (\sec x \tan x)\, dx,$$

donde hemos usado la identidad de Pitágoras

$$\tan^2 x = \sec^2 x - 1.$$

Ahora ya se adivina la sustitución. Hacemos $u = \sec x$, con lo que $du = \sec x \tan x\, dx$, y se tiene

$$\int \tan^3 x \sec^3 x\, dx = \int \underbrace{(\sec^2 x - 1) \sec^2 x}_{(u^2-1)u^2} \underbrace{(\sec x \tan x)\, dx}_{du}$$
$$= \int (u^2 - 1)u^2\, du = \int (u^4 - u^2)\, du$$
$$= \frac{1}{5}u^5 - \frac{1}{3}u^3 + c = \frac{1}{5}\sec^5 x - \frac{1}{3}\sec^3 x + c. \qquad u = \sec x.$$

### Caso 2: $n$ par positivo

En primer lugar, aislamos un factor $\sec^2 x$ (lo necesitaremos para $du$). A continuación, cambiamos cada factor $\sec^2 x$ restante por $1 + \tan^2 x$ y hacemos la sustitución $u = \tan x$.

Ilustramos el procedimiento en el próximo ejemplo.

**Ejemplo 3.7** **Un integrando con potencia par de la secante**

Hallar $\int \tan^2 x \sec^4 x\, dx$.

**Solución** Puesto que $\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$, reescribimos la integral como

$$\int \tan^2 x \sec^4 x\, dx = \int \tan^2 x \sec^2 x \sec^2 x\, dx = \int \tan^2 x(1 + \tan^2 x) \sec^2 x\, dx.$$

Ahora hacemos $u = \tan x$, con lo cual $du = \sec^2 x\, dx$ y

$$\int \tan^2 x \sec^4 x\, dx = \int \underbrace{\tan^2 x(1 + \tan^2 x)}_{u^2(1+u^2)} \underbrace{\sec^2 x\, dx}_{du}$$
$$= \int u^2(1 + u^2)\, du = \int (u^2 + u^4)\, du$$
$$= \frac{1}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 + c$$
$$= \frac{1}{3}\tan^3 x + \frac{1}{5}\tan^5 x + c. \qquad u = \tan x.$$

### Caso 3: $m$ par positivo y $n$ impar positivo

Cambiamos cada factor $\tan^2 x$ por $\sec^2 x - 1$ y utilizamos una **fórmula de reducción** especial (dada en los ejercicios) para resolver integrales de la forma $\int \sec^n x\, dx$. Este caso complicado será tratado con brevedad en los ejercicios. En buena parte dependemos del siguiente ejemplo.

### Ejemplo 3.8 Una integral inusual

Hallar la integral $\int \sec x\, dx$.

**Solución** A poco que piense sobre esta integral, llegará a la conclusión de que no sabe qué hacer con ella. El hallazgo de una primitiva depende de una observación poco habitual. Multiplicando el integrando por la fracción $\dfrac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}$ (que es igual a 1), obtenemos

$$\int \sec x\, dx = \int \sec x \left( \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} \right) dx$$

$$= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x}\, dx.$$

Ahora vemos que el numerador es exactamente la derivada del denominador. En efecto,

$$\frac{d}{dx}(\sec x + \tan x) = \sec x \tan x + \sec^2 x,$$

así que tomando $u = \sec x + \tan x$ se obtiene finalmente

$$\int \sec x\, dx = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x}\, dx$$

$$= \int \frac{1}{u}\, du = \ln |u| + c$$

$$= \ln |\sec x + \tan x| + c. \qquad u = \sec x + \tan x.$$

## Sustituciones trigonométricas

Si un integrando contiene un término de las formas $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$ o $\sqrt{x^2 - a^2}$, para algún $a > 0$, suele resolverse la integral mediante una sustitución que involucra alguna función trigonométrica (de ahí el nombre de *sustituciones trigonométricas*).

En primer lugar, supongamos que el integrando contiene un término $\sqrt{a^2 - x^2}$, para algún $a > 0$. Haciendo $x = a \operatorname{sen} \theta$, donde $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, eliminamos la raíz cuadrada así:

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - (a \operatorname{sen} \theta)^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 \theta}$$

$$= a\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \theta} = a\sqrt{\cos^2 \theta} = a \cos \theta,$$

ya que $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, $\cos \theta \ge 0$. El siguiente ejemplo es típico de esta clase de sustituciones.

### Ejemplo 3.9 Un integrando que contiene $\sqrt{a^2 - x^2}$

Hallar $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{4 - x^2}}\, dx$.

**Solución** Siempre hay que empezar investigando si una integral se puede hallar directamente, bien sea por una sustitución simple o por partes. Dado que ninguno de estos métodos sirve aquí, consideramos una sustitución trigonométrica. No hay que perder de vista el objetivo: eliminar la raíz cuadrada. Pues bien, para conseguirlo hacemos la sustitución

$$x = 2 \operatorname{sen} \theta, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

(¿Por qué no necesitamos desigualdades **estrictas** aquí?). Por tanto,

$$dx = 2 \cos \theta\, d\theta$$

y, en consecuencia,

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}\,dx = \int \frac{2\cos\theta}{(2\operatorname{sen}\theta)^2\sqrt{4-(2\operatorname{sen}\theta)^2}}\,d\theta$$

$$= \int \frac{2\cos\theta}{4\operatorname{sen}^2\theta\sqrt{4-4\operatorname{sen}^2\theta}}\,d\theta$$

$$= \int \frac{\cos\theta}{(2\operatorname{sen}^2\theta)\,2\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}}\,d\theta$$

$$= \int \frac{\cos\theta}{4\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta}\,d\theta \qquad 1-\operatorname{sen}^2\theta = \cos^2\theta$$

$$= \frac{1}{4}\int \operatorname{cosec}^2\theta\,d\theta = -\frac{1}{4}\cot\theta + c. \qquad \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta} = \operatorname{cosec}^2\theta$$

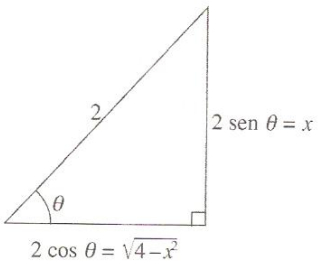


**Figura 7.1**

Lo único que queda por hacer es expresar la primitiva, que está escrita en la variable $\theta$, en la variable $x$ original. Para ello, es conveniente recurrir a un diagrama como el de la figura 7.1. Como la sustitución era $x = 2\operatorname{sen}\theta$, $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{x}{2} = \dfrac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}}$, ponemos un 2 sobre la hipotenusa. El lado opuesto al ángulo $\theta$ es entonces $2\operatorname{sen}\theta$. Por el teorema de Pitágoras, el lado adyacente es $\sqrt{4-x^2}$, como está indicado. Así, pues,

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}.$$

Y finalmente,

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}\,dx = -\frac{1}{4}\cot\theta + c = -\frac{1}{4}\,\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} + c.$$

---

Supongamos ahora que el integrando contiene un término $\sqrt{a^2+x^2}$, para algún $a > 0$. Haciendo $x = a\tan\theta$, donde $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, eliminamos la raíz cuadrada así:

$$\sqrt{a^2+x^2} = \sqrt{a^2+(a\tan\theta)^2} = \sqrt{a^2+a^2\tan^2\theta}$$

$$= a\sqrt{1+\tan^2\theta} = a\sqrt{\sec^2\theta} = a\sec\theta,$$

ya que para $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, $\sec\theta \geq 0$. El próximo ejemplo es una aplicación típica de esta sustitución.

### Ejemplo 3.10 Un integrando que contiene $\sqrt{a^2+x^2}$

Hallar la integral $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{9+x^2}}\,dx$.

**Solución** Debido a la raíz cuadrada, es fácil convencerse de que no podemos resolver la integral directamente. Para eliminar la raíz hacemos $x = 3\tan\theta$, con $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. Así, pues, $dx = 3\sec^2\theta\,d\theta$, y por tanto,

$$\int \frac{1}{\sqrt{9+x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{9+(3\tan\theta)^2}}\,3\sec^2\theta\,d\theta$$

$$= \int \frac{3\sec^2\theta}{\sqrt{9+9\tan^2\theta}}\,d\theta$$

$$= \int \frac{3 \sec^2 \theta}{3\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}}\, d\theta$$

$$= \int \frac{\sec^2 \theta}{\sec \theta}\, d\theta \qquad 1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$$

$$= \int \sec \theta \, d\theta$$

$$= \ln |\sec \theta + \tan \theta| + c,$$

por el ejemplo 3.8. Aún no hemos terminado. Falta expresar la integral en términos de la variable original $x$. Como $x = 3 \tan \theta$, es $\tan \theta = \frac{x}{3}$. Sólo queda despejar de ahí $\sec \theta$. Se puede hacer con ayuda de un triángulo, como en el ejemplo 3.9, pero aquí es más sencillo darse cuenta de que, para $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$,

$$\sec \theta = \sqrt{1 + \tan^2 \theta} = \sqrt{1 + \left(\frac{x}{3}\right)^2}.$$

De donde se deduce

$$\int \frac{1}{\sqrt{9 + x^2}}\, dx = \ln |\sec \theta + \tan \theta| + c$$

$$= \ln \left| \sqrt{1 + \left(\frac{x}{3}\right)^2} + \frac{x}{3} \right| + c.$$

---

Finalmente, supongamos que el integrando contiene un término $\sqrt{x^2 - a^2}$, para algún $a > 0$. Haciendo $x = a \sec \theta$, donde $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, eliminamos la raíz como sigue:

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{(a \sec \theta)^2 - a^2} = \sqrt{a^2 \sec^2 \theta - a^2}$$

$$= a\sqrt{\sec^2 \theta - 1} = a\sqrt{\tan^2 \theta} = a\,|\tan \theta|.$$

Es necesario el valor absoluto porque $\tan \theta$ puede ser positiva o negativa en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. El siguiente ejemplo ilustra un caso típico de aplicación de esta sustitución.

### Ejemplo 3.11 Un integrando que contiene $\sqrt{x^2 - a^2}$

Hallar la integral $\int \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x}\, dx$, para $x > 5$.

**Solución** Hacemos la sustitución $x = 5 \sec \theta$, con $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. Hemos tomado la primera mitad del dominio $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ con el fin de que $x = 5 \sec \theta > 5$. (Si fuera $x < -5$, tendríamos que haber tomado $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$). Por tanto, $dx = 5 \sec \theta \tan \theta \, d\theta$ y la integral es

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x}\, dx = \int \frac{\sqrt{(5 \sec \theta)^2 - 25}}{5 \sec \theta} (5 \sec \theta \tan \theta)\, d\theta$$

$$= \int \sqrt{25 \sec^2 \theta - 25} \tan \theta \, d\theta$$

$$= \int \sqrt{5 \sec^2 \theta - 1} \tan \theta \, d\theta$$

$$= 5 \int \tan^2 \theta \, d\theta \qquad \sec^2 \theta - 1 = \tan^2 \theta$$

$$= 5 \int (\sec^2 \theta - 1)\, d\theta$$

$$= 5(\tan \theta - \theta) + c.$$

Finalmente, observemos que, como $x = 5 \sec\theta$ para $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, se tiene

$$\tan\theta = \sqrt{\sec^2\theta - 1} = \sqrt{\left(\frac{x}{5}\right)^2 - 1} = \frac{1}{5}\sqrt{x^2 - 25}$$

y $\theta = \sec^{-1}\left(\frac{x}{5}\right)$. Por tanto,

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x}\,dx = 5(\tan\theta - \theta) + c$$

$$= \sqrt{x^2 - 25} - 5\sec^{-1}\left(\frac{x}{5}\right) + c.$$

En los ejercicios encontrará unas cuantas integrales más que requieren sustituciones trigonométricas. La idea es siempre la misma: eliminar una raíz cuadrada. Resumimos en la tabla que sigue las sustituciones trigonométricas estudiadas en esta sección.

| Expresión | Sustitución trigonométrica | Intervalo | Identidad |
|---|---|---|---|
| $\sqrt{a^2 - x^2}$ | $x = a\,\text{sen}\,\theta$ | $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ | $1 - \text{sen}^2\theta = \cos^2\theta$ |
| $\sqrt{a^2 + x^2}$ | $x = a\tan\theta$ | $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ | $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ |
| $\sqrt{x^2 - a^2}$ | $x = a\sec\theta$ | $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ | $\sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta$ |

## EJERCICIOS 7.3

1. Imagine que un compañero sostiene que en esta sección hay demasiadas fórmulas para memorizar (los autores estarían de acuerdo, por cierto). Ayúdele dejando claro que cada regla indica cuándo cierta sustitución resuelve el problema. Una sustitución $u(x)$ funciona si $u'(x)$ aparece en el integrando y, además, la integral resultante es fácil de integrar. En cada una de las reglas de esta sección, identificar $u'(x)$ y explicar por qué $n$ debe ser impar (o lo que diga cada regla) para que el integrando que resulte sea manejable. Sin memorizar las reglas, puede recordar unas pocas sustituciones y ver cuál es adecuada en un problema dado.

2. En el texto hemos sugerido que cuando el integrando contiene $\sqrt{4 - x^2}$ hay que hacer la sustitución trigonométrica $x = 2\,\text{sen}\,\theta$. Es hora de reconocer que esto no siempre funciona. ¿Cómo se puede decidir si funciona o no?

**En los ejercicios 3-40, calcular las integrales.**

3. $\int \cos x\,\text{sen}^4 x\,dx$
4. $\int \cos^3 x\,\text{sen}^4 x\,dx$
5. $\int_0^{\pi/4} \cos x\,\text{sen}^3 x\,dx$
6. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \cos^3 x\,\text{sen}^3 x\,dx$
7. $\int \cos^2 x\,\text{sen}\,x\,dx$
8. $\int \cos x\,\text{sen}^2 x\,dx$
9. $\int_0^{\pi/2} \cos x\,\text{sen}\,x\,dx$
10. $\int_{-\pi/2}^{0} \cos^3 x\,\text{sen}\,x\,dx$
11. $\int \cos^2 x\,dx$
12. $\int \text{sen}^4 x\,dx$
13. $\int \tan x\sec^3 x\,dx$
14. $\int \tan^3 x\sec x\,dx$
15. $\int_0^{\pi/4} \tan^4 x\sec^4 x\,dx$
16. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan^4 x\sec^2 x\,dx$
17. $\int \cos^2 x\,\text{sen}^2 x\,dx$
18. $\int (\cos^2 x + \text{sen}^2 x)\,dx$
19. $\int \cot^3 x\csc^3 x\,dx$
20. $\int \cot x\,\text{cosec}^4 x\,dx$
21. $\int_{-\pi/3}^{0} \sqrt{\cos x}\,\text{sen}^3 x\,dx$
22. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos x/\sqrt{\text{sen}\,x}\,dx$
23. $\int \cot^2 x\,\text{cosec}^4 x\,dx$
24. $\int \cot^4 x\,\text{cosec}^4 x\,dx$
25. $\int \frac{\text{sen}\,x}{\tan x}\,dx$
26. $\int \frac{\sec 2x}{\text{cosec}\,2x}\,dx$
27. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{9 - x^2}}\,dx$
28. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{16 - x^2}}\,dx$
29. $\int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\,dx$
30. $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}\,dx$
31. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 9}}\,dx$
32. $\int x^3\sqrt{x^2 - 1}\,dx$
33. $\int \frac{2}{\sqrt{x^2 - 4}}\,dx$
34. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}\,dx$

35. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}\,dx$

36. $\int x^3\sqrt{x^2+8}\,dx$

37. $\int \sqrt{x^2+16}\,dx$

38. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$

39. $\int_0^1 x\sqrt{x^2+8}\,dx$

40. $\int_0^2 x^2\sqrt{x^2+9}\,dx$

**En los ejercicios 41 y 42, hallar la integral usando las dos sustituciones $u = \tan x$ y $u = \sec x$. Comparar los resultados.**

41. $\int \tan x \sec^4 x\,dx$

42. $\int \tan^3 x \sec^4 x\,dx$

43. Probar, para todo entero $n > 1$, la fórmula de reducción

$$\int \sec^n x\,dx \frac{1}{n-1} \sec^{n-2} x \tan x + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x\,dx.$$

44. Hallar (a) $\int \sec^3 x\,dx$, (b) $\int \sec^4 x\,dx$ y (c) $\int \sec^5 x\,dx$. [Ayuda: Usar el resultado del ejercicio 43].

45. En un circuito de corriente alterna, la intensidad de corriente viene dada por $i(t) = I\cos(\omega t)$, con $I$ y $\omega$ constantes, y la potencia por $Ri^2$, con $R$ una constante. Calcular el valor medio de la potencia integrando en el intervalo $[0, 2\pi/\omega]$.

46. El área interior a la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ viene dada por $\frac{4b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$. Calcular esta integral.

47. Hallar, con un PCS, las primitivas de los ejemplos 3.2, 3.3, 3.5, 3.6 y 3.7. A la vista de los resultados, especular si el PCS utiliza las mismas técnicas que nosotros. En los casos en que el PCS proporcione una primitiva distinta de la nuestra, comentar cuál de las dos es más simple.

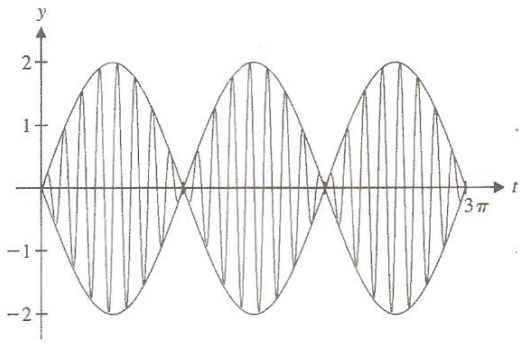
48. Repetir el ejercicio 47 con los ejemplos 3.9, 3.10 y 3.11.

49. Un PCS da $-\frac{1}{7}\operatorname{sen}^2 x \cos^5 x - \frac{2}{35}\cos^5 x$ como primitiva para el ejemplo 3.2 Determinar un valor de $c$ para el cual eso coincide con nuestra primitiva de $-\frac{1}{5}\cos^5 x + \frac{1}{7}\cos^7 x + c$.

50. Un PCS da $-\frac{2}{15}\tan x - \frac{1}{15}\sec^2 x \tan x + \frac{1}{5}\sec^4 x \tan x$ como primitiva para el ejemplo 3.7 Determinar un valor de $c$ para el cual eso coincide con nuestra primitiva $\frac{1}{3}\tan^3 x + \frac{1}{5}\tan^5 x + c$.

51. En la sección 7.2 se pedía demostrar que, para enteros positivos $m$ y $n$ con $m \neq n$, cada una de estas integrales es 0, $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\,dx = 0$, $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\,dx = 0$. Además, $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 nx\,dx = \pi$. Finalmente, $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \operatorname{sen} nx\,dx = 0$ para todo par de enteros positivos $m$ y $n$. Usaremos estas fórmulas para explicar cómo se sintoniza una emisora de onda media (AM).

La emisora de AM (amplitud modulada) envía una señal, música digamos, que modula la frecuencia portadora. Por ejemplo, si la señal es 2 sen $t$ y la frecuencia portadora es 16, la radio envía la señal modulada 2 sen $t$ sen $16t$. La figura muestra las gráficas de $y = 2$ sen $t$, $y = -2$ sen $t$ e $y = 2$ sen $t$ sen 16.




La gráfica de $y = 2$ sen $t$ sen $16t$ oscila igual de rápido que la onda portadora sen $16t$, pero su amplitud varía entre 2 sen $t$ y $-2$ sen $t$ (de ahí el nombre de modulación de amplitud). La radio debe sintonizar en la frecuencia 16 y recuperar la señal 2 sen $t$. La dificultad está en que otras emisoras están radiando al mismo tiempo. El receptor de radio recibe todas las señales juntas. Para entender cómo funciona, supongamos que una segunda emisora transmite la señal 3 sen $t$ con frecuencia 32. La señal combinada que llega al receptor es 2 sen $t$ sen $16t$ + 3 sen $t$ sen $32t$. Descompondremos esta señal. Como primer paso, la reescribimos usando la identidad

$$\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \frac{1}{2}\cos(B-A) - \frac{1}{2}\cos(B+A).$$

Con eso, la señal es

$$f(t) = \cos 15t - \cos 17t + \frac{3}{2}\cos 31t - \frac{3}{2}\cos 33t.$$

Si el receptor «sabe» que la señal tiene la forma $c$ sen $t$, puede determinar la constante $c$ calculando la integral $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos 15t\,dt$ y multiplicando por $2/\pi$. Probar que $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos 15t\,dt = \pi$, de manera que la constante correcta es $c = \pi(2/\pi) = 2$. La señal es, pues, 2 sen $t$. Para reconstruir la señal enviada por la segunda emisora, calcular $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos 31t\,dt$ y multiplicar por $2/\pi$. Demostrar que se recupera la señal 3 sen $t$.

## 7.4 INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES POR DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES SIMPLES

Vamos a presentar un método para reescribir de manera adecuada ciertas funciones racionales. Aunque no es directamente una técnica de integración, veremos que resulta de suma utilidad en la integración y en otras aplicaciones. Empezamos con una sencilla observación. Nótese que

$$\frac{3}{x+2} - \frac{2}{x-5} = \frac{3(x-5)-2(x+2)}{(x+2)(x-5)} = \frac{x-19}{x^2-3x-10}. \tag{4.1.}$$

Supongamos que queremos integrar esa función de la derecha. Es evidente que será más fácil integrar la función equivalente de la izquierda. Por (4.1) se tiene

$$\int \frac{x-19}{x^2-3x-10}\,dx = \int \left(\frac{3}{x+2} - \frac{2}{x-5}\right) dx = 3\ln|x+2| - 2\ln|x-5| + c.$$

El segundo integrando,

$$\frac{3}{x+2} - \frac{2}{x-5}$$

se llama una **descomposición en fracciones simples** del primero. Tal vez se pregunte si esto ha sido un golpe de fortuna o si, por el contrario, se puede lograr una tal descomposición en general. Pues bien, resulta que **toda** función racional (cociente de dos polinomios) se puede descomponer en suma de fracciones simples. En esta sección veremos cómo se hace. La ecuación (4.1) es un caso particular de descomposición en fracciones simples. Más en general, si los tres factores $a_1x + b_1$, $a_2x + b_2$ y $a_3x + b_3$ son distintos (en el sentido de que ninguno es múltiplo constante de otro), podemos escribir

$$\boxed{\frac{a_1x+b_1}{(a_2x+b_2)(a_3x+b_3)} = \frac{A}{a_2x+b_2} + \frac{B}{a_3x+b_3},}$$

con valores adecuados de las constantes $A$ y $B$, que han de ser determinados. Nótese que si se desea integrar esa función, las fracciones de la derecha son mucho más fáciles de integrar, igual que ocurría en nuestro ejemplo introductorio.

### Ejemplo 4.1 Fracciones simples: factores lineales distintos

Hallar $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+x-2}\,dx$.

**Solución** Repase los métodos que conoce y compruebe, uno a uno, que no resuelven esta integral tal como ha sido propuesta. Pero podemos descomponerla en fracciones simples:

$$\frac{1}{x^2+x-2} = \frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)}.$$

Los denominadores de las fracciones inicial y final son iguales. Por tanto, los numeradores deben ser iguales. Así, pues,

$$1 = A(x+2) + B(x-1). \tag{4.2}$$

Queremos calcular de ahí $A$ y $B$. La clave es que esa ecuación ha de ser cierta para todo $x$, en particular para $x = 1$ y $x = 2$. [Citamos estos dos valores porque anulan uno de los términos de (4.2) y hacen más fácil despejar $A$ y $B$]. Así, para $x = 1$, (4.2) dice que

$$1 = A(1+2) + B(1-1) = 3A,$$

de donde $A = \frac{1}{3}$. Del mismo modo, tomando $x = 2$, se tiene

$$1 = A(-2 + 2) + B(-2 - 1) = -3B,$$

luego $B = -\frac{1}{3}$. En consecuencia,

$$\int \frac{1}{x^2 + x - 2}\, dx = \int \left[ \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+2}\right)\right] dx$$

$$= \frac{1}{3} \ln|x - 1| - \frac{1}{3} \ln|x + 2| + c.$$

El mismo procedimiento es aplicable a cualquier función racional cuyo denominador factorice en $n$ factores lineales distintos. En efecto, si grado de $P(x) < n$ y los factores $(a_i x + b_i)$, para $i = 1, 2, \ldots, n$, son todos distintos, podemos escribir

**Fracciones simples: factores lineales distintos**

$$\frac{P(x)}{(a_1x + b_1)(a_2x + b_2) \cdots (a_nx + b_n)} = \frac{c_1}{a_1x + b_1} + \frac{c_2}{a_2x + b_2} + \cdots + \frac{c_n}{a_nx + b_n},$$

con ciertas constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

### Ejemplo 4.2 Fracciones simples: tres factores lineales distintos

Hallar $\int \frac{3x^2 - 7x - 2}{x^3 - x}\, dx$.

**Solución** Tampoco sirven esta vez los métodos vistos antes, pero podemos descomponer el integrando en fracciones simples:

$$\frac{3x^2 - 7x - 2}{x^3 - x} = \frac{3x^2 - 7x - 2}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$

$$= \frac{A(x-1)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-1)}{x(x-1)(x+1)}.$$

De nuevo igualamos los numeradores de las fracciones primera y última:

$$3x^2 - 7x - 2 = A(x-1)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-1). \tag{4.3}$$

En este caso, los valores $x = 0$, $x = 1$ y $x = -1$ anulan dos de los tres términos de la derecha en (4.3). En particular, para $x = 0$, obtenemos

$$-2 = A(-1)(1) = -A,$$

de donde $A = 2$. Análogamente, con $x = 1$ resulta $B = -3$ y con $x = -1$ se encuentra que $C = 4$. En conclusión,

$$\int \frac{3x^2 - 7x - 2}{x^3 - x}\, dx = \int \left(\frac{2}{x} - \frac{3}{x-1} + \frac{4}{x+1}\right) dx$$

$$= 2 \ln|x| - 3 \ln|x - 1| + 4 \ln|x + 1| + c.$$

**Advertencia**

Si una expresión racional es impropia (es decir, si el numerador tiene grado mayor o igual que el denominador), hay que efectuar, antes de nada, la división. Así se obtendrá la suma de un polinomio y de una fracción propia (numerador de grado menor que el denominador). A continuación se aplica la descomposición en fracciones simples a esta fracción propia.

### Ejemplo 4.3 Descomposición en fracciones simples que requiere división previa

Hallar la integral indefinida $f(x) = \dfrac{2x^3 - 4x^2 - 15x + 5}{x^2 - 2x - 8}$ mediante descomposición en fracciones simples.

**Solución** Como el grado del numerador es mayor que el del denominador, dividimos antes de nada. Indicamos las operaciones de la división (pero puede hacerla como le parezca más oportuno):

$$\begin{array}{r} 2x \\ x^2 - 2x - 8 \overline{)\,2x^3 - 4x^2 - 15x + 5} \\ \underline{2x^3 - 4x^2 - 16x} \\ x + 5 \end{array}$$

Por tanto,

$$f(x) = \frac{2x^3 - 4x^2 - 15x + 5}{x^2 - 2x - 8} = 2x + \frac{x + 5}{x^2 - 2x - 8}.$$

La fracción propia resultante se puede descomponer como

$$\frac{x + 5}{x^2 - 2x - 8} = \frac{x + 5}{(x - 4)(x + 2)} = \frac{A}{x - 4} + \frac{B}{x + 2}.$$

Es fácil deducir que $A = \frac{3}{2}$ y $B = -\frac{1}{2}$. (Dejamos esto como ejercicio). Y finalmente,

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^3 - 4x^2 - 15x + 5}{x^2 - 2x - 8}\,dx &= \int \left[2x + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{x - 4}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x + 2}\right)\right] dx \\ &= x^2 + \frac{3}{2}\ln|x - 4| - \frac{1}{2}\ln|x + 2| + c. \end{aligned}$$

Ya debe haberse preguntado qué ocurre cuando el denominador de la función racional tiene factores lineales repetidos. Por ejemplo, ¿hay una descomposición en fracciones simples para una expresión como

$$\frac{2x + 3}{(x - 1)^2}?$$

Sí y se obtiene como sigue. Si el grado de $P(x) < n$, se puede descomponer

**Fracciones simples: factores lineales repetidos**

$$\frac{P(x)}{(ax + b)^n} = \frac{c_1}{ax + b} + \frac{c_2}{(ax + b)^2} + \cdots + \frac{c_n}{(ax + b)^n},$$

donde las constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ han de ser determinadas en cada caso. El próximo ejemplo es típico.

### Ejemplo 4.4 Descomposición en fracciones simples con un factor lineal repetido

Por descomposición en fracciones simples, hallar una primitiva de

$$f(x) = \frac{5x^2 + 20x + 6}{x^3 + 2x^2 + x}.$$

**Solución** Hay un factor lineal $(x + 1)$ repetido en el denominador. En efecto,

$$\frac{5x^2 + 20x + 6}{x^3 + 2x^2 + x} = \frac{5x^2 + 20x + 6}{x(x + 1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{(x + 1)^2}$$
$$= \frac{A(x + 1)^2 + Bx(x + 1) + Cx}{x(x + 1)^2}.$$

Comparando los numeradores, se obtiene

$$5x^2 + 20x + 6 = A(x + 1)^2 + Bx(x + 1) + Cx.$$

Haciendo $x = 0$, vemos que $A = 6$, y con $x = -1$, resulta $C = 9$. Para hallar $B$ sustituimos cualquier valor conveniente de $x$, digamos $x = 1$. (Desgraciadamente, no hay ninguna elección de $x$ que haga cero los términos de $A$ y $C$ sin anular el de $B$). Se encuentra $B = -1$. Por tanto,

$$\int \frac{5x^2 + 20x + 6}{x^3 + 2x^2 + x}\, dx = \int \left[ \frac{6}{x} - \frac{1}{x + 1} + \frac{9}{(x + 1)^2} \right] dx$$
$$= 6 \ln |x| - \ln |x + 1| - 9(x + 1)^{-1} + c.$$

Se puede extender la descomposición en fracciones simples a funciones racionales con factores cuadráticos irreducibles (o sea, sin factores reales de grado uno) en el denominador. Si el grado de $P(x) < 2n$ (el grado del denominador) y cada uno de los factores del denominador es distinto, podemos escribir

**Fracciones simples: factores cuadráticos irreducibles**

$$\frac{P(x)}{(a_1x^2 + b_1x + c_1)(a_2x^2 + b_2x + c_2) \cdots (a_nx^2 + b_nx + c_n)} =$$
$$= \frac{A_1x + B_1}{a_1x^2 + b_1x + c_1} + \frac{A_2x + B_2}{a_2x^2 + b_2x + c_2} + \cdots + \frac{A_nx + B_n}{a_nx^2 + b_nx + c_n}. \tag{4.4}$$

Esta vez las fracciones simples tienen denominadores cuadráticos y numeradores lineales. ¿Le parece engorroso? Estamos de acuerdo: lo es. Pero lo único tedioso son las operaciones algebraicas ¡y un PCS las hará por nosotros! Nótese que las fracciones de la derecha en (4.4) son relativamente fáciles de integrar usando sustituciones y eventualmente completando el cuadrado.

### Ejemplo 4.5 Descomposición en fracciones simples con un factor cuadrático

Aplicar descomposición en fracciones simples para encontrar una primitiva de

$$f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^3 + x}.$$

**Solución** En primer lugar, escribimos

$$\frac{2x^2 - 5x + 2}{x^3 + x} = \frac{2x^2 - 5x + 2}{x(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} = \frac{A(x^2 + 1) + (Bx + C)x}{x(x^2 + 1)}.$$

Al igualar los numeradores, se obtiene

$$2x^2 - 5x + 2 = A(x^2 + 1) + (Bx + C)x$$
$$= (A + B)x^2 + Cx + A.$$

Mejor que sustituir valores de $x$ (salvo $x = 0$, no hay valores convenientes), exigimos que los coeficientes de cada potencia de $x$ sean iguales:

$$\begin{aligned} 2 &= A + B \\ -5 &= C \\ 2 &= A. \end{aligned}$$

De ahí se sigue $B = 0$, así que

$$\int \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^3 + x}\, dx = \int \left( \frac{2}{x} - \frac{5}{x^2 + 1} \right) dx = 2 \ln |x| - 5 \tan^{-1} x + c.$$

---

Muchas veces las fracciones simples relacionadas con factores cuadráticos requieren ciertas manipulaciones (completar el cuadrado, por ejemplo) antes de hallar su primitiva. Tal es el caso en el ejemplo siguiente.

**Ejemplo 4.6** **Descomposición en fracciones simples con un factor cuadrático**

Usar descomposición en fracciones simples para hallar una primitiva de

$$f(x) = \frac{5x^2 + 6x + 2}{(x + 2)(x^2 + 2x + 5)}.$$

**Solución** La expresión cuadrática del denominador no se puede factorizar, así que la descomposición correcta es

$$\begin{aligned} \frac{5x^2 + 6x + 2}{(x + 2)(x^2 + 2x + 5)} &= \frac{A}{x + 2} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2x + 5} \\ &= \frac{A(x^2 + 2x + 5) + (Bx + C)(x + 2)}{(x + 2)(x^2 + 2x + 5)}. \end{aligned}$$

Igualando numeradores, obtenemos

$$5x^2 + 6x + 2 = A(x^2 + 2x + 5) + (Bx + C)(x + 2).$$

Exigiendo ahora que los coeficientes de cada potencia de $x$ sean iguales a ambos lados, resulta

$$\begin{aligned} 5 &= A + B \\ 6 &= 2A + 2B + C \\ 2 &= 5A + 2C. \end{aligned}$$

Dejamos como ejercicio resolver este sistema por eliminación. La solución es $A = 2$, $B = 3$, $C = -4$. Integrando, se tiene

$$\int \frac{5x^2 + 6x + 2}{(x + 2)(x^2 + 2x + 5)}\, dx = \int \left( \frac{2}{x + 2} + \frac{3x - 4}{x^2 + 2x + 5} \right) dx. \tag{4.5}$$

La integral del primer sumando es fácil, pero ¿qué hacemos con la del segundo? Dado que el denominador no factoriza, hay poco donde elegir. Con la vista puesta en el denominador, intentamos la sustitución $u = x^2 + 2x + 5$, con lo que $du = (2x + 2)\, dx$. De ese modo podemos escribir la integral del segundo sumando como

$$\int \frac{3x-4}{x^2+2x+5}\,dx = \int \frac{3(x+1)-7}{x^2+2x+5}\,dx = \int \left[\left(\frac{3}{2}\right)\frac{2(x+1)}{x^2+2x+5} - \frac{7}{x^2+2x+5}\right]dx$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2(x+1)}{x^2+2x+5}\,dx - \int \frac{7}{x^2+2x+5}\,dx$$

$$= \frac{3}{2}\ln(x^2+2x+5) - \int \frac{7}{x^2+2x+5}\,dx. \tag{4.6}$$

Para hallar la integral resultante en (4.6) hay que completar el cuadrado en el denominador:

$$\int \frac{7}{x^2+2x+5}\,dx = \int \frac{7}{(x+1)^2+4}\,dx = \frac{7}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + c.$$

(Dejamos los detalles como ejercicio). Esto, unido a (4.5) y (4.6), significa que

$$\int \frac{5x^2+6x+2}{(x+2)(x^2+2x+5)}\,dx = 2\ln|x+2| + \frac{3}{2}\ln(x^2+2x+5) - \frac{7}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + c.$$

**Nota 4.1**

Cuando sepa tratar el caso de factores cuadráticos irreducibles repetidos en el denominador, estará en condiciones de descomponer en fracciones simples **toda** función racional. El denominador de tal función se puede expresar siempre como producto de factores lineales y cuadráticos, algunos de ellos posiblemente repetidos. Una vez hecho eso, ¡utilice la técnica explicada en esta sección! En la práctica, los cálculos detallados suelen exigir la ayuda de un PCS.

**Advertencia**

Muchos PCS incluyen comandos para efectuar descomposiciones en fracciones simples. No obstante, le aconsejamos expresamente que resuelva a mano los ejercicios de esta sección. Una vez que domine la idea de estas descomposiciones, deje al PCS que haga el trabajo sucio por usted. Pero, hasta entonces, sea paciente y trabaje a mano con cuidado.

En los ejercicios exploramos funciones racionales con factores cuadráticos irreducibles repetidos en el denominador. La idea es la misma que en anteriores descomposiciones, pero las operaciones son más complicadas (sin un PCS).

El modelo logístico para el crecimiento de poblaciones (sección 6.5) suponía un ritmo de crecimiento proporcional a la población $p(t)$ presente en cada tiempo $t$ y a la diferencia entre $p(t)$ y la máxima población sostenible $M$. Así, pues, la función población satisface la ecuación diferencial $p'(t) = kp(M-p)$, para alguna constante $k$. Como muestra el próximo ejemplo, una ecuación de ese tipo se puede resolver por descomposición en fracciones simples.

**Ejemplo 4.7** **Resolución de una ecuación diferencial por fracciones simples**

Resolver el problema de valores iniciales $p'(t) = 3p(10-p)$ con $p(0) = 3$.

**Solución** Es una ecuación separable (sección 6.5) como vemos al reescribirla en la forma

$$\frac{1}{p(10-p)}\,p'(t) = 3.$$

Integrando con respecto de $t$, obtenemos

$$\int \frac{1}{p(10-p)}\,p'(t)\,dt = \int 3\,dt,$$

o sea,

$$\int \frac{1}{p(10-p)}\,dp = \int 3\,dt. \tag{4.7}$$

La integral de la izquierda exige descomposición en fracciones simples. Se tiene

$$\frac{1}{p(10-p)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{10-p} = \frac{A(10-p)+Bp}{p(10-p)},$$

y por tanto,

$$1 = A(10-p) + Bp.$$

Tomando $p = 0$, resulta $1 = 10A$, o sea, $A = \frac{1}{10}$. Con $p = 10$ se obtiene $1 = 10B$, o sea, $B = \frac{1}{10}$. En consecuencia, la descomposición en fracciones simples es

$$\frac{1}{p(10-p)} = \frac{1/10}{p} + \frac{1/10}{10-p}.$$

Volviendo a la ecuación (4.7), se tiene

$$\int \left( \frac{1/10}{p} + \frac{1/10}{10-p} \right) dp = \int 3\, dt,$$

es decir, $\frac{1}{10}\int \frac{1}{p}\,dp - \frac{1}{10}\int \frac{-1}{10-p}\,dp = \int 3dt.$ Separando las integrales

Finalmente, integrando, llegamos al resultado

$$\frac{1}{10}\ln|p| - \frac{1}{10}\ln|10-p| = 3t + c. \quad \text{Evaluación de integrales.}$$

Es fácil resolver esta ecuación en $p(t)$ (los detalles se encuentran en la sección 6.5).

## EJERCICIOS 7.4

1. Hay un atajo para determinar las constantes de los términos lineales en una descomposición en fracciones simples. Por ejemplo, sea

$$\frac{x-1}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}.$$

Para hallar $A$, suprimimos el $(x+1)$ del denominador y hacemos $x = -1$: $A = \frac{-1-1}{-1-2} = \frac{2}{3}$. Para hallar $B$, suprimimos el $(x-2)$ del denominador y hacemos $x = 2$: $B = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}$. Explicar por qué funciona este procedimiento y practique en otros ejemplos.

2. En el método de las fracciones simples hay mucha diferencia entre las funciones cuadráticas que factorizan en factores lineales y las que son irreducibles. Recordemos que una función cuadrática factoriza como $(x-a)(x-b)$ si y, sólo si, $a$ y $b$ son ceros reales de la función. Explicar cómo se puede usar la fórmula cuadrática para saber si una función cuadrática dada es irreducible o no.

**En los ejercicios 3-34, descomponer en fracciones simples y hallar una primitiva. Compruebe su respuesta con un PCS.**

3. $\frac{x-5}{x^2-1}$
4. $\frac{5x-2}{x^2-4}$
5. $\frac{6x}{x^2-x-2}$
6. $\frac{4}{x^2-1}$
7. $\frac{x+1}{x^2-x-6}$
8. $\frac{3x}{x^2-3x-4}$
9. $\frac{-x+5}{x^3-x^2-2x}$
10. $\frac{3x+8}{x^3+5x^2+6x}$
11. $\frac{x^3+x+2}{x^2+2x-8}$
12. $\frac{x^2+1}{x^2-5x-6}$
13. $\frac{-3x-1}{x^3-x}$
14. $\frac{x^2+3}{x^3-x}$
15. $\frac{2x+3}{(x+2)^2}$
16. $\frac{3x-5}{(x-1)^2}$
17. $\frac{x-1}{x^3+4x^2+4x}$
18. $\frac{4x-5}{x^3-3x^2}$
19. $\frac{x+4}{x^3+3x^2+2x}$
20. $\frac{-2x^2+4}{x^3+3x^2+2x}$
21. $\frac{x+2}{x^3+x}$
22. $\frac{1}{x^3+4x}$
23. $\frac{4x-2}{x^4-1}$
24. $\frac{3x+7}{x^4-16}$
25. $\frac{3x^2-6}{x^2-x-2}$
26. $\frac{x^3+x}{x^2-1}$
27. $\frac{2x+3}{x^2+2x+1}$
28. $\frac{2x}{x^2-6x+9}$
29. $\frac{x^2+2x+1}{x^3+x}$
30. $\frac{2x^2-3x+2}{x^3+x}$
31. $\frac{4x^2+3}{x^3+x^2+x}$
32. $\frac{4x+4}{x^4+x^3+2x^2}$
33. $\frac{3x^3+1}{x^3-x^2+x-1}$
34. $\frac{2x^4+9x^2+x-4}{x^3+4x}$

35. Vamos a descomponer $\frac{4x^2+2}{(x^2+1)^2}$ en fracciones simples. Al haber un factor lineal repetido, la descomposición es de la forma $\frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}$. Hacemos

$$\frac{4x^2+2}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}$$

Multiplicando por $(x^2 + 1)^2$, obtenemos

$$4x^2 + 2 = (Ax + B)(x^2 + 1) + Cx + D$$
$$= Ax^3 + Bx^2 + Ax + B + Cx + D$$

Como en el ejemplo 4.5, igualamos los coeficientes de cada potencia de $x$. Para $x^3$, se tiene $0 = A$, y para $x^2$, $4 = B$. Siga con los coeficientes en $x$ y con los de los términos constantes para terminar la descomposición.

**En los ejercicios 36-40, hallar la descomposición en fracciones simples. (Véase el ejercicio 35).**

36. $\dfrac{x^3 + 2}{(x^2 + 1)^2}$

37. $\dfrac{2x^2 + 4}{(x^2 + 4)^2}$

38. $\dfrac{2x^3 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$

39. $\dfrac{4x^2 + 3}{(x^2 + x + 1)^2}$

40. $\dfrac{x^4 + x^3}{(x^2 + 4)^2}$

41. Para resolver la ecuación logística $y' = ay(1 - y)$ en la sección 6.5, la escribimos en forma separada $\dfrac{1}{y(1 - y)}y' = a$ e integramos. Descomponer el integrando en fracciones simples, integrar $\displaystyle\int \frac{1}{y(1 - y)}\,dy$ y, a continuación, resolver la ecuación diferencial.

42. En cierta reacción química, dos moléculas de la sustancia A y una de B forman una molécula de la sustancia final X. Esta clase de reacciones se encuentra en el proceso de destrucción de la capa de ozono. Si hay un total de $a$ moléculas disponibles de A y $b$ de B, la cantidad $x(t)$ de X obedece la ecuación

$$x'(t) = k[a - 2x(t)]^2[b - x(t)]$$

para alguna constante $k$. Escribirla en forma separada y usar descomposición en fracciones simples para encontrar una representación implícita de la solución.

43. En este ejercicio exploramos una generalización de la ecuación logística (sección 6.5): $y' = ay - by^2$, que se reduce a ella cuando $a = b$. Suponiendo $0 < y < a/b$, probar que $y(t) = \dfrac{a}{Ce^{-at} + b}$, donde la constante $C$ es $\dfrac{a}{y(0)} - b$. ¿Qué ocurre con $y(t)$ cuando $t \to \infty$? Comparar con las soluciones de la ecuación logística obtenidas previamente. Resolver la ecuación si $y > a/b$.

44. Al desarrollar la integral definida nos hemos topado con sumas como $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{2}{i^2 + i}$. Igual que con las sumas de Riemann, estamos interesados en el límite para $n \to \infty$. Escribir varios términos de la suma e intentar adivinar cuál es el límite. Se da el caso de que ésta es una de las raras sumas para las que se conoce una fórmula exacta, ya que es una **suma telescópica**. Para ver qué significa esto, escriba la descomposición en fracciones simples de $\dfrac{2}{i^2 + i}$. Utilizando esa descomposición, escriba varios términos de la suma y observe las cancelaciones que se producen. Describa brevemente por qué es apropiado llamarla *telescópica* y calcule $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{2}{i^2 + i}$. A continuación, calcule el límite para $n \to \infty$. Repita el mismo proceso con la suma telescópica $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{4i}{i^2 - 1}$.

## 7.5 TABLAS DE INTEGRALES Y PCS

Pregunte a quien haya tenido necesidad de evaluar muchas integrales, lo que incluye a muchos ingenieros, físicos y matemáticos, y reconocerá haber utilizado con asiduidad tablas de integrales y/o un PCS. Pero, aun siendo dos instrumentos potentes para el uso profesional de las matemáticas, **no** evitan tener que aprender las técnicas básicas que hemos estudiado hasta ahora. El uso de tablas requiere, a menudo, reescribir antes la integral para adaptarla a alguna de las formas que aparecen en ellas. Y eso implica efectuar manipulaciones algebraicas o alguna sustitución. En cuanto a un PCS, más de una vez dará la primitiva en una forma poco conveniente. Y lo que es peor, un PCS puede dar ocasionalmente una respuesta incorrecta. Los ejemplos que siguen subrayan algunas de estas limitaciones.

### Cómo utilizar las tablas de integrales

Al final del libro incluimos una breve tabla de integrales. Una tabla más completa puede consultarse en *CRC Standard Mathematical Tables*. Y como referencia obligada hay que citar el libro *Table of Integrals, Series and Products*, de Gradshteyn y Ryzhik. Si no encuentra una integral allí, deje de buscarla: no la encontrará.

**Ejemplo 5.1** **Uso de una tabla de integrales**

Usar una tabla de integrales para hallar $\int \frac{\sqrt{3+4x^2}}{x}\,dx$.

**Solución** Por supuesto, podríamos hallarla mediante una sustitución trigonométrica, pero basta mirar en nuestra tabla de integrales para encontrar que

$$\int \frac{\sqrt{a^2+u^2}}{u}\,du = \sqrt{a^2+u^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2+u^2}}{u}\right| + c. \tag{5.1}$$

Por desgracia, la integral propuesta no es exactamente de la forma (5.1). Ahora bien, eso lo arregla la sustitución $u = 2x$, $du = 2\,dx$. En efecto,

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{3+4x^2}}{x}\,dx &= \int \frac{\sqrt{3+(2x)^2}}{2x}\,(2)\,dx = \int \frac{\sqrt{3+u^2}}{u}\,du \\ &= \sqrt{3+u^2} - \sqrt{3}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3+u^2}}{u}\right| + c. \\ &= \sqrt{3+4x^2} - \sqrt{3}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3+4x^2}}{2x}\right| + c.\end{aligned}$$

Algunas de las fórmulas de la tabla son fórmulas de reducción, es decir, del tipo

$$\int f(u)\,du = g(u) + \int h(u)\,du,$$

donde la segunda integral es más simple que la primera. Suelen aplicarse repetidas veces hasta resolver la integral, como en el próximo ejemplo.

**Ejemplo 5.2** **Aplicación de una fórmula de reducción**

Usar una fórmula de reducción para hallar $\int \operatorname{sen}^6 x\,dx$.

**Solución** Esta integral se puede resolver por técnicas que ya conocemos (¿ve cómo?). No obstante, para todo entero $n \geq 1$ tenemos la fórmula de reducción

$$\int \operatorname{sen}^n u\,du = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1} u\cos u + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} u\,du. \tag{5.2}$$

Aplicando (5.2) con $n = 6$, obtenemos

$$\int \operatorname{sen}^6 x\,dx = -\frac{1}{6}\operatorname{sen}^5 x\cos x + \frac{5}{6}\int \operatorname{sen}^4 x\,dx.$$

Ahora aplicamos la misma fórmula de reducción, pero con $n = 4$, a la integral $\int \operatorname{sen}^4 x\,dx$.

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^6 x\,dx &= -\frac{1}{6}\operatorname{sen}^5 x\cos x + \frac{5}{6}\int \operatorname{sen}^4 x\,dx. \\ &= -\frac{1}{6}\operatorname{sen}^5 x\cos x + \frac{5}{6}\left(-\frac{1}{4}\operatorname{sen}^3 x\cos x + \frac{3}{4}\int \operatorname{sen}^2 x\,dx\right).\end{aligned}$$

Finalmente, para $\int \operatorname{sen}^2 x\,dx$ podemos usar otra vez (5.2) (con $n = 2$) o hallarla mediante las fórmulas del ángulo mitad. Elegimos la primera opción, con lo que resulta

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^6 x\,dx &= -\frac{1}{6}\operatorname{sen}^5 x\cos x + \frac{5}{6}\left(-\frac{1}{4}\operatorname{sen}^3 x\cos x + \frac{3}{4}\int \operatorname{sen}^2 x\,dx\right)\\ &= -\frac{1}{6}\operatorname{sen}^5 x\cos x - \frac{5}{24}\operatorname{sen}^3 x\cos x + \frac{5}{8}\left(-\frac{1}{2}\operatorname{sen} x\cos x + \frac{1}{2}\int dx\right)\\ &= -\frac{1}{6}\operatorname{sen}^5 x\cos x - \frac{5}{24}\operatorname{sen}^3 x\cos x - \frac{5}{16}\operatorname{sen} x\cos x + \frac{5}{16}x + c.\end{aligned}$$

Es un momento oportuno para advertir que las primitivas halladas por distintos métodos pueden tener aspectos muy diferentes entre sí, aunque sean necesariamente equivalentes. Por ejemplo, si una primitiva es $\operatorname{sen}^2 x + c$, puede aparecer bajo la forma $-\cos^2 x + c$, que es equivalente, ya que

$$\operatorname{sen}^2 x + c = 1 - \cos^2 x + c = -\cos^2 x + (1 + c).$$

Además, como $c$ es una constante arbitraria, también $1 + c$ lo es. En el ejemplo 5.2, los tres primeros términos tienen un factor común $\operatorname{sen} x \cos x$, que es igual a $\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$. Usando esto y alguna otra identidad, puede comprobar que nuestra solución del ejemplo 5.2 es equivalente a esta otra, obtenida con un PCS de uso común:

$$\int \operatorname{sen}^6 x\,dx = \frac{5}{16}x - \frac{15}{64}\operatorname{sen} 2x + \frac{3}{64}\operatorname{sen} 4x - \frac{1}{192}\operatorname{sen} 6x + c.$$

Así, pues, no se inquiete en exceso si su respuesta difiere de la de un colega o de la que aparece en la tabla del libro. Ambas pueden ser correctas. Si no está seguro de cuál es correcta, derive su respuesta. Si la derivada reproduce el integrando, su respuesta es buena (independientemente de lo que diga su compañero o la tabla).

En alguna ocasión tendrá que aplicar varias fórmulas de reducción en un problema.

### Ejemplo 5.3 Una sustitución previa al uso de las tablas

Hallar $\int x^3 \operatorname{sen} 2x\,dx$.

**Solución** Nuestra tabla contiene la fórmula de reducción

$$\int u^n \operatorname{sen} u\,du = -u^n \cos u + n\int u^{n-1}\cos u\,du. \tag{5.3}$$

Para poder utilizar (5.3) tenemos que hacer la sustitución $u = 2x$, $du = 2\,dx$. Así, se obtiene

$$\begin{aligned}\int x^3 \operatorname{sen} 2x\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{(2x)^3}{2^3}\operatorname{sen} 2x(2)\,dx = \frac{1}{16}\int u^3 \operatorname{sen} u\,du\\ &= \frac{1}{16}\left(-u^3\cos u + 3\int u^2\cos u\,du\right),\end{aligned}$$

donde hemos usado la fórmula de reducción con $n = 3$. Ahora, para hallar esta última integral, recurrimos a la fórmula de reducción

$$\int u^n \cos u\,du = u^n \operatorname{sen} u - n\int u^{n-1}\operatorname{sen} u\,du,$$

con $n = 2$, con el resultado

$$\begin{aligned}\int x^3 \operatorname{sen} 2x\,dx &= -\frac{1}{16}u^3\cos u + \frac{3}{16}\int u^2\cos u\,du\\ &= -\frac{1}{16}u^3\cos u + \frac{3}{16}\left(u^2\operatorname{sen} u - 2\int u\operatorname{sen} u\,du\right).\end{aligned}$$

Aplicando de nuevo la primera fórmula de reducción (5.3), ahora con $n = 1$, se tiene

$$\int x^3 \operatorname{sen} 2x\, dx = -\frac{1}{16} u^3 \cos u + \frac{3}{16} u^2 \operatorname{sen} u - \frac{3}{8} \int u \operatorname{sen} u\, du$$

$$= -\frac{1}{16} u^3 \cos u + \frac{3}{16} u^2 \operatorname{sen} u - \frac{3}{8} \left(-u \cos u + \int u^0 \cos u\, du\right)$$

$$= -\frac{1}{16} u^3 \cos u + \frac{3}{16} u^2 \operatorname{sen} u + \frac{3}{8} u \cos u - \frac{3}{8} \operatorname{sen} u + c$$

$$= -\frac{1}{16} (2x)^3 \cos 2x + \frac{3}{16} (2x)^2 \operatorname{sen} 2x + \frac{3}{8} (2x) \cos 2x - \frac{3}{8} \operatorname{sen} 2x + c$$

$$= -\frac{1}{2} x^3 \cos 2x + \frac{3}{4} x^2 \operatorname{sen} 2x + \frac{3}{4} x \cos 2x - \frac{3}{8} \operatorname{sen} 2x + c.$$

Como ilustra el próximo ejemplo, algunas integrales requieren una cierta dosis de ingenio antes de utilizar la tabla.

**Ejemplo 5.4** **Una sustitución previa al uso de las tablas**

Hallar $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{\sqrt{4 \cos x - 1}}\, dx$.

**Solución** No encontrará esta integral en la tabla. Ni siquiera hay alguna muy parecida a ella. Pero con un poco de astucia podemos escribirla de manera más simple. En primer lugar, transformamos el numerador gracias a la fórmula del ángulo doble:

$$\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{\sqrt{4 \cos x - 1}}\, dx = 2 \int \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\sqrt{4 \cos x - 1}}\, dx.$$

Recuerde que hay que estar siempre ojo avizor a la busca y captura de partes que sean derivadas de otras. (Esperamos que no haya abandonado este hábito al terminar la sección sobre integración por sustitución). En este caso, haciendo $u = \cos x$, $du = -\operatorname{sen} x\, dx$, se obtiene

$$\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{\sqrt{4 \cos x - 1}}\, dx = 2 \int \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\sqrt{4 \cos x - 1}}\, dx = -2 \int \frac{u}{\sqrt{4u - 1}}\, du.$$

En nuestra tabla vemos

$$\int \frac{u}{\sqrt{a + bu}}\, du = \frac{2}{3b^2} (bu - 2a) \sqrt{a + bu} + c. \tag{5.4}$$

Con $a = -1$ y $b = 4$, de (5.4) se deduce que

$$\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{\sqrt{4 \cos x - 1}}\, dx = -2 \int \frac{u}{\sqrt{4u - 1}}\, du = (-2) \frac{2}{3(4^2)} (4u + 2) \sqrt{4u - 1} + c$$

$$= -\frac{1}{12} (4 \cos x + 2) \sqrt{4 \cos x - 1} + c.$$

## Integración con un programa de cálculo simbólico (PCS)

Los PCS son uno de los instrumentos más poderosos llegados a la escena matemática en el último cuarto de siglo. Cubren un amplio espectro, desde calculadoras de mano (como TI-89 y HP-48) hasta potentes sistemas de software (como Mathematica o Maple) aptos para cualquier ordenador personal.

Los ejemplos que siguen se refieren a los escasos problemas que puede encontrar al utilizar un PCS. Admitimos que hemos buscado intencionadamente errores en los PCS. La mala noticia es que hemos encontrado varios. La buena noticia es que se producen muy rara vez y que el PCS que usa usted tal vez esté libre de ellos. El fondo de la cuestión es que el programador ha «enseñado» muchas reglas al PCS. Si aplica la regla inadecuada a la integral indebida, puede producirse una respuesta incorrecta. Tenga en cuenta que son fallos de programación y que la próxima versión de su PCS dispondrá de un abanico más extenso de reglas. Como usuario inteligente, debe estar preparado para detectar los errores que puedan ocurrir.

Lo primero que debe recordar, al aplicar un PCS a una integral, es que le dará *una* primitiva, no la más general (la integral indefinida), ya que suprime la constante de integración. Si bien esto es técnicamente incorrecto, es una pega de muy poca importancia comparada con la inmensa potencia del PCS.

### Ejemplo 5.5 Una deficiencia de algunos PCS

Utilizar un programa de cálculo simbólico para hallar $\int \frac{1}{x}\,dx$.

**Solución** Muchos PCS dan

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x.$$

(En realidad, algún PCS da $\log x$, porque utiliza la notación $\log x$ para el logaritmo natural). No sólo falta la constante de integración, sino que esa primitiva sólo es válida para $x > 0$. La calculadora TI-92 da como primitiva

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln |x|,$$

que es válida para todo $x \neq 0$ (sigue faltando la constante de integración, claro está). Por otra parte, todos los PCS que hemos probado han evaluado correctamente

$$\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x}\,dx = -\ln 2,$$

a pesar de que la primitiva que proporcionan todos, salvo la TI-92, no está definida en los límites de integración.

A veces, la primitiva que da un PCS no es válida, tal como está escrita, para **ningún** valor real de $x$, como en el ejemplo siguiente. (En algunos casos, el PCS da una primitiva que es válida en el contexto más avanzado de funciones de una variable compleja).

### Ejemplo 5.6 Una primitiva incorrecta

Hallar con un PCS la integral $\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x - 2}\,dx$.

**Solución** Un PCS da la primitiva incorrecta

$$\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x - 2}\,dx = \ln(\operatorname{sen} x - 2).$$

A primera vista podría pensarse que es correcta, especialmente porque la regla de la cadena parece corroborarlo:

$$\frac{d}{dx}\ln(\operatorname{sen} x - 2) = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x - 2}. \qquad \text{¡Esto es incorrecto!}$$

El error es más fundamental (y más sutil) que una simple aplicación errónea de la regla de la cadena. Nótese que la expresión $\ln(\operatorname{sen} x - 2)$ no está definida para **ningún** $x$ real, ya que $\operatorname{sen} x - 2 < 0$ para todo $x$. Recordemos que a esta integral le es aplicable la regla general de integración

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$$

y que el valor absoluto es importante. La primitiva correcta es $\ln|\operatorname{sen} x - 2| + c$, que se puede escribir también como $\ln(2 - \operatorname{sen} x) + c$, ya que $2 - \operatorname{sen} x > 0$ para todo $x$.

Probablemente, los errores más comunes con los que tendrá que enfrentarse serán los suyos propios. Si propone a su PCS un problema en forma inadecuada, resolverá un problema distinto del que usted pretendía. El próximo ejemplo muestra un error simple, pero frecuente.

### Ejemplo 5.7 Un problema donde el PCS interpreta mal lo que se le propone

Usar un PCS para hallar $\int 4x8x\,dx$.

**Solución** Tras introducir el integrando como $4x8x$, un PCS devolvió la extraña y errónea respuesta

$$\int 4x8x\,dx = 4x8xx.$$

Es fácil hallar esa integral (antes de nada, reescriba el integrando como $32x^2$) y probar que eso es incorrecto. ¿Cuál ha sido el error? La respuesta hay que buscarla, paradójicamente, en la potencia del PCS, capaz de hallar integrales del tipo $\int cx\,dx$ con una constante $c$ no especificada. Eso es lo que hace necesario que especifiquemos al PCS la variable de integración.

En el problema anterior, el PCS ha interpretado el integrando como cuatro veces una variable llamada $x8x$, sin relación con la variable $x$ de integración. En consecuencia, su respuesta ha sido de la forma $\int 4c\,dx = 4cx$.

La forma de la primitiva dada por un PCS no siempre será la más conveniente.

### Ejemplo 5.8 Una expresión poco conveniente de la primitiva

Usar un PCS para hallar $\int x(x^2 + 3)^5\,dx$.

**Solución** Algunos PCS dan

$$\int x(x^2 + 3)^5\,dx = \frac{1}{12}x^{12} + \frac{3}{2}x^{10} + \frac{45}{4}x^8 + 45x^6 + \frac{405}{4}x^4 + \frac{243}{2}x^2,$$

y otros, la expresión mucho más simple

$$\int x(x^2 + 3)^5\,dx = \frac{(x^2 + 3)^6}{12}.$$

No son estrictamente equivalentes. Difieren en una constante, pero... recuerde que los PCS dejan de lado la constante de integración.

Sucede en ocasiones que un PCS da la primitiva correcta, pero expresada en términos de funciones con las que no estamos familiarizados. Tal cosa ocurre en el próximo ejemplo.

### Ejemplo 5.9 Una primitiva poco familiar

Usar un PCS para hallar $\int \frac{1}{\sqrt{9+x^2}}\,dx$.

**Solución** Ya la hemos resuelto en el ejemplo 3.10, donde por sustitución trigonométrica vimos que

$$\int \frac{1}{\sqrt{9+x^2}}\,dx = \ln\left|\sqrt{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}+\frac{x}{3}\right|+c.$$

Un programa de cálculo simbólico da como primitiva $\operatorname{arcsenh}\frac{1}{3}x$. Es equivalente a la que habíamos encontrado en el ejemplo 3.10, pero está expresada en forma tal que resultará menos familiar a cualquier estudiante. Aunque, eso sí, hay que admitir que es la expresión más compacta de la primitiva.

Los PCS llevan a cabo integraciones complicadas con toda facilidad.

### Ejemplo 5.10 Integrales apropiadas para usar un PCS

Usar un PCS para hallar las integrales $\int x^3 \operatorname{sen} 2x\,dx$ y $\int x^{10} \operatorname{sen} 2x\,dx$.

**Solución** Con un PCS obtenemos de un golpe

$$\int x^3 \operatorname{sen} 2x\,dx = -\frac{1}{2}x^3\cos 2x + \frac{3}{4}x^2 \operatorname{sen} 2x - \frac{3}{8}\operatorname{sen} 2x + \frac{3}{4}x\cos 2x + c.$$

Con el mismo esfuerzo se obtiene

$$\begin{aligned}\int x^{10} \operatorname{sen} 2x\,dx = &-\frac{1}{2}x^{10}\cos 2x + \frac{5}{2}x^9 \operatorname{sen} 2x + \frac{45}{4}x^8\cos 2x - 45x^7 \operatorname{sen} 2x\\ &-\frac{315}{2}x^6\cos 2x + \frac{945}{2}x^5 \operatorname{sen} 2x + \frac{4.725}{4}x^4\cos 2x\\ &-\frac{4.725}{2}x^3 \operatorname{sen} 2x + \frac{14.175}{4}x^2\cos 2x + \frac{14.175}{8}\cos 2x\\ &+\frac{14.175}{4}x \operatorname{sen} 2x + c.\end{aligned}$$

Si lo desea, puede hallar incluso

$$\int x^{100} \operatorname{sen} 2x\,dx,$$

aunque el gran número de términos que forman la respuesta hace aconsejable no incluirla aquí. Piense lo que sería efectuar esa integración a mano mediante una secuencia aterradora de 100 integraciones por partes o 100 aplicaciones sucesivas de una fórmula de reducción.

Hay algo que debe quedar muy claro: un PCS es capaz de realizar cálculos (numéricos o simbólicos) repetitivos que usted no puede ni soñar hacer a mano. Cuesta trabajo encontrar una función con primitiva elemental que un PCS no pueda integrar. Considere el siguiente ejemplo como botón de muestra.

**Ejemplo 5.11** **Una integral muy complicada**

Hallar $\int x^7 e^x \operatorname{sen} x\, dx$.

**Solución** Reflexione sobre lo que tendría que hacer para resolverla a mano y, a continuación, utilice un PCS. Un PCS particular da como primitiva

$$\int x^7 e^x \operatorname{sen} x\, dx = \left(-\frac{1}{2}x^7 + \frac{7}{2}x^6 - \frac{21}{2}x^5 + 105x^3 - 315x^2 + 315x\right) e^x \cos x + \left(\frac{1}{2}x^7 - \frac{21}{2}x^5 + \frac{105}{2}x^4 - 105x^3 + 315x - 315\right) e^x \operatorname{sen} x.$$

No lo intente a mano a no ser que tenga mucho tiempo y mucha paciencia. De todas formas, la experiencia acumulada sugiere que esa primitiva es razonable.

Un PCS ahorra mucho tiempo y esfuerzo. Se estará preguntando por qué hemos perdido tanto tiempo en técnicas de integración toda vez que disponemos de los PCS. No, no vamos a caer en el tópico tan manido de «si naufragara en una isla desierta en la que no tuviera acceso a un PCS...». La verdad es que su PCS puede resolver casi todos los problemas de cálculo citados en este libro. Sin embargo, alguna (rara) vez la respuesta del PCS será incorrecta y debe estar preparado para captar esos errores.

Más importante aún, muchas de las incursiones profundas al corazón de la Ciencia o de la Ingeniería exigen aplicar con precisión técnicas de integración. Para comprender esas cuestiones y avanzar en su campo de especialización, necesitará saber *cómo* las técnicas de integración transforman un conjunto de símbolos en otro. Las calculadoras son mucho más rápidas y más precisas que el ser humano. Nuestra habilidad especial reside en la comprensión del **objetivo**, en la lógica de las técnicas y en aplicar la adecuada a cada situación con el fin de establecer conexiones sorprendentes o nuevos hallazgos. Así, pues, ¿qué necesitamos saber? Necesitamos entender bien qué es una integral (definida o indefinida) y una cierta habilidad en el cálculo de integrales. Esto incluye los métodos de sustitución e integración por partes. Y al menos un conocimiento elemental de otras técnicas, por ejemplo, la descomposición en fracciones simples.

# EJERCICIOS 7.5

**En los ejercicios 1-28, usar la tabla de integrales al final del libro para hallar una primitiva. Nota: Al obtener primitivas con la tabla o con un PCS, tenga en cuenta que pueden presentarse bajo apariencias distintas, aunque equivalentes (a través de una identidad trigonométrica, por ejemplo).**

1. $\displaystyle\int \frac{x}{(2+4x)^2}\,dx$
2. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(2+4x)^2}\,dx$
3. $\displaystyle\int e^{2x}\sqrt{1+e^x}\,dx$
4. $\displaystyle\int e^{3x}\sqrt{1+e^{2x}}\,dx$
5. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1+4x^2}}\,dx$
6. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x(3+2\operatorname{sen} x)}\,dx$
7. $\displaystyle\int_0^1 x^8\sqrt{4-x^6}\,dx$
8. $\displaystyle\int_0^{\ln 4} \sqrt{16-e^{2x}}\,dx$
9. $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+4}}\,dx$
10. $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^2 \frac{x\sqrt{x^4-9}}{x^2}\,dx$
11. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{6x-x^2}}{(x-3)^2}\,dx$
12. $\displaystyle\int \frac{\sec^2 x}{\tan x\sqrt{8\tan x-\tan^2 x}}\,dx$
13. $\displaystyle\int \tan^6 x\,dx$
14. $\displaystyle\int \operatorname{cosec}^4 x\,dx$
15. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x\sqrt{4+\operatorname{sen} x}}\,dx$
16. $\displaystyle\int \frac{x^5}{\sqrt{4+x^2}}\,dx$
17. $\displaystyle\int x^3\cos x^2\,dx$
18. $\displaystyle\int x\operatorname{sen} 3x^2\cos 4x^2\,dx$
19. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x\cos x}{\sqrt{1+\cos x}}\,dx$
20. $\displaystyle\int \frac{x\sqrt{1+4x^2}}{x^4}\,dx$
21. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^2 x\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 x+4}}\,dx$
22. $\displaystyle\int \frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$
23. $\displaystyle\int \frac{e^{-2/x^2}}{x^3}\,dx$
24. $\displaystyle\int x^3 e^{2x^2}\,dx$
25. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{4x-x^2}}\,dx$
26. $\displaystyle\int e^{5x}\cos 3x\,dx$
27. $\displaystyle\int e^x \tan^{-1}(e^x)\,dx$
28. $\displaystyle\int (\ln 4x)^3\,dx$

29. Compare algunos de los ejemplos de esta sección con un PCS. Discuta qué errores, si los hay, comete su PCS.

30. Observe cómo responde su PCS ante la integral $\int x \operatorname{sen} x\, dx$ si no deja espacio entre $x$ y sen $x$ al introducirla en él.

31. Pida a su PCS que resuelva $\int (\sqrt{1-x} + \sqrt{x-1})\, dx$. Si da una respuesta, argumente por qué es falsa.

32. Para ver si su PCS «sabe» integrar por partes, intente en él $\int x^3 \cos 3x\, dx$ y $\int x^3 e^{5x} \cos 3x\, dx$. Para ver si «conoce» fórmulas de reducción, pruebe con $\int \sec^5 x\, dx$.

33. Para indagar cuántas técnicas trigonométricas «conoce» su PCS, pruebe con $\int \operatorname{sen}^6 x\, dx$, $\int \operatorname{sen}^4 x \cos^3 x\, dx$ y $\int \tan^4 x \sec^3 x\, dx$.

34. Mire si su PCS tiene un comando especial (como APART en Mathematica) para hacer descomposiciones en fracciones simples. Pídale que halle las integrales

$$\int \frac{x^2 + 2x - 1}{(x-1)^2(x^2+4)}\, dx \quad \text{y} \quad \int \frac{3x}{(x^2+x+2)^2}\, dx.$$

35. Para ver si su PCS «sabe» hacer sustituciones, pruebe con él $\int \frac{1}{x^2(3+2x)}\, dx$ y $\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x(3+2\operatorname{sen} x)}\, dx$. Intente encontrar una integral que su PCS no sea capaz de hacer: empiece por una fórmula básica, digamos $\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}\, dx = \sec^{-1} x + c$, y sustituya la función que se le ocurra. Con $x = e^u$, la integral anterior se convierte en $\int \frac{e^u}{e^u\sqrt{e^{2u}-1}}\, du$. Puede usarla como test para su PCS.

36. La porción del primer cuadrante de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ viene dada por

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

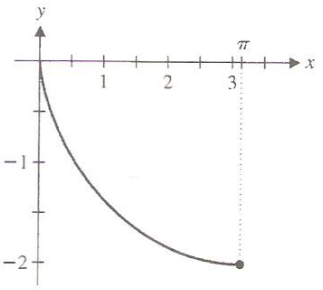
con $0 \le x \le a$. Así, pues, el área de la elipse es $4b\int_0^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\, dx$. Intente esta integral con su PCS. Solemos hacer la hipótesis (implícita) de que $a > 0$, pero el PCS no la hace. ¿La respuesta del PCS es $\pi ab$ o $\pi b|a|$?

37. Este ejercicio explora dos aspectos de un problema muy famoso, resuelto en el siglo XVII. (Cuando termine el ejercicio, piense lo que significa resolverlo antes de que se inventasen las calculadoras y hasta buena parte del Cálculo). Imagine un abalorio que desliza por un hilo, de forma arbitraria, que baja desde el punto (0, 0) hasta el $(\pi, -2)$ en un plano vertical. Suponemos que no hay rozamiento con el hilo y sólo actúa la fuerza de la gravedad. Esta situación es más fácil de analizar usando **ecuaciones paramétricas**, con funciones $x(u)$, $y(u)$ que dan las coordenadas de la posición en términos de una variable $u$. Tres ejemplos de formas que puede adoptar el hilo son $\begin{cases} x(u) = \pi u \\ y(u) = -2u \end{cases}$, $\begin{cases} x(u) = \pi u \\ y(u) = 2(u-1)^2 - 2 \end{cases}$ y $\begin{cases} x(u) = \pi u - \operatorname{sen} \pi u \\ y(u) = \cos \pi u - 1 \end{cases}$. En cada caso, el abalorio inicia el descenso en (0, 0) para $u = 0$ y llega a $(\pi, -2)$ para $u = 1$. Represente estas curvas en la calculadora. Sus gráficas son arcos de recta, de parábola y de una curva especial que se llama **braquistocrona**. Para un camino dado, el tiempo que tarda el abalorio en hacer el recorrido viene dado por

$$T = \frac{1}{\sqrt{g}} \int_0^1 \sqrt{\frac{[x'(u)]^2 + [y'(u)]^2}{-2y(u)}}\, du,$$

donde $g$ es la aceleración de la gravedad. Calcule ese tiempo para la recta y la parábola. Argumente por qué la parábola es un camino más rápido a pesar de que la recta es más corta (piense cuál sería más rápida como pista de esquí). Se puede demostrar que el camino más rápido posible es la braquistocrona. Intente encontrar el tiempo óptimo con ayuda de un PCS. Comparando las gráficas de la parábola y de la braquistocrona, ¿qué ventaja tiene esta última en el inicio de la trayectoria?

38. La braquistocrona del ejercicio 37 tiene otra propiedad extraordinaria, aparte de la de ser el camino más rápido de descenso (que es de donde recibe su nombre, de etimología griega). La figura muestra su gráfica.




Supongamos que en lugar de iniciar su descenso desde el punto (0, 0), el abalorio lo inicia desde un punto arbitrario de esa curva, con $x = c$. ¿Cómo es el tiempo que tarda en llegar al punto de abajo comparado con el que tardaba desde (0, 0)? La respuesta **no** es obvia, ya que cuanto más rápido es el inicio, menos velocidad gana después. Si $x = c$ corresponde a $u = a$, el tiempo que tarda en llegar abajo viene dado por $\frac{\pi}{\sqrt{g}} \int_a^1 \sqrt{\frac{1 - \cos \pi u}{\cos a\pi - \cos \pi u}}\, du$. Si $a = 0$ (es decir, si parte de (0, 0)), el tiempo es $\pi/\sqrt{g}$ (la integral es 1). Si dispone de un buen PCS, calcule la integral para varios valores de $a$ entre 0 y 1. Si su PCS no es capaz de ello, aproxime numéricamente la integral. Descubrirá el hecho sorprendente de que *la integral siempre es 1*. Conclusión: la curva braquistocrona es también **tautocrona**, la curva para la cual el tiempo de descenso es el mismo sea cual sea el punto de partida.

# 7.6 FORMAS INDETERMINADAS Y LA REGLA DE L'HÔPITAL

En esta sección hacemos un quiebro y regresamos a la regla de L'Hôpital para evaluar límites. Ya la hemos utilizado en la sección 3.1 para calcular límites de la forma indeterminada $\frac{0}{0}$. Aquí extenderemos su uso a otras formas indeterminadas que encontraremos cuando estudiemos integrales impropias (sección 7.7).

Es muy frecuente ver límites de la forma

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)},$$

donde $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$ o bien $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \infty$ (o $-\infty$). Recordemos que para estas formas, $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$, con sólo esa información no se puede determinar el valor del límite; ni siquiera si existe o no. Por eso se llaman **formas indeterminadas**. Por ejemplo,

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{x+1}{1} = \frac{2}{1} = 2,$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

y

$$\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{(x-1)^2} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x-1}, \text{ que no existe,}$$

aunque los tres límites son inicialmente de la forma $\frac{0}{0}$. La lección es que la forma $\frac{0}{0}$ carece de significado matemático. Indica sólo que numerador y denominador tienden a 0, pero es necesario un análisis caso por caso para encontrar el valor del límite.

Análogamente, cada uno de los siguientes límites es de la forma $\frac{\infty}{\infty}$. En primer lugar,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 1}{x^3 + 5} = \lim_{x \to \infty} \frac{(x^2+1)\left(\frac{1}{x^3}\right)}{(x^3+5)\left(\frac{1}{x^3}\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}}{1 + \frac{5}{x^3}} = \frac{0}{1} = 0.$$

Recuerde que la receta utilizada en estos casos era dividir arriba y abajo entre la potencia más alta de $x$ en el denominador. A su vez,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 + 5}{x^2 + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{(x^3+5)\left(\frac{1}{x^2}\right)}{(x^2+1)\left(\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{x + \frac{5}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \infty.$$

Finalmente,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2+3x-5}{x^2+4x-11} = \lim_{x \to \infty} \frac{(2x^2+3x-5)\left(\frac{1}{x^2}\right)}{(x^2+4x-11)\left(\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{2 + \frac{3}{x} - \frac{5}{x^2}}{1 + \frac{4}{x} - \frac{11}{x^2}} = \frac{2}{1} = 2.$$

Igual que con los límites de la forma $\frac{0}{0}$, los de la forma $\frac{\infty}{\infty}$ hay que analizarlos caso a caso para saber si el límite existe y cuál es su valor. La regla de L'Hôpital resolvía algunos límites del tipo $\frac{0}{0}$ (sección 3.1). El próximo teorema establece que también va a resolver límites de la forma $\frac{\infty}{\infty}$.

### Advertencia

Escribiremos muchas veces $\left(\frac{0}{0}\right)$ o $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ junto a una expresión para indicar que el límite tiene esa forma indeterminada. Por ejemplo,

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1} \left(\frac{0}{0}\right).$$

Esta notación **no significa** que el valor sea $\frac{0}{0}$. No escriba jamás $\lim_{x \to a} f(x) = \frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, ya que estas afirmaciones **carecen de sentido**.

**Teorema 6.1 (Regla de L'Hôpital)**

Sean $f$ y $g$ derivables en el intervalo $(a, b)$, excepto a lo sumo en un punto $c \in (a, b)$, con $g'(x) \neq 0$ en $(a, b)$, salvo posiblemente en $c$. Supongamos además que $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ tiene la forma indeterminada $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ y que $\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ (o $\pm \infty$). Entonces

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

En la sección 3.1 demostramos el caso $\frac{0}{0}$ suponiendo $f, f', g$ y $g'$ continuas en $(a, b)$ y $g'(c) \neq 0$. La demostración general del caso $\frac{0}{0}$ puede verse en el apéndice A. Dejamos la del caso $\frac{\infty}{\infty}$ para textos más avanzados.

**Ejemplo 6.1** **La forma indeterminada $\frac{0}{0}$**

Calcular $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x.}{\operatorname{sen} x}$.

**Solución** Es una forma indeterminada $\frac{0}{0}$. Tanto $(1 - \cos x)$ como sen $x$ son continuas y derivables en todas partes y $\frac{d}{dx} \operatorname{sen} x = \cos x \neq 0$ en algún intervalo que contiene a $x = 0$. (¿Cuál es ese intervalo?). La gráfica de $f(x) = \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x}$ (figura 7.2) parece indicar que $f(x) \to 0$ cuando $x \to 0$. Podemos confirmarlo mediante la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x.}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{d}{dx}(1 - \cos x)}{\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{0}{1} = 0.$$

La regla de L'Hôpital es también muy fácil de aplicar a las formas indeterminadas $\frac{\infty}{\infty}$.

**Ejemplo 6.2** **Una forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$**

Evaluar $\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x}$.

**Solución** Es de la forma $\frac{\infty}{\infty}$ y su gráfica (figura 7.3) indica que la función crece sin tope cuando $x \to \infty$. La regla de L'Hôpital confirma esa sospecha:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{d}{dx}(e^x)}{\frac{d}{dx}(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{1} = \infty.$$

Cuando sea necesario aplicar varias veces la regla de L'Hôpital en un mismo cálculo, compruebe en cada paso que se satisfacen las hipótesis que la hacen válida.

**Nota 6.1**

La conclusión del teorema se mantiene si se cambia $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ por cualquiera de los límites $\lim_{x \to c^+} \frac{f(x)}{g(x)}$, $\lim_{x \to c^-} \frac{f(x)}{g(x)}$, $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ o $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ con los reajustes apropiados en las hipótesis para cada caso.

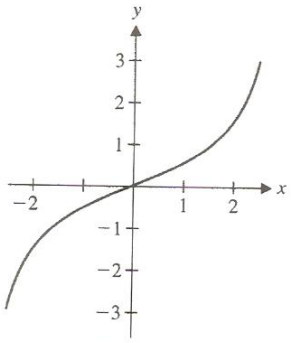



**Figura 7.2**

$y = \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x}$.

**Nota 6.2**

Un error común al aplicar la regla de L'Hôpital es calcular la derivada del cociente (o sea, aplicar la regla del cociente) en lugar del cociente de las derivadas. Otro error frecuente es aplicar la regla de L'Hôpital indiscriminadamente sin verificar antes que se trata de una forma $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$. Tenga mucho cuidado en estos dos aspectos.

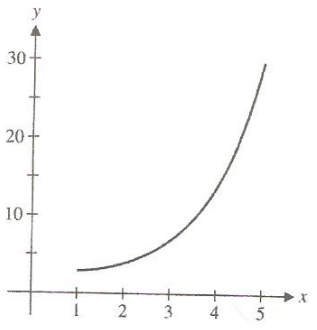



**Figura 7.3**

$y = \frac{e^x}{x}$.

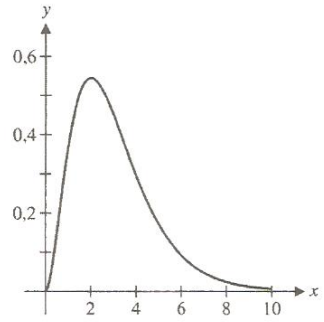



**Figura 7.4**

$y = \dfrac{x^2}{e^x}$.

### Ejemplo 6.3 Un límite que requiere dos aplicaciones de la regla de L'Hôpital

Calcular $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x^2}{e^x}$.

**Solución** Es un límite de la forma $\frac{\infty}{\infty}$. La figura 7.4 parece indicar que la función tiende a 0 cuando $x \to \infty$ (rápidamente, además). Y, en efecto, se tiene

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{d}{dx}(x^2)}{\frac{d}{dx}(e^x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{d}{dx}(2x)}{\frac{d}{dx}(e^x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{e^x} = 0,$$

como esperábamos.

A veces, una aplicación de la regla de L'Hôpital va seguida de ciertas simplificaciones, como en el próximo ejemplo.

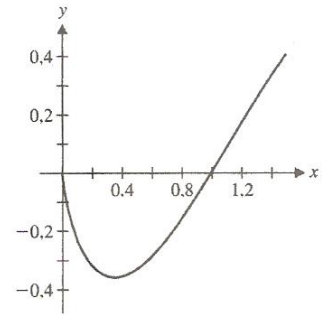



**Figura 7.5**

$y = \dfrac{\ln x}{\operatorname{cosec} x}$.

### Ejemplo 6.4 Simplificación de una forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$

Calcular $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{\ln x}{\operatorname{cosec} x}$.

**Solución** Es un límite de la forma $\frac{\infty}{\infty}$. En la figura 7.5 parece que la función tiende a 0 cuando $x \to 0^+$. Aplicando la regla de L'Hôpital, vemos que

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\operatorname{cosec} x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{d}{dx}(\ln x)}{\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\operatorname{cosec} x \cot x} \left(\frac{\infty}{\infty}\right).$$

Este último límite es de la forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$, pero en vez de usar la regla de L'Hôpital podemos reescribir la expresión. (Merece la pena intentarlo cada vez que la expresión en cuestión es demasiado complicada). Se tiene

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\operatorname{cosec} x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\operatorname{cosec} x \cot x} = \lim_{x \to 0^+} \left(-\frac{\operatorname{sen} x}{x} \tan x\right) = (-1)(0) = 0,$$

como esperábamos, donde hemos utilizado el hecho (establecido en la sección 2.5) de ser

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

(Puede demostrar esto mediante la regla de L'Hôpital). Nótese que si nos hubiéramos embarcado en aplicar nuevamente la regla de L'Hôpital a $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\operatorname{cosec} x \cot x}$, **jamás** hubiéramos llegado a calcular el límite. (¿Por qué no?).

## Otras formas indeterminadas

Hay otras cinco formas indeterminadas a considerar: $\infty - \infty$, $0^0$, $0 \cdot \infty$, $1^\infty$ y $\infty^0$. Analice cada una de ellas hasta entender por qué son indeterminadas. Ante un límite de alguno de esos tipos, el objetivo es reducirlo a las formas indeterminadas $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ para, a continuación, aplicar la regla de L'Hôpital.

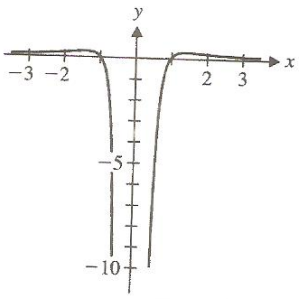



**Figura 7.6**

$y = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4}$.

### Ejemplo 6.5 La forma indeterminada $\infty - \infty$

Calcular $\lim_{x \to 0} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} \right)$.

**Solución** Es un límite de la forma $(\infty - \infty)$. La gráfica de la figura 7.6 sugiere que la función tiende a $-\infty$ cuando $x \to 0$. Sumando las fracciones, se obtiene

$$\lim_{x \to 0} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} \right) = \lim_{x \to 0} \left( \frac{x^2 - 1}{x^4} \right) = -\infty,$$

confirmando la sugerencia de la figura. Hemos resuelto el límite sin recurrir a la regla de L'Hôpital que, de hecho, no es aplicable aquí (¿por qué?).

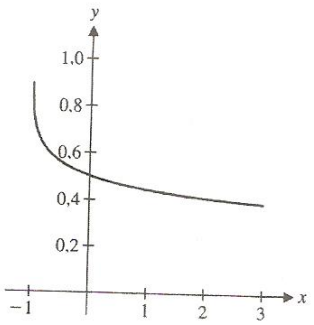



**Figura 7.7**

$y = \frac{1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{x}$.

### Ejemplo 6.6 La forma indeterminada $\infty - \infty$

Evaluar $\lim_{x \to 0} \left[ \frac{1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{x} \right]$.

**Solución** Este límite es de la forma $(\infty - \infty)$. En la figura 7.7 se tiene la impresión de que el límite es un valor cercano a 0,5. Sumando las fracciones, obtenemos una forma a la que se puede aplicar la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \to 0} \left[ \frac{1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{x} \right] = \lim_{x \to 0} \frac{x - \ln(x+1)}{\ln(x+1)x} \left( \frac{0}{0} \right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{d}{dx}[x - \ln(x+1)]}{\frac{d}{dx}[\ln(x+1)x]} \quad \text{Regla de L'Hôpital.}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \frac{1}{x+1}}{\left(\frac{1}{x+1}\right)x + \ln(x+1)(1)} \left( \frac{0}{0} \right).$$

En lugar de aplicar directamente la regla de L'Hôpital a esta expresión, la simplificamos antes con el fin de deshacernos de las fracciones en el numerador y en el denominador. Multiplicando ambos por $(x+1)$, resulta

$$\lim_{x \to 0} \left[ \frac{1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{x} \right] = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \frac{1}{x+1}}{\left(\frac{1}{x+1}\right)x + \ln(x+1)(1)} \left( \frac{x+1}{x+1} \right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(x+1) - 1}{x + (x+1)\ln(x+1)} \left( \frac{0}{0} \right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{d}{dx}(x)}{\frac{d}{dx}[x + (x+1)\ln(x+1)]} \qquad \text{Regla de L'Hôpital.}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{1 + (1)\ln(x+1) + (x+1)\frac{1}{(x+1)}} = \frac{1}{2},$$

que es compatible con la figura 7.7.

### Ejemplo 6.7 La forma indeterminada $0 \cdot \infty$

Evaluar $\lim_{x \to \infty} \left( \frac{1}{x} \ln x \right)$.

**Solución** Este límite es de la forma indeterminada $(0 \cdot \infty)$. En la figura 7.8 parece que la función decrece muy lentamente hacia 0 cuando $x \to \infty$. (Sin embargo, el ritmo de decrecimiento es tan lento que es muy difícil saber si la función se está acercando a 0 o a algún otro valor cercano a 0). Es fácil reescribirlo en la forma $\frac{\infty}{\infty}$, a la que ya podremos aplicar la regla de L'Hôpital. En efecto,

$$\lim_{x \to \infty} \left( \frac{1}{x} \ln x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} \left( \frac{\infty}{\infty} \right)$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{d}{dx} \ln x}{\frac{d}{dx} x} \qquad \text{Regla de L'Hôpital.}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \frac{0}{1} = 0.$$

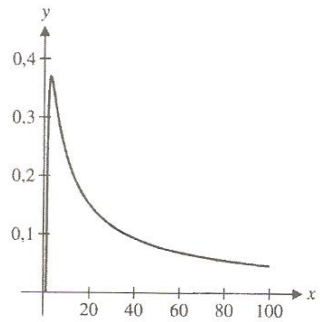



**Figura 7.8**

$y = \frac{1}{x} \ln x.$

Nota: Si $\lim_{x \to c} [f(x)]^{g(x)}$ es de alguna de las formas indeterminadas $0^0$, $\infty^0$ o $1^\infty$ y hacemos $y = [f(x)]^{g(x)}$, se obtiene, para $f(x) > 0$,

$$\ln y = \ln[f(x)]^{g(x)} = g(x) \ln[f(x)],$$

así que $\lim_{x \to a} \ln y = \lim_{x \to a} \{g(x) \ln[f(x)]\}$ será de la forma indeterminada $0 \cdot \infty$, que ya se puede resolver como la del ejemplo 6.7.

### Ejemplo 6.8 La forma indeterminada $1^\infty$

Calcular $\lim_{x \to 1^+} x^{\frac{1}{x-1}}$.

**Solución** Este límite es de la forma indeterminada $(1^\infty)$. La figura 7.9 sugiere que el límite es próximo a 3. Haciendo $y = x^{\frac{1}{x-1}}$, se tiene

$$\ln y = \ln x^{\frac{1}{x-1}} = \frac{1}{x-1} \ln x.$$

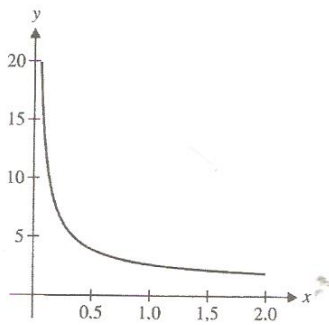



**Figura 7.9**

$y = x^{\frac{1}{x-1}}.$

Ahora consideramos el límite

$$\lim_{x \to 1^+} \ln y = \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1} \ln x \qquad (0 \cdot \infty)$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{\ln x}{x-1} \qquad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{\dfrac{d}{dx}(\ln x)}{\dfrac{d}{dx}(x-1)} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^{-1}}{1} = 1. \qquad \text{Regla de L'Hôpital.}$$

Pero ¡cuidado! Hemos obtenido que $\lim_{x \to 1^+} \ln y = 1$, pero ése no es el límite propuesto. Queríamos calcular

$$\lim_{x \to 1^+} y = \lim_{x \to 1^+} e^{\ln y} = e^1,$$

que, como vemos, es compatible con la figura 7.9.

Con frecuencia, el cálculo de límites de esta forma exige usar la regla de L'Hôpital varias veces. No importa, simplemente, vigile si se satisfacen las hipótesis que avalan su uso y no pierda de vista el límite propuesto.

### Ejemplo 6.9 La forma indeterminada $0^0$

Calcular $\lim_{x \to 0^+} (\operatorname{sen} x)^x$.

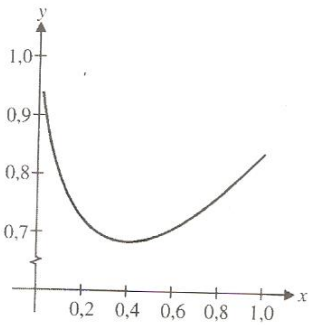



**Figura 7.10**
$y = (\operatorname{sen} x)^x$.

**Solución** Este límite es de la forma indeterminada $(0^0)$. La gráfica de la figura 7.10 indica que el límite es aproximadamente 1. Haciendo $y = (\operatorname{sen} x)^x$, se tiene

$$\ln y = \ln(\operatorname{sen} x)^x = x \ln(\operatorname{sen} x).$$

Ahora consideramos el límite

$$\lim_{x \to 0^+} \ln y = \lim_{x \to 0^+} \ln(\operatorname{sen} x)^x = \lim_{x \to 0^+} [x \ln(\operatorname{sen} x)] \qquad (0 \cdot \infty)$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(\operatorname{sen} x)}{\left(\dfrac{1}{x}\right)} \qquad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\dfrac{d}{dx}[\ln(\operatorname{sen} x)]}{\dfrac{d}{dx}(x^{-1})} \qquad \text{Regla de L'Hôpital.}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{(\operatorname{sen} x)^{-1} \cos x}{-x^{-2}} \qquad \left(\frac{\infty}{\infty}\right).$$

Como ya hemos hecho en otras ocasiones, antes de aplicar la regla de L'Hôpital, evitamos las potencias negativas multiplicando arriba y abajo por $x^2 \operatorname{sen} x$, con lo que obtenemos

$$\lim_{x \to 0^+} \ln y = \lim_{x \to 0^+} \frac{(\operatorname{sen} x)^{-1} \cos x}{-x^{-2}} \left(\frac{x^2 \operatorname{sen} x}{x^2 \operatorname{sen} x}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{-x^2 \cos x}{\operatorname{sen} x} \qquad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{d}{dx}(-x^2 \cos x)}{\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x)} \qquad \text{Regla de L'Hôpital.}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{-2x \cos x + x^2 \operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{0}{1} = 0.$$

Tampoco esta vez hemos obtenido el límite original. Pues bien,

$$\lim_{x \to 0^+} y = \lim_{x \to 0^+} e^{\ln y} = e^0 = 1,$$

que está en buen acuerdo con la figura 7.10.

### Ejemplo 6.10 La forma indeterminada $\infty^0$

Calcular $\lim_{x \to \infty} (x+1)^{2/x}$.

**Solución** Este límite es de la forma indeterminada $(\infty^0)$. La gráfica de la figura 7.11 parece indicar que la función tiende a un límite cercano a 1 cuando $x \to \infty$. Hacemos $y = (x+1)^{2/x}$ y consideramos

$$\lim_{x \to \infty} \ln y = \lim_{x \to \infty} (x+1)^{2/x} = \lim_{x \to \infty} \left[ \frac{2}{x} \ln(x+1) \right] \quad (0 \cdot \infty)$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{2 \ln(x+1)}{x} \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right).$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{d}{dx}[2 \ln(x+1)]}{\frac{d}{dx} x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2(x+1)^{-1}}{1} \qquad \text{Regla de L'Hôpital.}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{2}{x+1} = 0.$$

Por tanto,

$$\lim_{x \to \infty} y = \lim_{x \to \infty} e^{\ln y} = e^0 = 1,$$

como esperábamos.

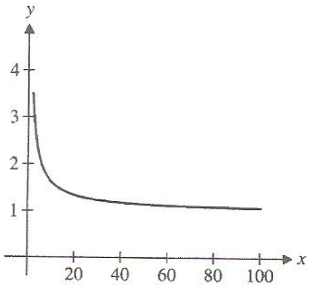



**Figura 7.11**
$y = (x+1)^{2/x}$.

## EJERCICIOS 7.6

1. La regla de L'Hôpital afirma que, en ciertas situaciones, el cociente de los valores de dos funciones tiende al mismo límite que el cociente de sus respectivas derivadas (cambios de ritmo). Gráficamente, esto no es fácil de comprender. Para intentarlo, considere $\frac{f(x)}{g(x)}$, donde $f(x) = ax + b$ y $g(x) = cx + d$ son funciones lineales. Explique por qué el valor de $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ debe depender de la relación entre las pendientes de esas rectas y, más concretamente, debe ser igual a $\lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

2. Piense en un límite 0 como algo que «se hace muy pequeño» y en un límite $\infty$ como algo que «se hace muy grande». Discuta si las siguientes formas son indeterminadas o no y razone sus respuestas: $\infty - \infty$, $\frac{1}{0}$, $0 \cdot \infty$, $\infty \cdot \infty$, $\infty^0$, $0^\infty$ y $0^0$.

**En los ejercicios 3-10, calcular el límite propuesto.**

3. $\lim_{x \to -2} \frac{x+2}{x^2-4}$

4. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$

5. $\lim_{x \to -2} \frac{x+1}{x^2+4x+3}$

6. $\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2+x-4}$

7. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{3x^2 + 2}{x^2 - 4}$

8. $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{2x^3 - 4x + 1}{x^3 - 3x + 2}$

9. $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{x + 1}{x^2 + 4x + 3}$

10. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - 2}{3x^2 + x - 6}$

11. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

12. $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$

13. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x - x}{x^3}$

14. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\tan x - x}{x^3}$

15. $\lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

16. $\lim_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x - 1}$

17. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x^3}{e^x}$

18. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{e^x}{x^4}$

19. $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$

20. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{e^x - 1}$

21. $\lim_{x \to 1} \dfrac{\operatorname{sen} \pi x}{x - 1}$

22. $\lim_{x \to 1} \dfrac{e^{x-1} - 1}{x^2 - 1}$

23. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{\ln x}{x^2}$

24. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

25. $\lim_{x \to \infty} x e^{-x}$

26. $\lim_{x \to \infty} x \operatorname{sen}(1/x)$

27. $\lim_{x \to 0} \dfrac{x \operatorname{sen} x}{\cos x - 1}$

28. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sec x - 1}{x^2}$

29. $\lim_{x \to 0^+} x \ln x$

30. $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}$

31. $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{\ln x}{\cot x}$

32. $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{\sqrt{x}}{\ln x}$

33. $\lim_{x \to \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$

34. $\lim_{x \to \infty} (\ln x - x)$

35. $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

36. $\lim_{x \to \infty} (1/x)^{1/x}$

37. $\lim_{x \to 0^+} \left(\ln x + \frac{1}{x}\right)$

38. $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)$

39. $\lim_{x \to 0^+} (1/x)^x$

40. $\lim_{x \to 0^+} (\cos x)^{1/x}$

**En los ejercicios 41 y 42, averiguar qué función «domina». Se dice que $f(x)$ domina a $g(x)$ para $x \to \infty$ si $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} g(x) = \infty$ y $\lim_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$ o $\lim_{x \to \infty} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 0$.**

41. $e^x$ o $x^n$ (con $n$ = cualquier entero positivo).

42. $\ln x$ o $x$.

**En los ejercicios 43 y 44, localizar los errores en los cálculos (incorrectos) propuestos.**

43. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \dfrac{-\operatorname{sen} x}{2x} = \lim_{x \to 0} \dfrac{-\cos x}{2} = -\dfrac{1}{2}$.

44. $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x^2} = \lim_{x \to 0} \dfrac{e^x}{2x} = \lim_{x \to 0} \dfrac{e^x}{2} = \dfrac{1}{2}$.

45. Probar que $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} kx^2}{x^2}$ es de la forma indeterminada $\dfrac{0}{0}$ y calcular el límite ($k$ es un número real).

46. Según el ejercicio 45, ¿cuál es el rango de valores que puede tener un límite de la forma indeterminada $\frac{0}{0}$?

47. Encontrar funciones $f(x)$ tales que $\lim_{x \to \infty} f(x)$ tenga la forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$ y ese límite (a) no existe, (b) es 0, (c) es 3, (d) es –4.

48. Hallar funciones $f(x)$ tales que $\lim_{x \to \infty} f(x)$ sea de la forma indeterminada $\infty - \infty$ y ese límite (a) no existe, (b) es 0, (c) es 2.

49. Un **cero** de una función $f(x)$ es cualquier solución de la ecuación $f(x) = 0$. No todos los ceros son de la misma clase. Por ejemplo, $x = 1$ es un cero de $f(x) = x - 1$, pero es claro que, en algún sentido, $x = 1$ debe contar como dos ceros de $f(x) = (x - 1)^2$. Para cuantificar esa diferencia, se dice que $x = 1$ es un **cero de multiplicidad** 2 de $f(x) = (x - 1)^2$. En general, se adopta esta definición precisa: $x = c$ es un **cero de multiplicidad $n$** de $f(x)$ si $f(c) = 0$ y $\lim_{x \to c} \dfrac{f(x)}{(x - c)^n}$ existe y es distinto de cero. Así, $x = 0$ es un cero de multiplicidad 2 de $x$ sen $x$, ya que $\lim_{x \to 0} \dfrac{x \operatorname{sen} x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$. Hallar la multiplicidad de cada uno de los ceros de estas funciones: $x^2$ sen $x$, $x$ sen $x^2$, $x^4$ sen $x^3$, $(x - 1) \ln x$, $\ln(x - 1)^2$, $e^x - 1$ y $\cos x - 1$.

## 7.7 INTEGRALES IMPROPIAS

### Integrales impropias con integrando discontinuo

Los hábitos de uso muy frecuente desembocan en la rutina. Esta observación viene a la medida al inicio de esta sección. Llevamos tiempo utilizando el teorema fundamental del Cálculo. ¿Ha comprobado en todas las ocasiones que se satisfacían sus hipótesis? Tal vez se

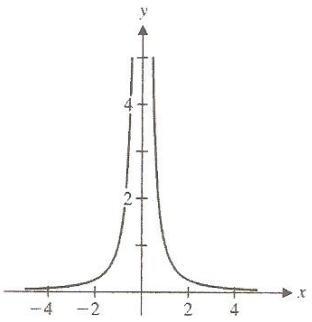



**Figura 7-12**

$y = \frac{1}{x^2}$.

esté preguntando: ¿qué hipótesis? Está bien, no vamos a obligarle a volver atrás, pero antes de darle la respuesta, veamos qué falla en este cálculo **erróneo**:

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{x^{-1}}{-1}\Bigg|_{-1}^{2} = -\frac{3}{2}. \qquad \text{¡Esto es incorrecto!}$$

Hay algo fundamentalmente falso en este «cálculo»: el integrando no es continuo en el intervalo de integración. (La figura 7.12 muestra la gráfica de $y = \frac{1}{x^2}$). Puesto que el teorema fundamental del Cálculo supone que el integrando es continuo, nuestra aplicación de ese teorema no es válida y la repuesta **no es correcta**. El integrando $\frac{1}{x^2}$ explota hacia $\infty$ en $x = 0$, que pertenece al intervalo en el que intentábamos integrar. De hecho, el integrando ni siquiera está definido (al menos en el sentido usual). Nótese además que el resultado $-\frac{3}{2}$ era muy sospechoso, porque el integrando $\frac{1}{x^2}$ es siempre positivo.

Recordemos que en el Capítulo 4 hemos definido la integral definida como

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x,$$

donde $c_i$ es cualquier punto del subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, para $i = 1, 2, \ldots, n$ y donde el límite ha de ser el mismo para toda elección de esos $c_i$. Así, pues, si $f(x) \to \infty$ [o si $f(x) \to -\infty$] en algún punto de $[a, b]$, el límite que define $\int_a^b f(x)\,dx$ no tiene sentido. [¿Cómo añadimos $f(c_i)$ a la suma si $c_i$ es el punto donde la función se hace infinita?]. Se dice que una integral así es una **integral impropia** y será preciso definir cuidadosamente qué entendemos por una tal integral. Para empezar, examinamos un ejemplo simple.

Consideremos $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$. **No** es una integral definida propia, ya que el integrando es discontinuo en $x = 1$. (Se hace infinito cuando $x \to 1^-$). La figura 7.13a muestra la gráfica de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ en el intervalo [0, 1]. ¿Cuánta área hay bajo la curva en el intervalo [0, 1]? El área podría ser infinita, pero supongamos, a efectos del argumento, que es finita. ¿Cómo podemos calcularla? Resulta difícil contestar. Una regla general en Matemáticas es que si no sabe resolver un problema, intente aproximar su solución. En la figura 7.13b vemos que, para $0 < R < 1$, podemos aproximar el área por $\int_0^R \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$. Ésta es una integral definida propia, porque $f(x)$ es continua en $0 \le x \le R < 1$. Además, cuanto más cercano al 1 sea $R$, mejor será la aproximación. En la tabla adjunta hemos calculado algunos valores aproxima-

| $R$ | $\int_0^R \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$ |
|---|---|
| 0,9 | 1,367544 |
| 0,99 | 1,8 |
| 0,999 | 1,936754 |
| 0,9999 | 1,98 |
| 0,99999 | 1,993675 |
| 0,999999 | 1,998 |
| 0,9999999 | 1,999368 |
| 0,99999999 | 1,9998 |

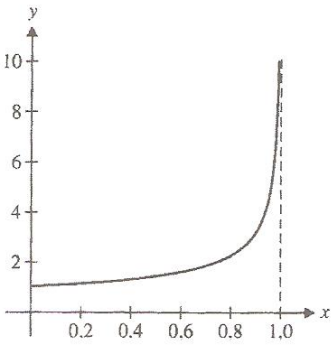



**Figura 7.13a**

$y = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$.

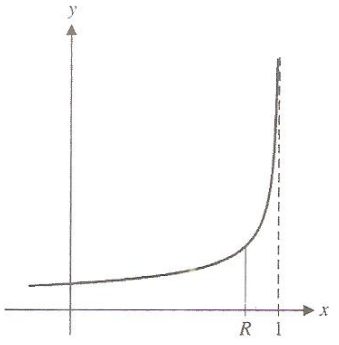



**Figura 7.13b**

$\int_0^R f(t)\,dt$.

dos de $\int_0^R \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$ para una secuencia de valores de $R$ que se van acercando a 1. Aunque se puede calcular cada una de estas integrales exactamente, hemos usado un PCS. (Puede comprobar los resultados con la regla de Simpson, pero tenga en cuenta que al acercar $R$ a 1 el número de puntos a considerar va creciendo).

La tabla indica que las integrales tienden a 2 cuando $R \to 1^-$. Como sabemos calcular $\int_0^R \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$, para cualquier $0 < R < 1$, podemos evaluar ese límite exactamente. Se tiene

$$\lim_{R\to 1^-} \int_0^R \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = \lim_{R\to 1^-} \left[-2(1-x)^{1/2}\right]_0^R$$

$$= \lim_{R\to 1^-} \left[-2(1-R)^{1/2} + 2(1-0)^{1/2}\right] = 2.$$

Concluimos que el área bajo la curva es 2.

En general, sea $f$ continua en el intervalo $[a, b)$ y que $|f(x)| \to \infty$, cuando $x \to b^-$ (o sea, cuando $x$ tiende a $b$ por la izquierda). Podemos aproximar $\int_a^b f(x)\,dx$ por $\int_a^R f(x)\,dx$, para algún $R < b$, pero próximo a $b$. [Recordemos que al ser $f$ continua en $[a, R]$, para todo $a < R < b$, $\int_a^R f(x)\,dx$ está definida]. Además, como en el ejemplo introductorio, cuanto más cerca de $b$ se tome $R$, mejor tiende a ser la aproximación (figura 7.14).

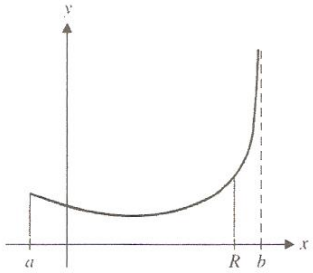



**Figura 7.14**
$\int_a^R f(t)\,dt$.

Finalmente, hagamos $R \to b^-$; si $\int_a^R f(x)\,dx$ tiende a algún número $L$, definimos el valor de la **integral impropia** $\int_a^b f(x)\,dx$ como $L$.

---

**Definición 7.1**

Si $f$ es continua en el intervalo $[a, b)$ y $|f(x)| \to \infty$, cuando $x \to b^-$, definimos la integral impropia de $f$ en $[a, b]$ como

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{R\to b^-} \int_a^R f(x)\,dx.$$

Si el límite existe (con valor $L$), decimos que la integral impropia es **convergente** (converge a $L$). Si el límite no existe, decimos que la integral impropia es **divergente**.

---

**Ejemplo 7.1** **Un integrando que se hace infinito en el extremo de la derecha**

Investigar si $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$ es convergente o divergente.

**Solución** Por lo visto hasta ahora,

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = \lim_{R\to 1^-} \int_0^R \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = 2$$

En consecuencia, la integral impropia dada converge a 2.

---

El ejemplo siguiente ilustra una integral impropia divergente muy parecida a la considerada como introducción al inicio de esta sección.

**Ejemplo 7.2** **Una integral impropia divergente**

Analizar si la integral impropia $\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2}\,dx$ es convergente o divergente.

**Solución** Por la definición 7.1,

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{R\to 0^-} \int_{-1}^{R} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{R\to 0^-} \left(\frac{x^{-1}}{-1}\right)_{-1}^{R}$$

$$= \lim_{R\to 0^-} \left(-\frac{1}{R} - \frac{1}{1}\right) = \infty.$$

Dado que el límite que la define no existe, esa integral impropia es divergente.

Análogamente, deseamos interpretar $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$. Esta integral también es impropia, ya que $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \to \infty$ cuando $x \to 0^+$. La cuestión es esencialmente la misma de antes: ¿el área bajo la curva en el intervalo (0, 1] es finita o infinita? (La figura 7.15 muestra la gráfica del integrando). Supuesto que el área sea finita, podemos aproximar su valor mediante $\int_R^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$, con algún $0 < R < 1$. [Como $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ es continua en $[R, 1]$, para cualquier $0 < R < 1$, ésta es una integral definida propia]. En la tabla hemos anotado varios valores aproximados para una secuencia de valores de $R \to 0^+$. (Los hemos calculado con un PCS, pero puede hallarlos con la regla de Simpson, aumentando el número de puntos conforme $R \to 0^+$).

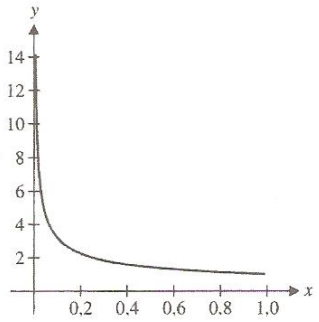



**Figura 7.15**

$y = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

| $R$ | $\int_R^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ |
|---|---|
| 0,1 | 1,367544 |
| 0,01 | 1,8 |
| 0,001 | 1,936754 |
| 0,0001 | 1,98 |
| 0,00001 | 1,993675 |
| 0,000001 | 1,998 |
| 0,0000001 | 1,999368 |
| 0,00000001 | 1,9998 |

Los valores de la tabla parecen indicar que las integrales tienden a 2 cuando $R \to 0^+$. Dado que conocemos una primitiva del integrando, podemos calcularlas exactamente, para cualquier $0 < R < 1$ fijo. Se tiene

$$\lim_{R\to 0^+} \int_R^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{R\to 0^+} \left.\frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}}\right|_R^1 = \lim_{R\to 0^+} 2(1^{1/2} - R^{1/2}) = 2.$$

De nuevo, estos cálculos indican que el área bajo la curva es 2.

En general, supongamos que $f$ es continua en $(a, b]$ y $|f(x)| \to \infty$, cuando $x \to a^+$ (o sea, cuando $x$ tiende hacia $a$ por la derecha). Para todo $R \in (a, b)$, $f$ es continua en $[R, b]$, luego $\int_R^b f(x)\,dx$ está definida. Si al hacer $R \to a^+$, $\int_R^b f(x)\,dx$ tiende a algún número $L$, definimos $L$ como el valor de la **integral impropia** $\int_a^b f(x)\,dx$.

**Definición 7.2**

Si $f$ es continua en el intervalo $(a, b]$ y $|f(x)| \to \infty$, cuando $x \to a^+$, definimos

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{R\to a^+} \int_R^b f(x)\,dx$$

Igual que antes, si el límite existe (con valor $L$), diremos que la integral impropia es **convergente** (converge a $L$). Si el límite no existe, diremos que la integral impropia es **divergente**.

**Ejemplo 7.3** **Una integral impropia convergente**

Averiguar si la integral impropia $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ es convergente o divergente.

**Solución** Según nuestros cálculos previos,

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{R\to 0^+} \int_R^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2,$$

luego la integral impropia converge a 2.

**Notas históricas**

**Pierre Simon Laplace (1749-1827).** Matemático francés que utilizó las integrales impropias para desarrollar la transformación que lleva su nombre y otras importantes técnicas matemáticas. Contribuyó, entre otros campos, a la Teoría de probabilidades, a la Mecánica celeste y a la Teoría del calor. Adepto a las intrigas políticas, Laplace elaboró un calendario nuevo para la Revolución francesa, fue consejero de Napoleón y fue nombrado marqués por los Borbones.

**Ejemplo 7.4** **Una integral impropia divergente**

Investigar si la integral impropia $\int_1^2 \frac{1}{x-1}\,dx$ es convergente o divergente.

**Solución** Por la definición 7.2 se tiene

$$\int_1^2 \frac{1}{x-1}\,dx = \lim_{R\to 1^+} \int_R^2 \frac{1}{x-1}\,dx = \lim_{R\to 1^+} \ln|x-1|\Big|_R^2$$

$$= \lim_{R\to 1^+} [\ln|2-1| - \ln|R-1|] = \infty,$$

luego la integral impropia es divergente.

El ejemplo introductorio de esta sección representa un tercer tipo de integral impropia, en las que el integrando se hace infinito en un punto interior del intervalo $(a, b)$. Se definen como sigue.

**Definición 7.3**

Vamos a suponer que $f$ es continua en el intervalo $[a, b]$, excepto en algún $c \in (a, b)$, y que $|f(x)| \to \infty$ cuando $x \to c$. La integral de $f$ sobre $[a, b]$ es **impropia** y escribiremos

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Si $\int_a^c f(x)\,dx$ y $\int_c^b f(x)\,dx$ convergen **ambas** (a $L_1$ y $L_2$, respectivamente), diremos que la integral impropia $\int_a^b f(x)\,dx$ es **convergente** (converge a $L_1 + L_2$). Si **al menos una** de las integrales $\int_a^c f(x)\,dx$ o $\int_c^b f(x)\,dx$ diverge, diremos que la integral impropia $\int_a^b f(x)\,dx$ es **divergente**.

Podemos regresar ahora al ejemplo introductorio.

**Ejemplo 7.5** **Un integrando que se hace infinito en el interior del intervalo**

Analizar si la integral impropia $\int_{-1}^2 \frac{1}{x^2}\,dx$ es convergente o divergente.

**Solución** Por la definición 7.3,

$$\int_{-1}^2 \frac{1}{x^2}\,dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{x^2}\,dx + \int_0^2 \frac{1}{x^2}\,dx.$$

En el ejemplo 7.2 vimos que $\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2}\,dx$ diverge. Así, pues, $\int_{-1}^2 \frac{1}{x^2}\,dx$ también es divergente.

Nótese que no hemos tenido necesidad de considerar $\int_0^2 \frac{1}{x^2}\,dx$ (aunque es fácil demostrar que diverge también). No lo olvide: en cuanto una de las dos integrales impropias en las que se descompone este tipo de integrales impropias es divergente, la integral propuesta es divergente.

## Integrales impropias con un límite de integración infinito

Otro tipo de integrales impropias frecuentes en las aplicaciones lo constituyen aquellas en las que al menos uno de los límites de integración es infinito. Por ejemplo, $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ es de importancia **fundamental** en Teoría de probabilidades y Estadística.

Pues bien, dada una función continua $f$, definida en $[a, \infty)$, ¿qué se entiende por $\int_a^\infty f(x)\,dx$? Volvemos a recordar que la integral definida se definió como

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x,$$

donde $c_i$ es cualquier punto del subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, para $i = 1, 2, \ldots, n$ y $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$. Si sustituimos $b$ por $\infty$, esta definición no tiene sentido. (¿Qué significa multiplicar por $\dfrac{\infty - a}{n}$?). Igual que para las integrales impropias con integrando discontinuo, puesto que la definición carece de sentido, el teorema fundamental del Cálculo y otros resultados no son aplicables. Hemos de definir $\int_a^\infty f(x)\,dx$ de algún modo que sea consistente con cuanto sabemos acerca de las integrales.

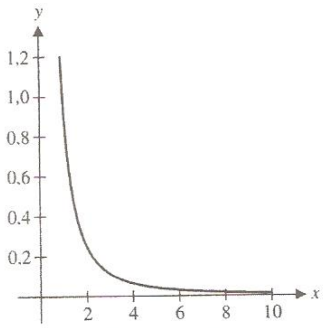



**Figura 7.16**
$y = \dfrac{1}{x^2}$.

En primer lugar, pensemos qué significado podemos asignar a $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$. Como $f(x) = \frac{1}{x^2}$ es positiva y continua en $[1, \infty)$, esa integral debe representar el área bajo la curva (supuesto que el área sea finita). En la figura 7.16, que muestra la gráfica de $y = \frac{1}{x^2}$, parece plausible que el área bajo esta curva sea finita.

Dando por supuesto que el área es finita, ¿cómo podemos aproximarla? Una aproximación razonable sería $\int_1^R \frac{1}{x^2}\,dx$, para algún valor grande de $R$. (Ésta es una integral definida propia, ya que $R$ es finito). La tabla muestra valores de esa integral para valores crecientes de $R$.

| $R$ | $\int_1^R \dfrac{1}{x^2}\,dx$ |
|---|---|
| 10 | 0,9 |
| 100 | 0,99 |
| 1.000 | 0,999 |
| 10.000 | 0,9999 |
| 100.000 | 0,99999 |
| 1.000.000 | 0,999999 |

Estas integrales aproximantes parecen tender hacia 1 cuando $R \to \infty$. En este caso podemos calcular el límite exactamente:

$$\lim_{R\to\infty} \int_1^R x^{-2}\,dx = \lim_{R\to\infty} \left.\frac{x^{-1}}{-1}\right|_1^R = \lim_{R\to\infty} \left(-\frac{1}{R} + 1\right) = 1.$$

Por tanto, el área bajo la curva en el intervalo $[1, \infty)$ es 1, a pesar de que el intervalo es infinito.

En general, se adopta la siguiente definición.

---

**Definición 7.4**

Si $f$ es continua en el intervalo $[a, \infty)$, definimos la **integral impropia** $\int_a^\infty f(x)\,dx$ como

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)\,dx.$$

Si el límite existe (con valor $L$), se dice que la integral impropia es **convergente** (converge a $L$). Si el límite no existe, se dice que la integral impropia es **divergente**.

---

**Ejemplo 7.6** **Una integral con un límite de integración infinito**

Determinar si la integral impropia $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ es convergente o divergente.

**Solución** Por lo que acabamos de ver,

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_1^R x^{-2}\,dx = 1,$$

así que la integral impropia dada converge a 1.

---

Quizá se haya apercibido de que para que $\int_a^\infty f(x)\,dx$ sea convergente, debe ocurrir que $f(x) \to 0$ cuando $x \to 0$. (Piense en ello en términos de área.) El recíproco **no** tiene por qué

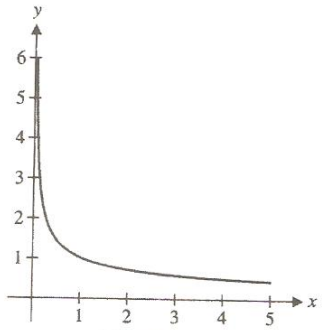



**Figura 7.17**

$y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

ser cierto. Es decir, puede suceder que $f(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$ y, no obstante, la integral impropia sea divergente, como en el ejemplo siguiente.

### Ejemplo 7.7 Una integral impropia divergente

Investigar si $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ es convergente o divergente.

**Solución** Nótese que $\frac{1}{\sqrt{x}} \to 0$ cuando $x \to \infty$. Además, en la figura 7.17 parece cuando menos plausible que el área bajo la curva es finita. Sin embargo, por la definición 7.4,

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_1^R x^{-1/2}\,dx = \lim_{R\to\infty}\left.\frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}}\right|_1^R = \lim_{R\to\infty}(2R^{1/2} - 2) = \infty.$$

Concluimos que la integral impropia propuesta es divergente.

En el próximo ejemplo, como sucede con frecuencia, es necesaria la regla de L'Hôpital para calcular el límite de la definición.

### Ejemplo 7.8 Una integral impropia convergente

Estudiar la convergencia de $\int_0^\infty xe^{-x}\,dx$.

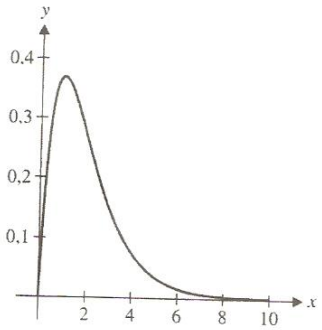



**Figura 7.18**

$y = xe^{-x}$.

**Solución** A juzgar por la gráfica de $y = xe^{-x}$ (figura 7.18), se diría que el área bajo la curva es finita. Por la definición 7.4,

$$\int_0^\infty xe^{-x}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_0^R xe^{-x}\,dx.$$

Para evaluar esta última integral, integramos por partes, con

$$\begin{array}{ll} u = x & dv = e^{-x}\,dx \\ du = dx & v = -e^{-x} \end{array}$$

Así, se obtiene

$$\int_0^\infty xe^{-x}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_0^R xe^{-x}\,dx = \lim_{R\to\infty}\left(-xe^{-x}\Big|_0^R + \int_0^R e^{-x}\,dx\right)$$

$$= \lim_{R\to\infty}\left[(-Re^{-R} + 0) - e^{-x}\Big|_0^R\right] = \lim_{R\to\infty}(-Re^{-R} - e^{-R} + e^0).$$

El límite $\lim_{R\to\infty} Re^{-R}$ es de la forma indeterminada $\infty \cdot 0$. Lo calculamos aplicando la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{R\to\infty} Re^{-R} = \lim_{R\to\infty}\frac{R}{e^R}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$= \lim_{R\to\infty}\frac{\frac{d}{dR}R}{\frac{d}{dR}e^R} = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{e^R} = 0. \qquad \text{Regla de L'Hôpital.}$$

De vuelta a la integral impropia, se tiene para ella

$$\int_0^\infty xe^{-x}\,dx = \lim_{R\to\infty}(-Re^{-R} - e^{-R} + e^0) = 0 - 0 + 1 = 1.$$

La siguiente definición es análoga a la definición 7.4.

**Definición 7.5**
Si $f$ es continua en $(-\infty, a]$, definimos la integral impropia

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{R \to -\infty} \int_{R}^{a} f(x)\,dx.$$

Como antes, decimos que la integral es **convergente** si el límite existe y **divergente** si no existe el límite.

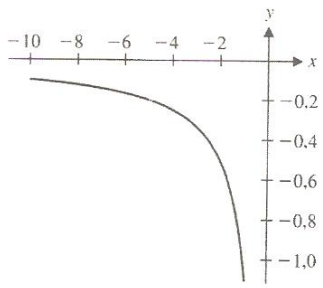



**Figura 7.19**
$y = \frac{1}{x}$.

**Ejemplo 7.9** **Una integral con límite inferior de integración infinito**

Determinar si $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x}\,dx$ es convergente o divergente.

**Solución** A la vista de la figura 7.19, no se puede descartar que el área acotada por la gráfica de $y = \frac{1}{x}$ y el eje $x$, en el intervalo $(-\infty, -1]$, es finita. Sin embargo, por la definición 7.5,

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{R \to -\infty} \int_{R}^{-1} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{R \to -\infty} \ln|x| \Big|_{R}^{-1} = \lim_{R \to -\infty} [\ln|-1| - \ln|R|] = -\infty$$

y, en consecuencia, la integral impropia es divergente.

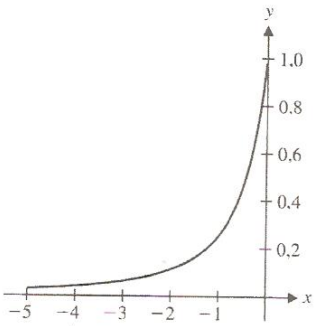



**Figura 7.20**
$y = \frac{1}{(x-1)^2}$.

**Ejemplo 7.10** **Una integral impropia convergente**

Averiguar si $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$ es convergente o divergente.

**Solución** A la vista de la figura 7.20, cabe esperar que la integral sea convergente. Por la definición 7.5,

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \lim_{R \to -\infty} \int_{R}^{0} (x-1)^{-2}\,dx = \lim_{R \to -\infty} \frac{(x-1)^{-1}}{-1} \Big|_{R}^{0}$$

$$= \lim_{R \to -\infty} \left[1 + \frac{1}{(R-1)}\right] = 1.$$

Por tanto, la integral impropia converge.

Un último tipo de integrales impropias, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$, se define a continuación.

**Definición 7.6**
Si $f$ es continua en $(-\infty, \infty)$, se define

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx, \quad \text{para cualquier constante } a.$$

Se dice que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ es convergente si, y sólo si, $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ y $\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$ convergen **ambas**. Si al menos una de éstas diverge, la integral impropia es divergente.

En la definición 7.6, $a$ es cualquir número real. Elegimos en cada ocasión algún valor conveniente (usualmente 0).

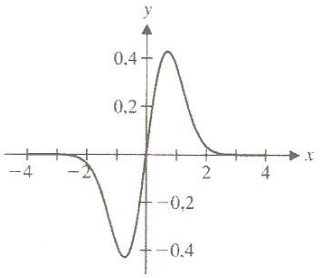



**Figura 7.21**
$y = xe^{-x^2}$.

### Ejemplo 7.11 Una integral con los dos límites de integración infinitos

Estudiar la convergencia de $\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}\,dx$.

**Solución** En la figura 7.21, la función tiende hacia 0 con relativa rapidez (tanto para $x \to \infty$ como para $x \to -\infty$), así que parece plausible que el área bajo la curva sea finita. De acuerdo con la definición 7.6, se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}\,dx + \int_{0}^{\infty} xe^{-x^2}\,dx. \tag{7.1}$$

Hemos de evaluar cada integral de la derecha por separado. En cuanto a la primera, es

$$\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}\,dx = \lim_{R \to -\infty} \int_{R}^{0} xe^{-x^2}\,dx.$$

Con $u = -x^2$, es $du = -2x\,dx$, así que, teniendo cuidado en cambiar adecuadamente los límites de integración para adaptarlos a la nueva variable, se tiene

$$\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2} \lim_{R \to -\infty} \int_{R}^{0} e^{-x^2}(-2x)\,dx = -\frac{1}{2} \lim_{R \to -\infty} \int_{-R^2}^{0} e^{u}\,du$$

$$= -\frac{1}{2} \lim_{R \to -\infty} e^{u}\Big|_{-R^2}^{0} = -\frac{1}{2} \lim_{R \to -\infty} (e^0 - e^{-R^2}) = -\frac{1}{2}.$$

Análogamente, para la segunda integral, se obtiene (complete los detalles)

$$\int_{0}^{\infty} xe^{-x^2}\,dx = \lim_{R \to \infty} \int_{0}^{R} xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2} \lim_{R \to \infty} e^{u}\Big|_{0}^{R^2} = -\frac{1}{2} \lim_{R \to \infty} (e^{-R^2} - e^0) = \frac{1}{2}.$$

Puesto que las dos integrales impropias anteriores convergen, de (7.1) se deduce que la integral impropia original es también convergente y converge a

$$\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}\,dx + \int_{0}^{\infty} xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0.$$

### Ejemplo 7.12 Una integral con los dos límites de integración infinitos

Estudiar la convergencia de $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x}\,dx$.

**Solución** Por la definición 7.6,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x}\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-x}\,dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x}\,dx.$$

Es fácil probar que $\int_{0}^{\infty} e^{-x}\,dx$ converge (lo dejamos como ejercicio). Sin embargo,

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-x}\,dx = \lim_{R \to -\infty} \int_{R}^{0} e^{-x}\,dx = \lim_{R \to -\infty} -e^{-x}\Big|_{R}^{0} = \lim_{R \to -\infty} (-e^0 + e^{-R}) = \infty.$$

Así, pues, $\int_{-\infty}^{0} e^{-x}\,dx$ diverge y, como consecuencia, $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x}\,dx$ es divergente, a pesar de que $\int_{0}^{\infty} e^{-x}\,dx$ es convergente.

No nos cansaremos de insistir en que hay que comprobar siempre la continuidad del integrando. El próximo ejemplo vuelve a dejar clara la importancia de ese aspecto.

### Advertencia

No escriba **jamás**

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx.$$

Es muy tentador escribirlo, sobre todo porque a menudo produce una respuesta correcta con la mitad de trabajo. Desgraciadamente, otras veces da respuestas incorrectas debido a que el límite de la derecha existe para ciertas integrales impropias divergentes. En los ejercicios estudiaremos más a fondo esta cuestión.

**Ejemplo 7.13** **Una integral que es impropia por dos razones**

Analizar la convergencia o divergencia de la integral impropia $\int_0^\infty \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$.

**Solución** En primer lugar, intente adivinar la falacia en la siguiente igualdad incorrecta:

$$\int_0^\infty \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{1}{(x-1)^2}\,dx. \qquad \text{¡Esto es incorrecto!}$$

Observe que el integrando **no** es continuo en $[0, \infty)$. Se hace infinito en $x = 1$, que pertenece al intervalo de integración. Así, pues, la integral es impropia por varios motivos. Con el fin de soslayar la discontinuidad en $x = 1$, separamos la integral en dos, de acuerdo con la definición 7.3:

$$\int_0^\infty \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx + \int_1^\infty \frac{1}{(x-1)^2}\,dx.$$

La segunda integral de la derecha hay que romperla de nuevo porque tiene dos causas de impropiedad: el límite inferior de integración, donde es discontinua, y el límite superior, que es infinito. Podemos tomar para ello cualquier punto en $(1, \infty)$. Elegimos $x = 2$. Ahora se tiene

$$\int_0^\infty \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx + \int_1^2 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx + \int_2^\infty \frac{1}{(x-1)^2}\,dx.$$

Cada una de estas tres integrales impropias debe ser evaluada por separado, atendiendo a sus correspondientes definiciones como límites. Dejamos como ejercicio demostrar que las dos primeras son divergentes y la tercera convergente. Eso significa que la integral impropia original es divergente (una conclusión que podría haberse pasado por alto si no nos damos cuenta de que el integrando es discontinuo en $x = 1$).

## Un criterio de comparación

Hemos definido varios tipos de integrales impropias, cada uno de ellos como límite de integrales definidas propias. Para calcular ese límite, necesitamos una primitiva. Pero ¿y si no conocemos una primitiva? Por ejemplo, ¿cómo estudiar la convergencia de $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ dado que la función $e^{-x^2}$ no tiene primitiva elemental? (La pregunta es interesante, ya que esa integral es fundamental en Teoría de probabilidades y Estadística). Una respuesta viene dada por el resultado siguiente.

Dadas dos funciones $f$ y $g$ continuas en el intervalo $[a, \infty)$, supongamos que

$$0 \le f(x) \le g(x), \text{ para todo } x \ge a.$$

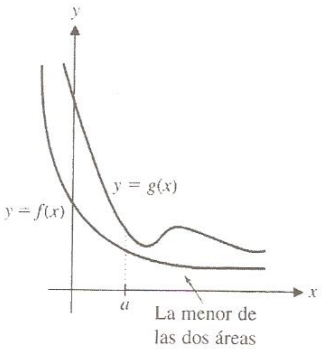



**Figura 7.22**
El criterio de comparación.

La figura 7.22 ilustra esta situación. En tales circunstancias, $\int_a^\infty f(x)\,dx$ y $\int_a^\infty g(x)\,dx$ corresponden a las áreas bajo las curvas respectivas. Si converge $\int_a^\infty g(x)\,dx$ (correspondiente al área mayor), eso significa que el área bajo la curva $y = g(x)$, en $[a, \infty)$, es finita. Como $y = f(x)$ está **por debajo** de $y = g(x)$, tiene que ser finita también, necesariamente, el área bajo la curva $y = f(x)$. [¡No puede ser infinita si $0 \le f(x) \le g(x)$ y $\int_a^\infty g(x)\,dx$ es finita!] Por consiguiente, $\int_a^\infty f(x)\,dx$ es convergente.

Por otra parte, si $\int_a^\infty f(x)\,dx$ (correspondiente al área menor) es divergente, el área bajo la curva $y = f(x)$ es infinita. Como $y = g(x)$ está **por encima** de $y = f(x)$, debe ser también infinita el área bajo la curva $y = g(x)$. Por tanto, $\int_a^\infty g(x)\,dx$ diverge. Esta comparación de integrales impropias, atendiendo al tamaño relativo de sus integrandos, se conoce como **criterio de comparación** (uno de tantos). Lo enunciamos en el teorema que sigue.

**Teorema 7.1 (Criterio de comparación)**
Sean $f$ y $g$ continuas en $[a, \infty]$ y $0 \le f(x) \le g(x)$ para todo $x \in [a, \infty)$.

(i) Si $\int_a^\infty g(x)\,dx$ converge, entonces $\int_a^\infty f(x)\,dx$ converge.

(ii) Si $\int_a^\infty f(x)\,dx$ converge, entonces $\int_a^\infty g(x)\,dx$ diverge.

**Nota 7.1**

Se pueden enunciar criterios de comparación análogos para integrales impropias de la forma $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$, con $f$ continua, y para integrales que sean impropias debido a alguna discontinuidad del integrando.

Omitimos la demostración. Nos conformaremos con el argumento intuitivo ya expuesto.

La idea del criterio de comparación es comparar una integral impropia dada con otra ya analizada o más fácil de estudiar. Si gracias al criterio se llega a probar que la integral dada converge, se puede aproximar su valor numéricamente. Si, por el contrario, resulta ser divergente, no hay nada más que hacer.

**Ejemplo 7.14** **Aplicación del criterio de comparación a una integral impropia**

Investigar si es convergente o divergente la integral $\int_0^\infty \frac{1}{x + e^x}\,dx$

**Solución** No conocemos una primitiva de $\frac{1}{x + e^x}$, así que no podemos resolver la integral directamente. Ahora bien, para $x \ge 0$ (figura 7.23) es

$$0 \le \frac{1}{x + e^x} \le \frac{1}{e^x}$$

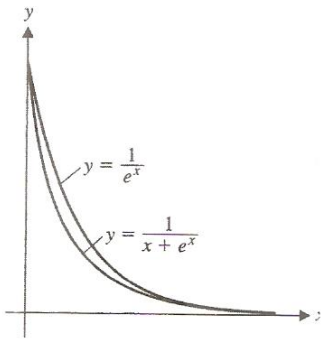



**Figura 7.23**
Comparación de $y = \frac{1}{e^x}$ con $y = \frac{1}{x + e^x}$.

Es fácil probar que $\int_0^\infty \frac{1}{e^x}\,dx$ converge a 1. Del teorema 7.1 se deduce que también $\int_0^\infty \frac{1}{x + e^x}\,dx$ converge. Pero ¿a qué valor converge? El criterio de comparación permite probar la convergencia de la integral, pero **no** ayuda a calcular su valor. Podemos recurrir a la integración numérica (o a la regla de Simpson) y aproximar $\int_0^R \frac{1}{x + e^x}\,dx$ para unos cuantos valores de $R$. La tabla muestra valores aproximados de $\int_0^R \frac{1}{x + e^x}\,dx$ obtenidos con un PCS. [Si usa la regla de Simpson, tendrá que ir aumentando el número $n$ de subintervalos en la partición conforme $R$ crece.] Nótese que cuando $R$ se hace más y más grande, las aproximaciones parecen tender hacia 0,8063956, por lo que adoptamos este número como valor estimado de la integral:

| $R$ | $\int_0^R \frac{1}{x + e^x}\,dx$ |
|---|---|
| 10 | 0,8063502 |
| 20 | 0,8063956 |
| 30 | 0,8063956 |
| 40 | 0,8063956 |

$$\int_0^\infty \frac{1}{x + e^x}\,dx \approx 0{,}8063956.$$

Calcule aproximaciones con valores mayores de $R$ para convencerse de que esa estimación es muy precisa.

En el ejemplo que sigue examinamos una integral con importantes aplicaciones en Teoría de probabilidades y en Estadística.

**Ejemplo 7.15** **Aplicación del criterio de comparación a una integral impropia**

Determinar si la integral $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ es convergente o divergente.

**Solución** Tampoco en esta ocasión disponemos de una primitiva del integrando $e^{-x^2}$. No obstante, observamos que para $x > 1$, $e^{-x^2} < e^{-x}$. (Dibuje la gráfica de ambas funciones y haga algunos cálculos para comprobar que eso es cierto). La integral se puede reescribir como

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx + \int_1^\infty e^{-x^2}\,dx.$$

En el miembro de la derecha, la primera integral es propia y la segunda impropia. Es fácil demostrar que $\int_1^\infty e^{-x}\,dx$ converge. Del criterio de comparación concluimos que también $\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$ converge. Dejamos como ejercicio verificar que

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx + \int_1^\infty e^{-x^2}\,dx \approx 0{,}8862269.$$

Usando técnicas de integración más avanzadas, se demuestra un resultado sorprendente: $\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

---

El criterio de comparación facilita la demostración de que una integral impropia dada es divergente.

### Ejemplo 7.16 Aplicación del criterio de comparación a una integral divergente

Analizar si es convergente la integral $\int_1^\infty \frac{2 + \operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}\,dx$.

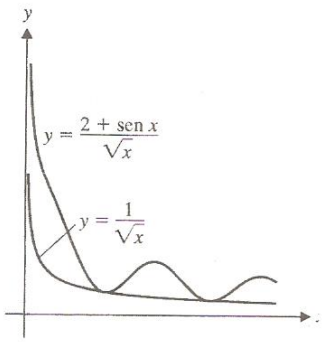



**Figura 7.24**

Comparación de $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ con $y = \frac{2 + \operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}$.

**Solución** Tal como ocurría en los ejemplos 7.14 y 7.15, no conocemos una primitiva del integrando. Nuestra única esperanza para decidir si la integral es convergente o no es el criterio de comparación. En primer lugar, recordemos que

$$-1 \le \operatorname{sen} x \le 1, \text{ para todo } x.$$

Por tanto,

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2-1}{\sqrt{x}} \le \frac{2 + \operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}, \text{ para } 1 \le x < \infty.$$

(La figura 7.24 muestra las gráficas de las dos funciones). En el ejemplo 7.7 demostramos que $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ diverge. El criterio de comparación nos asegura ahora que $\int_1^\infty \frac{2 + \operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}\,dx$ debe ser también divergente.

---

La gran cuestión es, claro está, cómo encontrar una serie impropia con la que comparar la que nos interesa. Mire atentamente el integrando para ver si se le ocurren funciones parecidas de primitiva conocida (o calculable con las técnicas de integración que ha ido aprendiendo). Aparte de eso, sólo queda confiar en la experiencia. Las comparaciones se consiguen a base de codos. Los ejercicios de esta sección le permitirán adquirir habilidad en esta tarea. Sea tenaz cuando intente una comparación. No debe darse por vencido a las primeras de cambio.

---

# EJERCICIOS 7.7

1. A muchos estudiantes les parecerá excesivamente puntillosa nuestra insistencia en recurrir a la definición de las integrales impropias en términos de límites. Explicar, mediante ejemplos de esta sección, por qué es importante formular y usar definiciones precisas.

2. Discutir si la siguiente afirmación es verdadera o falsa (o sea, no siempre cierta) y explicar la razón: Si el integrando $f(x) \to \infty$ cuando $x \to a^+$ o $x \to b^-$ el área $\int_a^b f(x)\,dx$ es infinita; esto es, $\int_a^b f(x)\,dx$ diverge.

**En los ejercicios 3-10, discutir si la integral es impropia o no.**

3. $\int_0^2 x^{-2/5}\,dx$
4. $\int_1^2 x^{-2/5}\,dx$
5. $\int_0^2 x^{2/5}\,dx$
6. $\int_0^\infty x^{2/5}\,dx$
7. $\int_{-2}^2 \frac{3}{x}\,dx$
8. $\int_{-2}^{-1} \frac{3}{x}\,dx$
9. $\int_2^\infty \frac{3}{x}\,dx$
10. $\int_{-\infty}^{-1} \frac{3}{x}\,dx$

**En los ejercicios 11-46, investigar si la integral es convergente. Calcular el valor de las que sean convergentes.**

11. $\int_0^1 x^{-1/3}\,dx$
12. $\int_0^1 x^{-4/5}\,dx$
13. $\int_0^1 x^{-4/3}\,dx$
14. $\int_0^1 x^{-6/5}\,dx$
15. $\int_1^\infty x^{-1/3}\,dx$
16. $\int_1^\infty x^{-4/5}\,dx$
17. $\int_1^\infty x^{-4/3}\,dx$
18. $\int_1^\infty x^{-6/5}\,dx$
19. $\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx$
20. $\int_5^{10} \frac{2}{\sqrt{x-5}}\,dx$
21. $\int_0^1 \ln x\,dx$
22. $\int_0^{\pi/2} \cot x\,dx$
23. $\int_0^3 \frac{2}{x^2-1}\,dx$
24. $\int_{-4}^4 \frac{2x}{x^2-1}\,dx$
25. $\int_0^\infty xe^x\,dx$
26. $\int_0^\infty xe^{-2x}\,dx$
27. $\int_{-\infty}^0 xe^x\,dx$
28. $\int_{-\infty}^0 xe^{-2x}\,dx$
29. $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$
30. $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$
31. $\int_{-\infty}^\infty e^{-2x}\,dx$
32. $\int_{-\infty}^\infty e^{3x}\,dx$
33. $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$
34. $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2-1}\,dx$
35. $\int_0^\pi \tan x\,dx$
36. $\int_0^\pi \sec^2 x\,dx$
37. $\int_0^2 \frac{x}{x^2-1}\,dx$
38. $\int_0^2 \frac{2}{x^2+1}\,dx$
39. $\int_0^1 \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$
40. $\int_0^1 \frac{2}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx$
41. $\int_0^\infty \frac{1}{(x-2)^2}\,dx$
42. $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{(x-2)^2}\,dx$
43. $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}}}\,dx$
44. $\int_0^\infty \tan x\,dx$
45. $\int_0^\infty \cos x\,dx$
46. $\int_0^\infty \cos x e^{-\operatorname{sen} x}\,dx$

47. A la vista de los ejercicios 11-14, conjeturar un valor de $r$ tal que $\int_0^1 x^{-n}\,dx$ sea convergente si, y sólo si, $n < r$.

48. A la vista de los ejercicios 15-18, conjeturar un valor de $r$ tal que $\int_1^\infty x^{-n}\,dx$ sea convergente si, y sólo si, $n > r$.

49. Atendiendo a los ejercicios 25-28, concluir que el término exponencial controla la convergencia o divergencia de $\int_0^\infty xe^{cx}\,dx$ y $\int_{-\infty}^0 xe^{cx}\,dx$. ¿Para qué valores de $c$ convergen estas integrales?

50. Al inicio de esta sección hemos dicho que el cálculo $\int_{-1}^2 \frac{1}{x^3}\,dx = \frac{-3}{2}$ es incorrecto. Sin efectuar cálculos, explicar por qué es inmediata esa conclusión a la vista del signo **negativo** del valor resultante.

**En los ejercicios 51-60, decidir, por una comparación apropiada, si la integral converge o diverge.**

51. $\int_1^\infty \frac{x}{1+x^3}\,dx$
52. $\int_1^\infty \frac{x^2-2}{x^4+3}\,dx$
53. $\int_2^\infty \frac{x}{x^{3/2}-1}\,dx$
54. $\int_1^\infty \frac{2+\sec^2 x}{x}\,dx$
55. $\int_0^\infty \frac{3}{x+e^x}\,dx$
56. $\int_1^\infty e^{-x^3}\,dx$
57. $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+e^x}\,dx$
58. $\int_2^\infty \frac{\ln x}{e^x+1}\,dx$
59. $\int_2^\infty \frac{x^2e^x}{\ln x}\,dx$
60. $\int_1^\infty e^{x^2+x+1}\,dx$

**En los ejercicios 61 y 62, integrar por partes y aplicar la regla de L'Hôpital.**

61. $\int_0^1 x \ln 4x \, dx$

62. $\int_0^\infty xe^{-2x} \, dx$

63. La superficie conocida como trompeta de Gabriel se genera haciendo girar la curva $y = 1/x$, para $x \geq 1$, en torno al eje $x$. Probar que su volumen es finito (es decir, la integral converge), pero que su superficie es infinita (la integral diverge). Resulta paradójico que pueda llenarse su volumen con una cantidad finita de pintura, mientras que para pintar su superficie exterior haría falta una cantidad infinita de pintura.

64. Demostrar que $\int_{-\infty}^{\infty} x^3 \, dx$ diverge, pero $\lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} x^3 \, dx = 0$.

65. En el ejemplo 7.11, probar que $\int_{-R}^{R} xe^{-x^2} \, dx = 0$, para todo $R \geq 0$.

66. Discutir si es verdadera o falsa la igualdad

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx = \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} f(x) \, dx.$$

Razonar la respuesta.

67. Una función $f(x) \geq 0$ es una función densidad de probabilidad (fdp) si $\int_0^\infty f(x) \, dx = 1$. Hallar el valor de $k$ que hace de cada una de las funciones siguientes una fdp en el intervalo $[0, \infty)$.

(a) $ke^{-2x}$ (b) $ke^{-4x}$ (c) $ke^{-rx}$

68. Hallar el valor de la constante $k$ que hace de cada una de las funciones siguientes una fdp en el intervalo $[0, \infty)$.

(a) $kxe^{-2x}$ (b) $kxe^{-4x}$ (c) $kxe^{-rx}$

69. La **media** $\mu$ (una medida del promedio) de una variable aleatoria con fdp $f(x)$ en el intervalo $[0, \infty)$ viene dada por $\mu = \int_0^\infty xf(x) \, dx$. Calcular la media si $f(x) = re^{-rx}$.

70. Hallar la media de una variable aleatoria con fdp $f(x) = r^2xe^{-rx}$.

71. Para la media $\mu$ del ejercicio 69, calcular la probabilidad de que la variable aleatoria sea mayor que $\mu$. Esa probabilidad viene dada por $\int_\mu^\infty re^{-rx} \, dx$. ¿Le parece raro que esta probabilidad no sea 1/2?

72. Calcular la **mediana** (otra medida del promedio) para una variable aleatoria con fdp $re^{-rx}$ en $x \geq 0$. La mediana es la marca del 50% en la probabilidad, o sea, el valor $m$ para el cual

$$\int_m^\infty re^{-rx} \, dx = 1/2.$$

73. La llamada **integral de Boltzmann**,

$$I(p) = \int_0^1 p(x) \ln p(x) \, dx$$

es importante en una disciplina matemática denominada **Teoría de la información**. Aquí, $p(x)$ es una fdp en el intervalo $[0, 1]$. Representar las fdp

$$p_1(x) = 1$$

y

$$p_2(x) = \begin{cases} 4x & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2 \\ 4 - 4x & \text{si } 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

y calcular $\int_0^1 p_1(x) \, dx$ y $\int_0^1 p_2(x) \, dx$ para verificar que son fdp. A continuación, calcular las integrales de Boltzmann $I(p_1)$, $I(p_2)$. Supongamos que queremos hallar el valor de una cantidad que está entre 0 y 1. Si su fdp es $p_1(x)$, todos los valores son igualmente probables. ¿Y si la fdp es $p_2(x)$? Observando que $I(p_2) > I(p_1)$, explicar por qué es razonable decir que la integral de Boltzmann mide la cantidad de *información* disponible. Según esta interpretación, esbozar una fdp $p_3(x)$ que tenga integral de Boltzmann mayor que $p_2(x)$.

74. La **transformación de Laplace** es un instrumento muy valioso en el campo de la Ingeniería. Como su nombre indica, transforma una función $f(t)$ dada en otra función $F(s)$, definida por

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st} \, dt.$$

Para hallar la transformada de Laplace de $f(t) = 1$, calcule

$$\int_0^\infty (1)e^{-st} \, dt = \int_0^\infty e^{-st} \, dt.$$

Demuestre que el valor de la integral es $1/s$. Escribimos $L\{1\} = 1/s$. Compruebe que

$$L\{t\} = \int_0^\infty te^{-st} \, dt = \frac{1}{s^2},$$

para $s > 0$. Calcule $L\{t^2\}$ y $L\{t^3\}$ y conjeture la fórmula general para $L\{t^n\}$. A continuación, halle $L\{e^{at}\}$ para $s > a$.

# EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO

**En los ejercicios 1-44, hallar la integral propuesta.**

1. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx$

2. $\int \frac{\operatorname{sen}(1/x)}{x^2} \, dx$

3. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx$

4. $\int \frac{2}{\sqrt{9 - x^2}} \, dx$

5. $\int x^2e^{-3x} \, dx$

6. $\int x^2e^{-x^3} \, dx$

7. $\int \frac{x}{1 + x^4} \, dx$

8. $\int \frac{x^3}{1 + x^4} \, dx$

9. $\int \frac{x^3}{4 + x^4} \, dx$

10. $\int \frac{x}{4 + x^4} \, dx$

11. $\int e^{2 \ln x}\, dx$
12. $\int \cos 4x\, dx$
13. $\int_0^1 x \operatorname{sen} 3x\, dx$
14. $\int_0^1 x \operatorname{sen} 4x^2\, dx$
15. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^4 x\, dx$
16. $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x\, dx$
17. $\int_{-1}^1 x \operatorname{sen} \pi x\, dx$
18. $\int_0^1 x^2 \cos \pi x\, dx$
19. $\int_1^2 x^3 \ln x\, dx$
20. $\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen} x \cos x\, dx$
21. $\int \cos x \operatorname{sen}^2 x\, dx$
22. $\int \cos x \operatorname{sen}^3 x\, dx$
23. $\int \cos^3 x \operatorname{sen}^3 x\, dx$
24. $\int \cos^4 x \operatorname{sen}^3 x\, dx$
25. $\int \tan^2 x \sec^4 x\, dx$
26. $\int \tan^3 x \sec^2 x\, dx$
27. $\int \sqrt{\operatorname{sen} x} \cos^3 x\, dx$
28. $\int \tan^3 x \sec^3 x\, dx$
29. $\int \frac{2}{8 + 4x + x^2}\, dx$
30. $\int \frac{3}{\sqrt{-2x - x^2}}\, dx$
31. $\int \frac{2}{x^2 \sqrt{4 - x^2}}\, dx$
32. $\int \frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}\, dx$
33. $\int \frac{x^3}{\sqrt{9 - x^2}}\, dx$
34. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - 9}}\, dx$
35. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 9}}\, dx$
36. $\int \frac{4}{\sqrt{x + 9}}\, dx$
37. $\int \frac{x + 4}{x^2 + 3x + 2}\, dx$
38. $\int \frac{5x + 6}{x^2 + x - 12}\, dx$
39. $\int \frac{4x^2 + 6x - 12}{x^3 - 4x}\, dx$
40. $\int \frac{5x^2 + 2}{x^3 + x}\, dx$
41. $\int e^x \cos 2x\, dx$
42. $\int x^3 \operatorname{sen} x^2\, dx$
43. $\int x \sqrt{x^2 + 1}\, dx$
44. $\int \sqrt{1 - x^2}\, dx$

**En los ejercicios 45-50, hallar la descomposición en fracciones simples.**

45. $\frac{4}{x^2 - 3x - 4}$
46. $\frac{2x}{x^2 + x - 6}$
47. $\frac{-6}{x^3 + x^2 - 2x}$
48. $\frac{x^2 - 2x - 2}{x^3 + x}$
49. $\frac{x - 2}{x^2 + 4x + 4}$
50. $\frac{x^2 - 2}{(x^2 + 1)^2}$

**En los ejercicios 51-60, hallar la integral usando la tabla de integrales.**

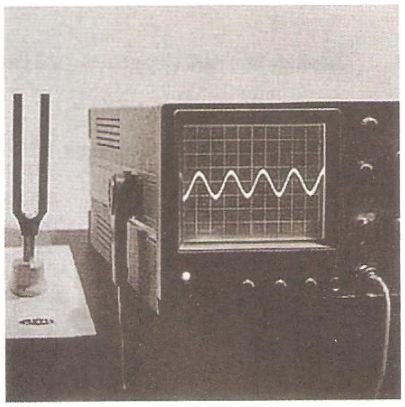
51. $\int e^{3x} \sqrt{4 + e^{2x}}\, dx$
52. $\int x \sqrt{x^4 - 4}\, dx$
53. $\int \sec^4 x\, dx$
54. $\int \tan^5 x\, dx$
55. $\int \frac{4}{x(3 - x)^2}\, dx$
56. $\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x(3 + 4 \operatorname{sen} x)}\, dx$
57. $\int \frac{\sqrt{9 + 4x^2}}{x^2}\, dx$
58. $\int \frac{x^2}{\sqrt{4 - 9x^2}}\, dx$
59. $\int \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x}\, dx$
60. $\int \frac{x^2}{(x^6 - 4)^{3/2}}\, dx$

**En los ejercicios 61-68, calcular el límite.**

61. $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$
62. $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2 + 3x}$
63. $\lim_{x \to \infty} \frac{e^{2x}}{x^4 + 2}$
64. $\lim_{x \to \infty} (x^2 e^{-3x})$
65. $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x$
66. $\lim_{x \to 0} \frac{\ln x^2}{x}$
67. $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x}$
68. $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - x}{x^3}$

**En los ejercicios 69-76, determinar si la integral es convergente o divergente. Calcular el valor de las que sean convergentes.**

69. $\int_0^1 \frac{x}{x^2 - 1}\, dx$
70. $\int_4^{10} \frac{2}{\sqrt{x - 4}}\, dx$
71. $\int_1^\infty \frac{3}{x^2}\, dx$
72. $\int_1^\infty x e^{-3x}\, dx$
73. $\int_0^\infty \frac{4}{4 + x^2}\, dx$
74. $\int_{-\infty}^\infty x e^{-x^2}\, dx$
75. $\int_{-2}^2 \frac{3}{x^2}\, dx$
76. $\int_{-2}^2 \frac{x}{1 - x^2}\, dx$



# CAPÍTULO 8

# SERIES

Ya hemos desarrollado los tres conceptos principales del Cálculo: límite, derivada e integral definida, estos dos últimos en términos de límites. En este capítulo estudiaremos el concepto de **serie** (o **suma infinita**), definido también en términos de límites (¿de qué si no?). A diferencia de la derivada y la integral, motivadas por el cálculo de velocidad y área, respectivamente, no hay motivación física inmediata para las series. Sin embargo, son esenciales en innumerables e importantes aplicaciones.

Sin duda, habrá escuchado música en un CD y habrá ajustado los controles de graves y agudos hasta conseguir un sonido fiel. Aunque su objetivo se reduzca a lograr unos graves más profundos o unos agudos más brillantes, tal vez le interese saber que hay mucha Física y mucho esfuerzo de Ingeniería en el diseño de un equipo de música. Lo que escuchamos en el rasgueo de una guitarra o en la melancolía de un saxofón es una combinación precisa de sonidos de muy diversas frecuencias. Los modernos sintetizadores son esencialmente ordenadores diseñados con el fin específico de reproducir complejas ondas musicales con la máxima fidelidad. Sus ajustes modifican la combinación de vibraciones de altas y bajas frecuencias con las que los altavoces reproducen el sonido.

El problema matemático que exploramos en este capítulo guarda una estrecha relación con ese problema musical. Deseamos encontrar una combinación de elementos básicos (en este caso, ciertas funciones simples) que produzcan el resultado apetecido. Es un problema práctico: necesitamos hacer cálculos con una lista infinita de funciones. Por desgracia, nuestra capacidad en ese terreno es muy limitada para funciones trascendentes (como sen $x$, cos $x$, ln $x$, $e^x$, etc.). De hecho, seamos sinceros: no sabemos evaluar estas funciones muy bien. Por ejemplo, ¿cómo calcularía sen(1,234567)? Sí, claro, una calculadora puede darnos una respuesta, pero ésa no es la cuestión. Para un polinomio, digamos

$$f(x) = 6x^4 - 15x^3 + 3x^2 + \frac{12}{7}x - 142,$$

podemos calcular el valor de $f(x)$ para cualquier $x$ sin más que efectuar las operaciones aritméticas que contiene. Pero no hay aritmética para calcular sen(1,234567). Entonces, ¿cómo se hace?

A lo largo de este capítulo pondremos en marcha la maquinaria matemática necesaria para calcular aproximaciones muy precisas de cualquier función trascendente. No es un problema trivial, como veremos, pero los beneficios que aportan las series son sustanciales. Entre otras aplicaciones, permiten hallar soluciones de ecuaciones diferenciales. La construcción de series (específicamente, series de potencias) significará una eclosión de nuevas funciones trascendentes. En efecto, muchas funciones relevantes en Física e Ingeniería (las funciones de Bessel, sin ir más lejos) se **definen** mediante series.

Los sintetizadores de música y la evaluación de funciones trascendentes son sólo dos de las abundantes aplicaciones de las series. En nuestro mundo de tecnología digital se encuentran estas nociones por doquier: televisión digital, fotografía digital, etc., y áreas tradiciona-

les de investigación científica como la holografía, la tomografía y la espectroscopia se apoyan en el concepto de serie. Aunque tardaremos seis secciones en introducir los instrumentos necesarios para la comprensión de las series, acompáñenos. Las aplicaciones de las tres últimas secciones (y de cursos posteriores) bien merecen ese esfuerzo.

## 8.1 SUCESIONES DE NÚMEROS REALES

El significado matemático de la palabra sucesión es semejante al que tiene en castellano. Por ejemplo, si se nos pide relatar la sucesión de acontecimientos que desembocaron en un accidente de tráfico no sólo hemos de hacer una lista de lo ocurrido, sino citarlos en **orden** cronológico. En Matemáticas, una sucesión es una colección infinita de números reales escritos en un orden específico.

Ya hemos encontrado sucesiones varias veces, aunque no hemos empleado ese nombre. Por ejemplo, hemos hallado soluciones aproximadas de ecuaciones no lineales, como $\operatorname{tg} x - x = 0$, partiendo de una estimación inicial $x_0$ y usando el método de Newton para ir calculando (una sucesión de) aproximaciones sucesivas $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$

**Definición de sucesión**

Se llama **sucesión** a cualquier función cuyo dominio es el conjunto de números enteros a partir de un cierto $n_0$ (con frecuencia, 0 o 1). Así, la función $a(n) = \frac{1}{n}$, con $n = 1, 2, 3, \ldots$, define la sucesión

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$$

Se dice que $\frac{1}{1}$ es el primer **término**, $\frac{1}{2}$ el segundo y así sucesivamente. Y se dice que $a(n) = \frac{1}{n}$ es el **término general**, ya que da una fórmula (general) para evaluar todos los términos de la sucesión. Además, es costumbre utilizar la notación de subíndices $a_n$ en lugar de la notación $a(n)$ de función.

### Ejemplo 1.1 Los términos de una sucesión

Escribir varios términos de la sucesión cuyo término general viene dado por $a_n = \frac{n+1}{n}$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$

**Solución** Los primeros términos son

$$a_1 = \frac{1+1}{1} = \frac{2}{1}, a_2 = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}, a_3 = \frac{4}{3}, a_4 = \frac{5}{4}, \ldots$$

Muchas veces usaremos notación de conjuntos para denotar una sucesión. Por ejemplo, la sucesión con término general $a_n = \frac{1}{n^2}$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$ se denota por

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{n^2}\right\}_{n=1}^{\infty},$$

o, equivalentemente, dando la lista de sus términos:

$$\left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \ldots, \frac{1}{n^2}, \ldots\right\}.$$

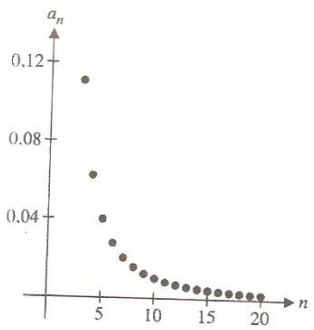



**Figura 8.1**

$a_n = \frac{1}{n^2}$.

Para representar esta sucesión, marcamos unos cuantos puntos (aislados, ya que una sucesión es una función cuyo dominio son sólo los números enteros), como en la figura 8.1. En ella se aprecia de forma clara una propiedad de la sucesión $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Cuando $n$ se hace cada

vez más grande, los términos $a_n = \dfrac{1}{n^2}$ de la sucesión tienden a cero. En este caso diremos que la sucesión **converge** a 0 y escribiremos

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} = 0.$$

En general, se dice que la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $L$ (en símbolos, $\lim_{n \to \infty} a_n = L$) si podemos hacer que $a_n$ esté tan cerca de $L$ como queramos sin más que tomar $n$ suficientemente grande. Nótese que esta frase imita la utilizada en la definición del límite

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

de una función de la variable $x$ (sección 1.5). La única diferencia es que $n$ sólo toma valores enteros, mientras que $x$ podría tomar cualquier valor real (entero, racional o irracional).

Al decir que podemos hacer que $a_n$ esté tan cerca de $L$ como queramos (o sea, arbitrariamente próximo), ¿cómo de cerca debe estar $a_n$ de $L$? Si tomamos un número real (pequeño) cualquiera, $\varepsilon > 0$, debe ser posible hacer que $a_n$ esté a una distancia de $L$ menor que $\varepsilon$, haciendo $n$ suficientemente grande. Piense en esto detenidamente: que $a_n$ dista de $L$ menos que $\varepsilon$ significa

$$L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon.$$

O lo que es equivalente,

$$-\varepsilon < a_n - L < \varepsilon, \quad \text{o sea,} \quad |a_n - L| < \varepsilon.$$

Precisamos esto en la siguiente definición.

---

**Definición 1.1**

La sucesión $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ **converge** a $L$ si, y sólo si, dado cualquier número $\varepsilon > 0$ (por pequeño que sea) existe un entero $N$ tal que

$$|a_n - L| < \varepsilon, \quad \text{para todo} \quad n > N.$$

En tal caso se dice que la sucesión es **convergente**. Si no existe tal número $L$, se dice que la sucesión es **divergente**.

---

Ilustramos la definición 1.1 en la figura 8.2. La definición afirma que la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $L$ si dado cualquier número $\varepsilon > 0$ existe un entero $N$ tal que los términos de la sucesión con índices $n > N$ están entre $L - \varepsilon$ y $L + \varepsilon$.

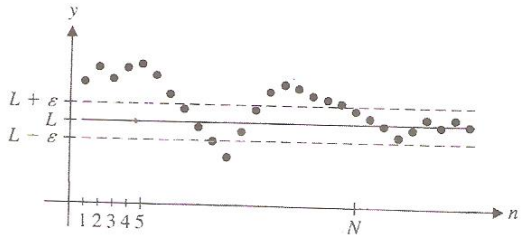



**Figura 8.2**

Convergencia de una sucesión.

El próximo ejemplo muestra cómo usar la definición 1.1 para demostrar que una sucesión es convergente.

**Ejemplo 1.2** **Demostración de la convergencia de una sucesión**

Usando la definición 1.1, probar que la sucesión $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ converge a 0.

**Solución** Tenemos que demostrar que podemos hacer $\frac{1}{n^2}$ tan cercano al 0 como se desee sin más que tomar $n$ suficientemente grande. Así, pues, dado $\varepsilon > 0$, hemos de encontrar un $N$ tal que para todo $n > N$ sea

$$\left|\frac{1}{n^2} - 0\right| < \varepsilon.$$

O lo que es lo mismo,

$$\frac{1}{n^2} < \varepsilon. \tag{1.1}$$

Como $n^2$ y $\varepsilon$ son positivos, dividiendo (1.1) entre $\varepsilon$ y multiplicando por $n^2$, se obtiene

$$\frac{1}{\varepsilon} < n^2.$$

Tomando la raíz cuadrada, resulta

$$\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} < n.$$

En consecuencia (puesto que cada uno de los pasos anteriores es reversible), si tomamos un entero $N$ con $N \geq \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$, entonces $n > N$ implica que $\frac{1}{n^2} < \varepsilon$, como queríamos.

La mayoría de las reglas usuales para el cálculo de límites de funciones de una variable real son aplicables a los límites de sucesiones, como se enuncia en el siguiente resultado.

**Teorema 1.1**
Si las sucesiones $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ son convergentes, entonces

(i) $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$

(ii) $\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$

(iii) $\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right)$

(iv) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$ (supuesto que $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$).

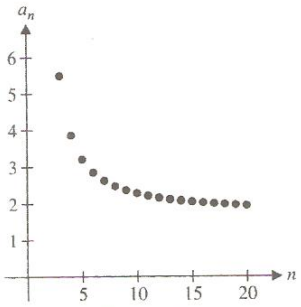



**Figura 8.3**

$a_n = \frac{5n + 7}{3n - 5}$.

Omitimos su demostración, casi idéntica a la del teorema 2.3 de la sección 1.2 relativo a límites de funciones (véase apéndice A).

**Nota 1.1**

Para hallar el límite de una sucesión hay que hacer casi lo mismo que para el límite de una función de una variable real. Recuerde simplemente que una sucesión **sólo** está definida para valores enteros de la variable.

**Advertencia**

Si en el ejemplo 1.3 aplica (incorrectamente) la regla de L'Hôpital, obtendrá la respuesta correcta. (Adelante, hágalo, ¡nadie le está mirando!). Por desgracia, no siempre será tan afortunado. Es como cruzar una autopista con los ojos cerrados. ¡No es prudente! El teorema 1.2 explica cómo usar adecuadamente la regla de L'Hôpital.

**Ejemplo 1.3** **Límite de una sucesión**

Calcular $\lim_{n\to\infty} \dfrac{5n+7}{3n-5}$.

**Solución** Es una forma indeterminada $\dfrac{\infty}{\infty}$. La figura 8.3 (página anterior) sugiere que la sucesión tiende a un límite cercano a 2. No podemos aplicar la regla de L'Hôpital aquí porque las funciones en el numerador y en el denominador no son continuas. (Sólo están definidas para valores enteros de $n$, aunque *podrían* definirse para todo valor real de $n$). Pero sí podemos recurrir a un método más simple: dividir numerador y denominador entre la potencia más alta de $n$ que aparece en el denominador. Se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n+7}{3n-5} = \lim_{n\to\infty} \frac{(5n+7)\left(\frac{1}{n}\right)}{(3n-5)\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{5+\frac{7}{n}}{3-\frac{5}{n}} = \frac{5}{3}.$$

La sucesión del ejemplo siguiente es divergente debido a que sus términos tienden a $+\infty$.

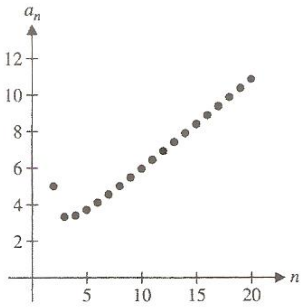



**Figura 8.4**

$a_n = \dfrac{n^2+1}{2n-3}$.

**Ejemplo 1.4** **Una sucesión divergente**

Evaluar $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^2+1}{2n-3}$.

**Solución** De nuevo estamos ante una forma indeterminada $\dfrac{\infty}{\infty}$, pero esta vez la figura 8.4 indica que la sucesión crece sin tope. Dividiendo numerador y denominador entre $n$ (la potencia más alta de $n$ en el denominador) obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{2n-3} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+1)\left(\frac{1}{n}\right)}{(2n-3)\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+\frac{1}{n}}{2-\frac{3}{n}} = \infty$$

y, por tanto, la sucesión $\left\{\dfrac{n^2+1}{2n-3}\right\}_{n=1}^{\infty}$ diverge.

En el próximo ejemplo vemos que una sucesión puede ser divergente sin que sus términos tiendan a $\pm\infty$.

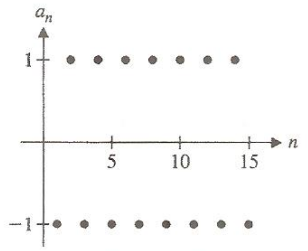



**Figura 8.5**

$a_n = (-1)^n$.

**Ejemplo 1.5** **Una sucesión divergente cuyos términos no tienden a $\infty$**

Analizar si es convergente o divergente la sucesión $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$.

**Solución** Los términos de esta sucesión son

$$\{-1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots\}.$$

Alternan entre 1 y $-1$. En consecuencia, la sucesión diverge. Para verlo gráficamente, representamos los primeros términos en la figura 8.5. Se aprecia claramente que los puntos no tienden hacia ningún límite (es decir, hacia una recta horizontal).

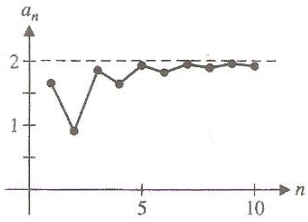



**Figura 8.6**

$a_n = f(n)$, donde $f(x) \to 2$, cuando $x \to \infty$.

Se puede utilizar un método avanzado como la regla de L'Hôpital para hallar el límite de una sucesión, pero hay que andar con cuidado. El teorema que sigue establece que si $f(x) \to L$ cuando $x \to \infty$ por valores reales, entonces también $f(n)$ debe tender a $L$ cuando $n \to \infty$. (La figura 8.6 ilustra la situación).

**Teorema 1.2**

Si $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$, entonces $\lim_{n \to \infty} f(n) = L$ también.

**Nota 1.2**

El recíproco del teorema 1.2 es falso. Es decir,

$$\lim_{n \to \infty} f(n) = L$$

**no implica** necesariamente que

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L.$$

Como contraejemplo, nótese que

$$\lim_{n \to \infty} \cos(2\pi n) = 1,$$

ya que

$$\cos(2\pi n) = 1$$

para todo **entero** $n$ (figura 8.7a), pero

$$\lim_{x \to \infty} \cos(2\pi x)$$

no existe, porque cuando $x \to \infty$, $\cos(2\pi x)$ oscila entre $-1$ y 1 (figura 8.7b).

**Ejemplo 1.6** **Aplicación de la regla de L'Hôpital a una función relacionada**

Calcular $\lim_{n \to \infty} \dfrac{n+1}{e^n}$.

**Solución** Es una forma indeterminada $\dfrac{\infty}{\infty}$, pero la figura 8.8 parece indicar que la sucesión converge a 0. Sin embargo, no hay forma clara de decidirlo rigurosamente, excepto la regla de L'Hôpital (que **no** es aplicable a límites de sucesiones). Así, pues, pasamos a considerar el límite de la función correspondiente de una variable real a la que sí se puede aplicar la regla de L'Hôpital. (Compruebe que se satisfacen las hipótesis). Se tiene

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x+1}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{d}{dx}(x+1)}{\frac{d}{dx}(e^x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

Por el teorema 1.2, concluimos que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{e^n} = 0 \text{ también.}$$

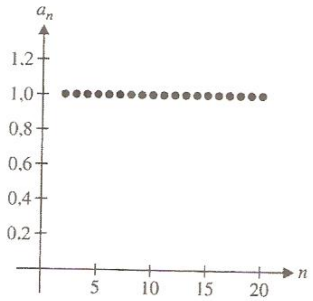



**Figura 8.7a**

$a_n = \cos(2\pi n)$.

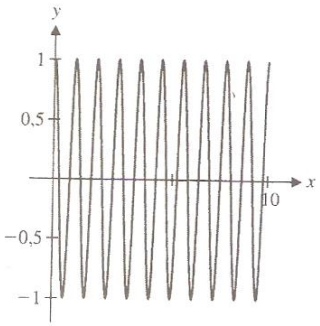



**Figura 8.7b**

$y = \cos(2\pi x)$.

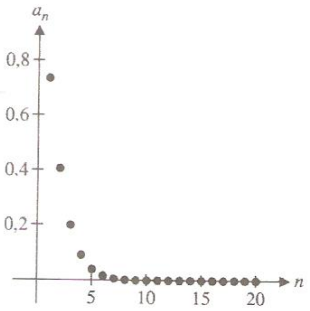



**Figura 8.8**

$a_n = \dfrac{n+1}{e^n}$.

Aunque ahora disponemos de un instrumento para evaluar límites de sucesiones, la mayoría sigue resistiendo nuestros intentos. En muchos casos (incluyendo las series que estudiamos en el resto del capítulo) ni siquiera tenemos una fórmula para el término general. En tales circunstancias, hemos de analizar la convergencia de la sucesión por alguna vía indirecta. La primera de estas vías indirectas está asociada al resultado (del mismo nombre) visto en la sección 1.2 para funciones de una variable real.

**Teorema 1.3 (Teorema del encaje)**

Sean $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ dos sucesiones que convergen a un mismo límite $L$. Si existe un entero $n_1 \geq n_0$ tal que para todo $n \geq n_1$, $a_n \leq c_n \leq b_n$, entonces $\{c_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ también converge a $L$.

El próximo ejemplo muestra cómo se aplica el teorema del encaje. La clave es encontrar dos sucesiones, una mayor y otra menor que la dada, con el mismo límite.

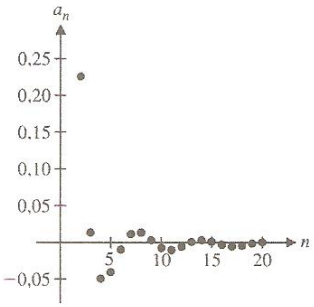



**Figura 8.9**
$a_n = \dfrac{\text{sen } n}{n^2}$

**Ejemplo 1.7** **Aplicación del teorema del encaje**

Investigar si es convergente o divergente la sucesión $\left\{\dfrac{\text{sen } n}{n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

**Solución** En la figura 8.9 vemos que la sucesión parece converger a 0, a pesar de la oscilación. No podemos calcular este límite por las reglas estudiadas previamente. (¡Inténtelo!). Ahora bien, recuerde que

$$-1 \leq \text{sen } n \leq 1, \text{ para todo } n.$$

Dividiendo entre $n^2$, obtenemos

$$\frac{-1}{n^2} \leq \frac{\text{sen } n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}, \text{ para todo } n \geq 1.$$

Finalmente, como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-1}{n^2} = 0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2},$$

del teorema del encaje se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\text{sen } n}{n^2} = 0$$

también.

El siguiente resultado, de gran utilidad, es consecuencia inmediata del teorema 1.3.

**Corolario 1.1**
Si $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

**Demostración**
Para todo $n$ es

$$-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$$

y

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} (-|a_n|) = -\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0.$$

Así, pues, por el teorema del encaje, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ también.

El corolario 1.1 es especialmente útil para sucesiones con términos positivos y negativos, como ilustra el próximo ejemplo.

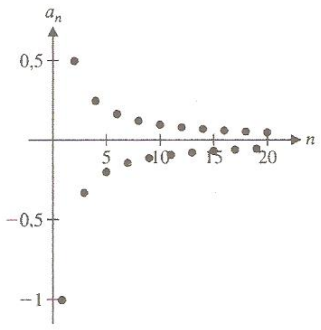



**Figura 8.10**
$a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.

**Ejemplo 1.8** **Una sucesión alternada en signos**

Determinar la convergencia o divergencia de $\left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

**Solución** La figura 8.10 sugiere que la sucesión oscila y que, a pesar de ello, converge a 0. Como $(-1)^n$ oscila entre $-1$ y 1, no podemos evaluar $\lim_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$ directamente. Sin embargo, observamos que

$$\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

y

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Por el corolario 1.1, concluimos que $\lim_{n \to \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0.$

---

Vamos a recordar una definición utilizada a lo largo de este capítulo.

---

**Definición 1.2**

Para todo entero $n \geq 1$, la **factorial** $n!$ de $n$ se define como el producto de los primeros $n$ enteros positivos:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n.$$

Además, definimos $0! = 1$.

---

El próximo ejemplo se refiere a una sucesión cuyo límite sería muy difícil de hallar sin el teorema del encaje.

**Ejemplo 1.9** **Una demostración indirecta de la convergencia**

Investigar la convergencia de $\left\{ \frac{n!}{n^n} \right\}_{n=1}^{\infty}$.

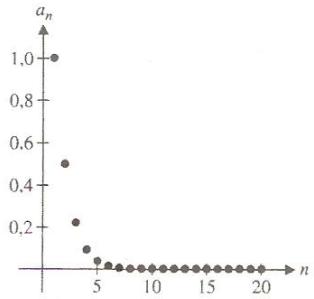



**Figura 8.11**

$a_n = \frac{n!}{n^n}$.

**Solución** No podemos calcular $\lim_{n \to \infty} \frac{n!}{n^n}$ directamente.(¡Inténtelo!). En la figura 8.11 se tiene la impresión de que la sucesión converge a 0. El término general de la sucesión satisface

$$0 < \frac{n!}{n^n} = \underbrace{\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n}{n \cdot n \cdot n \cdot \cdots \cdot n}}_{n \text{ factores}}$$

$$= \left(\frac{1}{n}\right) \underbrace{\frac{2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n}{n \cdot n \cdot \cdots \cdot n}}_{n-1 \text{ factores}} \leq \left(\frac{1}{n}\right)(1) = \frac{1}{n}. \tag{1.2}$$

Por el teorema del encaje y (1.2), dado que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{n \to \infty} 0 = 0.$$

también

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

---

Igual que hicimos con las funciones, es necesario distinguir entre sucesiones crecientes y decrecientes. Las definiciones son obvias.

---

**Definición 1.3**

(i) La sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es **creciente** si

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots.$$

(ii) La sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es **decreciente** si

$$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \cdots$$

Si una sucesión es creciente o decreciente, se dice que es **monótona**.

Existen varias maneras de probar que una sucesión es monótona. Sea cual sea la elegida, hay que verificar que $a_n \leq a_{n+1}$ para todo $n$ (creciente) o bien que $a_{n+1} \leq a_n$ para todo $n$ (decreciente). Un método muy usual, ilustrado en el próximo ejemplo, es estudiar el cociente de dos términos sucesivos $a_n$ y $a_{n+1}$.

### Ejemplo 1.10 Una sucesión creciente

Investigar si la sucesión $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ es creciente, decreciente o ninguna de ambas cosas.

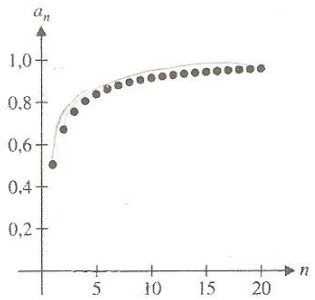


Figura 8.12

$a_n = \dfrac{n}{n+1}$.

**Solución** La figura 8.12 parece indicar que la sucesión es creciente. Pero uno no debe dejarse convencer por unos pocos términos de la sucesión. Vamos a analizar el cociente entre términos sucesivos. Si denotamos $a_n = \dfrac{n}{n+1}$, entonces $a_{n+1} = \dfrac{n+1}{n+2}$ y

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)}{\left(\dfrac{n}{n+1}\right)} = \frac{n+1}{n+2}\,\frac{n+1}{n}$$

$$= \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} = 1 + \frac{1}{n^2+2n} > 1. \tag{1.3}$$

Al ser $a_n > 0$, podemos multiplicar ambos lados de (1.3) por $a_n$, con lo que se obtiene

$$a_{n+1} > a_n,$$

para todo $n$, luego la sucesión es creciente. Como alternativa, se puede considerar la función $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ (de la variable real $x$) asociada a la sucesión. De

$$f'(x) = \frac{(x+1)-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$$

se deduce que $f(x)$ es creciente. En consecuencia, la sucesión $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ también es creciente.

### Ejemplo 1.11 Una sucesión creciente para $n \geq 2$

Investigar si la sucesión $\left\{\dfrac{n!}{e^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ es creciente, decreciente o ninguna de ambas cosas.

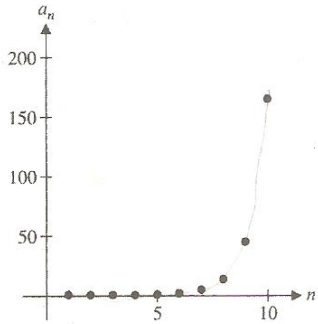


Figura 8.13

$a_n = \dfrac{n!}{e^n}$.

**Solución** La figura 8.13 sugiere que la sucesión es creciente (rápidamente, por cierto). Llamando $a_n = \dfrac{n!}{e^n}$ y $a_{n+1} = \dfrac{(n+1)!}{e^{n+1}}$, se tiene

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left[\dfrac{(n+1)!}{e^{n+1}}\right]}{\left(\dfrac{n!}{e^n}\right)} = \frac{(n+1)!}{e^{n+1}}\,\frac{e^n}{n!}$$

$$= \frac{(n+1)n!\,e^n}{e(e^n)n!} = \frac{n+1}{e} > 1, \text{ para } n \geq 2. \qquad \begin{array}{l}\text{Usar } (n+1)! = (n+1)\cdot n! \\ \text{y } e^{n+1} = e \cdot e^n.\end{array} \tag{1.4}$$

Multiplicando (1.4) por $a_n > 0$, resulta

$$a_{n+1} > a_n, \text{ para } n \geq 2.$$

En este caso, aunque la sucesión no es creciente para todo $n$, lo es para $n \geq 2$. Es crucial darse cuenta de que poco importa lo que puedan hacer los primeros términos de una sucesión. Lo que realmente interesa es el comportamiento de la sucesión cuando $n \to \infty$.

Necesitamos definir una nueva propiedad para las sucesiones.

**Definición 1.4**

Se dice que una sucesión $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ es **acotada** si existe un número $M > 0$ (una **cota**) tal que $|a_n| \leq M$, para todo $n$.

Suele malinterpretarse esta definición. Una cota **no** es lo mismo que un límite, aunque ambas cosas pueden coincidir. El límite de una sucesión convergente es el valor al que sus términos se aproximan cuando $n \to \infty$. Una cota es cualquier número mayor o igual que los valores absolutos de todos los términos. Una sucesión dada puede admitir muchas cotas (por ejemplo, si $|a_n| \leq 10$ para todo $n$, también es $|a_n| \leq 20$). Por el contrario, una sucesión sólo puede tener **un** límite (o ninguno, si es divergente).

**Ejemplo 1.12** **Una sucesión acotada**

Demostrar que la sucesión $\left\{\dfrac{3-4n^2}{n^2+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada.

**Solución** Teniendo en cuenta que $4n^2 - 3 > 0$, para todo $n \geq 1$, se tiene

$$|a_n| = \left|\frac{3-4n^2}{n^2+1}\right| = \frac{4n^2-3}{n^2+1} < \frac{4n^2}{n^2+1} < \frac{4n^2}{n^2} = 4.$$

Por tanto, esta sucesión está acotada por 4. (Se puede decir también que está acotada entre –4 y 4). Nótese que cualquier número mayor que 4 también es cota para esta sucesión.

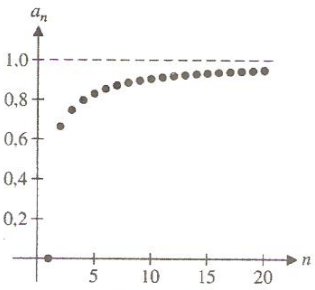



**Figura 8.14a**

Sucesión acotada creciente.

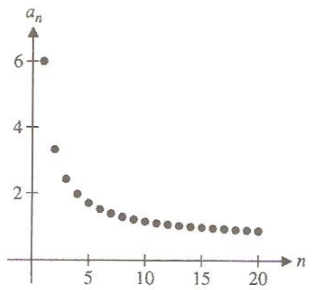



**Figura 8.14b**

Sucesión acotada decreciente.

La razón de nuestro interés por saber si una sucesión es monótona o acotada es que muchas veces no somos capaces de calcular el límite directamente y nos vemos obligados a recurrir a métodos indirectos para averiguar si la sucesión es convergente o no. El próximo teorema proporciona un instrumento eficaz en esa tarea.

**Teorema 1.4**

Toda sucesión monótona y acotada es convergente.

La figura 8.14a muestra una sucesión creciente y acotada típica y la figura 8.14b una decreciente y acotada. En ambas vemos que una sucesión monótona y acotada no tiene otro sitio a donde ir y, por consiguiente, debe converger al límite. La demostración del teorema 1.4, algo enrevesada, la dejamos para el final de la sección.

En el caso, muy frecuente, de que no sepamos calcular el límite de una sucesión, este teorema afirma que si podemos probar que es monótona y acotada, debe ser necesariamente convergente, aunque no da idea de cuál puede ser el límite. Una vez sabido que una sucesión converge, podemos aproximar el valor del límite evaluando un número suficiente de términos, como en el ejemplo que sigue.

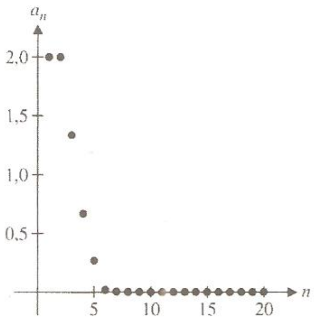



**Figura 8.15**

$a_n = \dfrac{2^n}{n!}$.

| $n$ | $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$ |
|---|---|
| 2 | 2 |
| 4 | 0,666667 |
| 6 | 0,088889 |
| 8 | 0,006349 |
| 10 | 0,000282 |
| 12 | 0,0000086 |
| 14 | $1{,}88 \times 10^{-7}$ |
| 16 | $3{,}13 \times 10^{-9}$ |
| 18 | $4{,}09 \times 10^{-11}$ |
| 20 | $4{,}31 \times 10^{-13}$ |

### Ejemplo 1.13 Una demostración indirecta de convergencia

Investigar la convergencia de la sucesión $\left\{\dfrac{2^n}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

**Solución** No sabemos calcular $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2^n}{n!}$, ya que es de la forma indeterminada $\dfrac{\infty}{\infty}$ pero no se le puede aplicar la regla de l'Hôpital (¿por qué?). La figura 8.15 sugiere que la sucesión converge a un límite próximo a 0. Con el fin de confirmar esa sospecha, empezamos por demostrar que la sucesión es monótona.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left[\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}\right]}{\left(\dfrac{2^n}{n!}\right)} = \frac{2n+1}{(n+1)!}\,\frac{n!}{2^n}$$

$$= \frac{2(2^n)\,n!}{(n+1)\,n!\,2^n} = \frac{2}{n+1} \le 1, \text{ para } n \ge 1. \qquad \begin{matrix}\text{Usar } 2^{n+1} = 2\cdot 2^n \text{ y} \\ (n+1)! = (n+1)\cdot n!\end{matrix} \qquad (1.5)$$

Multiplicando (1.5) por $a_n$ concluimos que $a_{n+1} \le a_n$, para todo $n$, así que la sucesión es decreciente. Ahora observamos que

$$0 < \frac{2^n}{n!} \le \frac{2^1}{1!} = 2,$$

para $n \ge 1$ (o sea, la sucesión está acotada por 2). Al ser monótona y acotada, el teorema 1.4 asegura que la sucesión dada es convergente. Para tener idea de cuál puede ser el límite, hemos evaluado unos cuantos términos en la tabla del margen.

En ella parece que el límite es aproximadamente 0. Podemos reforzar esta afirmación. Puesto que la sucesión es decreciente,

$$0 \le a_n \le a_{20} \approx 4{,}31 \times 10^{-13}, \text{ para } n \ge 20.$$

Por tanto, también el límite debe satisfacer la desigualdad

$$0 \le L \le 4{,}31 \times 10^{-13}.$$

Así, pues, aunque no podemos concluir que el límite es 0, sabemos que converge a un número muy cercano al 0. A muchos efectos, esa estimación es perfectamente adecuada. Y, claro está, si se desea mayor precisión basta evaluar más términos.

**Nota 1.3**

No subestime la importancia del teorema 1.4. Esta vía indirecta para averiguar la convergencia de una sucesión adquirirá importancia capital en el estudio de las series.

## Demostración del teorema 1.4

Antes de probar el teorema 1.4, necesitamos formular una propiedad fundamental del sistema de los números reales.

### El axioma de completitud

Si un conjunto $S$ de números reales, no vacío, admite una cota inferior, tiene una *cota inferior máxima*. Análogamente, si admite una cota superior, tiene una *cota superior mínima*.

Este axioma establece que si un conjunto no vacío $S$ admite una cota superior, es decir, un número $M$ tal que

$$x \le M, \text{ para todo } x \in S,$$

entonces existe una cota superior $L$ tal que

$$L \le M \text{ para } \textbf{toda} \text{ cota superior } M,$$

con un enunciado similar para las cotas inferiores.

El axioma de completitud permite demostrar el teorema 1.4.

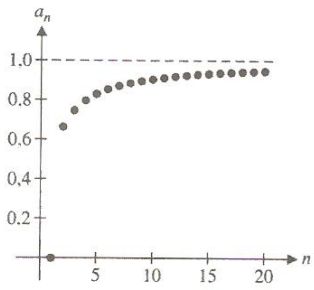



**Figura 8.16**

Creciente y acotada.

**Demostración**

(Sucesión creciente). Supongamos que $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ es creciente y acotada. La figura 8.16 ilustra esta situación con una sucesión creciente y acotada por 1. Se tiene

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots$$

y para algún $M > 0$, $|a_n| \leq M$, para todo $n$. Esto equivale a decir que

$$-M \leq a_n \leq M, \text{ para todo } n.$$

Por tanto, el conjunto $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$, formado por los términos de la sucesión, admite cota superior $M$. Por el axioma de completitud, $S$ debe tener una cota superior mínima $L$, que es el mínimo número tal que

$$a_n \leq L, \text{ para todo } n. \tag{1.6}$$

Nótese que, por pequeño que sea un $\varepsilon > 0$, $L - \varepsilon < L$ y, por consiguiente, $L - \varepsilon$ **no** es cota superior de $S$, ya que $L$ es la **mínima** posible. En consecuencia, existe algún elemento $a_n$ de $S$ para el cual

$$L - \varepsilon < a_N.$$

Como $\{a_n\}$ es creciente, se tiene para todo $n \geq N$, $a_N \leq a_n$. Finalmente, de (1.6) y por ser $L$ cota superior de $S$ y $\varepsilon > 0$, se sigue que

$$L - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq L < L + \varepsilon,$$

o sea,

$$L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon,$$

para $n \geq N$. Eso equivale a

$$|a_n - L| < \varepsilon, \text{ para } n \geq N.$$

Y esto significa que $\{a_n\}$ converge a $L$. La demostración para sucesiones decrecientes es análoga y se deja como ejercicio.

# EJERCICIOS 8.1

1. Compare y contraste $\lim_{x \to \infty} \operatorname{sen} \pi x$ y $\lim_{n \to \infty} \operatorname{sen} \pi n$. Indique los dominios de las dos funciones y cómo afectan a los límites.

2. Explicar por qué el teorema 1.2 debe ser cierto, teniendo en cuenta los respectivos dominios y su efecto sobre los límites.

3. Explicar, en palabras, por qué una sucesión decreciente y acotada debe ser convergente.

4. Una sucesión que no converge se llama divergente. La palabra «divergente» es adecuada para las sucesiones que divergen hacia $\infty$, pero no tanto para sucesiones como $\{1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots\}$ y $\{1, 2, 3, 1, 2, 3, \ldots\}$. Describir el comportamiento de estas sucesiones y los posibles comportamientos de otras sucesiones divergentes.

**En los ejercicios 5-8, escribir los términos $a_1, a_2, \ldots, a_6$ de la sucesión.**

5. $a_n = \dfrac{2n-1}{n^2}$

6. $a_n = \dfrac{3}{n+4}$

7. $a_n = \dfrac{4}{n!}$

8. $a_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+1}$

**En los ejercicios 9-14, (a) hallar el límite de cada sucesión, (b) usar la definición para probar que la sucesión converge y (c) representar la sucesión con una calculadora o un PCS.**

9. $a_n = \dfrac{1}{n^3}$
10. $a_n = \dfrac{2}{n^2}$
11. $a_n = \dfrac{n}{n+1}$
12. $a_n = \dfrac{2n+1}{n}$
13. $a_n = \dfrac{2}{\sqrt{n}}$
14. $a_n = \dfrac{4}{\sqrt{n+1}}$

**En los ejercicios 15-34, averiguar si la sucesión es convergente o divergente.**

15. $a_n = \dfrac{3n^2+1}{2n^2-1}$
16. $a_n = \dfrac{5n^3-1}{2n^3+1}$
17. $a_n = \dfrac{n^2+1}{n+1}$
18. $a_n = \dfrac{n^2+1}{n^3+1}$
19. $a_n = \dfrac{n+2}{3n-1}$
20. $a_n = \dfrac{n+4}{n+1}$
21. $a_n = (-1)^n \dfrac{n+2}{3n-1}$
22. $a_n = (-1)^n \dfrac{n+4}{n+1}$
23. $a_n = (-1)^n \dfrac{n+2}{n^2+4}$
24. $a_n = (-1)^n \dfrac{4}{n+1}$
25. $a_n = \cos \pi n$
26. $a_n = \operatorname{sen} \pi n$
27. $a_n = ne^{-n}$
28. $a_n = \dfrac{\cos n}{e^n}$
29. $a_n = \dfrac{e^n+2}{e^{2n}-1}$
30. $a_n = \dfrac{e^{2n}}{e^n+1}$
31. $a_n = \dfrac{3^n}{e^n+1}$
32. $a_n = \dfrac{n2^n}{3^n}$
33. $a_n = \dfrac{\cos n}{n!}$
34. $a_n = \dfrac{n!}{2^n}$

**En los ejercicios 35-38, usar el teorema del encaje y el corolario 1.1 para demostrar que la sucesión converge a 0 (sabiendo que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$).**

35. $a_n = \dfrac{\cos n}{n^2}$
36. $a_n = \dfrac{\cos n\pi}{n^2}$
37. $a_n = (-1)^n \dfrac{e^{-n}}{n}$
38. $a_n = (-1)^n \dfrac{\ln n}{n^2}$

**En los ejercicios 39-46, averiguar si la sucesión es creciente, decreciente o ninguna de ambas cosas.**

39. $a_n = \dfrac{n+3}{n+2}$
40. $a_n = \dfrac{n-1}{n+1}$
41. $a_n = \dfrac{e^n}{n}$
42. $a_n = \dfrac{n}{2^n}$
43. $a_n = \dfrac{2^n}{(n+1)!}$
44. $a_n = \dfrac{3^n}{(n+2)!}$
45. $a_n = \dfrac{10^n}{n!}$
46. $a_n = \dfrac{n!}{5^n}$

**En los ejercicios 47-50, probar que la sucesión es acotada.**

47. $a_n = \dfrac{3n^2-2}{n^2+1}$
48. $a_n = \dfrac{6n-1}{n+3}$
49. $a_n = \dfrac{\operatorname{sen}(n^2)}{n+1}$
50. $a_n = e^{1/n}$

51. Estimar numéricamente los límites de las sucesiones $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ y $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$. Comparar las respuestas con $e$ y con $e^{-1}$.

52. Estimar numéricamente los límites de las sucesiones $a_n = \left(1+\frac{2}{n}\right)^n$ y $b_n = \left(1+\frac{2}{n}\right)^{n}$. Comparar las respuestas con $e^2$ y con $e^{-2}$.

53. Sabiendo que $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, probar que $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{r}{n}\right)^n$ para cualquier constante $r$. (Ayuda: Hace $n = rm$).

54. Evaluar $\lim_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^n}{n^n}$ y $\lim_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^{n+1}}{n^n}$.

55. Probar que en un cuadrado de 12 cm de lado caben $n^2$ discos de $\frac{12}{n}$ cm de diámetro, para $n = 1, 2, 3, \ldots$ Sea $a_n$ el área que dejan sin cubrir los $n^2$ discos. Calcular $a_n$.

56. No siempre es posible adivinar la pauta de una sucesión a la vista de sus primeros términos. Tomamos dos puntos en una circunferencia y los unimos con un segmento recto. El círculo queda dividido en $a_1 = 2$ partes. Añadimos un tercer punto, y conectamos los tres puntos. Demuestre que ahora hay $a_2 = 4$ partes. Añadimos un cuarto punto y los unimos todos. Pruebe que ahora hay $a_3 = 8$ partes. ¿Está clara la pauta? Demuestre que $a_4 = 16$ y después calcule $a_5$. ¡Tal vez se lleve una sorpresa!

57. Habrá oído hablar de la «explosión demográfica». Lo que sigue es una adaptación del artículo «El día del juicio final: Viernes 13 de noviembre de 2026», de Foerster, Mora y Amiot, en *Science* (nov. 1960). Partimos de $a_0 = 3{,}049$, la población mundial en 1960 (en miles de millones). Calcule $a_1 = a_0 + 0{,}005a_0^{2{,}01}$, población estimada en 1961; $a_2 = a_1 + 0{,}005a_1^{2{,}01}$, la estimada en 1962; $a_3 = a_2 + 0{,}005a_2^{2{,}01}$, la estimada en 1963, etc. Siga iterando y compare los resultados con las poblaciones reales en 1970 (3,721), 1980 (4,473) y 1990 (5,333). A continuación, estime la predicción para el año 2035. Escalofriante, ¿no?

58. La **sucesión de Ulam** se define como

$$x_k = \begin{cases} 3x_{k-1} + 1 & \text{si } x_{k-1} \text{ es impar} \\ \frac{1}{2}\, x_{k-1} & \text{si } x_{k-1} \text{ es par} \end{cases}$$

Partiendo del valor inicial $x_1 = 2^n$ para algún entero $n > 0$, probar que $x_{n+1} = 1$. La cuestión (el problema de Collatz, un problema de investigación aún sin resolver) es si se llega a alcanzar el valor 1 sea cual sea el valor inicial. Compruebe, para varios valores iniciales, que siempre acaba en el valor 1.

59. Fibonacci, matemático italiano del siglo XIII, estudió un modelo de crecimiento de poblaciones de conejos partiendo de una pareja de conejos recién nacidos. Al cabo de un mes, maduran y procrean. El segundo mes engendran un par de retoños, y así sucesivamente. Vamos a contar los pares de conejos. Se tiene $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ de momento. Las reglas son: cada par de adultos produce un par de recién nacidos cada mes, éstos tardan un mes en madurar y no muere ningún conejo. Probar que $a_3 = 3$, $a_4 = 5$ y en general $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Esta **sucesión de Fibonacci** ocurre en una sorprendente variedad de aplicaciones.

60. En este ejercicio vamos a visualizar la sucesión de Fibonacci. Empezamos con dos cuadrados de lado 1 adyacentes (figura A). Colocamos un cuadrado de lado 2 adyacente a ambos (figura B). Volvemos a colocar un cuadrado, éste de lado 3, adyacente al rectángulo obtenido (figura C), después un cuadrado de lado 5 adyacente a la base del rectángulo de la figura C, y así sucesivamente.

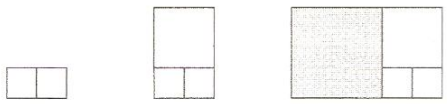


Figura A Figura B Figura C

Argumentar que los lados de los cuadrados son los términos de la sucesión de Fibonacci del ejercicio 59.

61. Investigar la convergencia de la sucesión $a_n = \sqrt[n]{n}$. (Ayuda: Usar $n^{1/n} = e^{(1/n)\ln n}$).

62. Sean $a_1 = 1$ y $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{4}{a_n}\right)$. Probar numéricamente que la sucesión así definida converge a 2. Para hallar este límite analíticamente, como $L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n$ basta resolver $L = \frac{1}{2}\left(L + \frac{4}{L}\right)$.

63. Como en el ejercicio 62, calcular el límite de la sucesión definida por $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right)$ con $c > 0$ y $a_n > 0$.

64. Se lanza hacia arriba una pelota desde el suelo con velocidad inicial $v$. Ignorando la resistencia del aire, subirá a una altura $v^2/(2g)$ y volverá al suelo en un tiempo $2v/g$. Según lo «vivo» que sea el rebote, la pelota alcanzará una cierta fracción de la altura anterior. El **coeficiente de restitución** $r$, definido como el cociente entre la velocidad de impacto y la de rebote, mide esa propiedad. El segundo ascenso se inicia con una velocidad $rv$, el tercero con $r^2v$, etc. Puede parecer que la pelota bota durante un tiempo infinito. Para ver que eso no es así, argumentar que en completar dos botes tarda un tiempo $a_2 = \frac{2v}{g}(1 + r)$, en completar tres tarda $a_3 = \frac{2v}{g}(1 + r + r^2)$, etc. Tomando $r = 0{,}5$, determinar numéricamente el límite de esta sucesión (estudiaremos las sucesiones de esta clase en la sección 8.2). En particular, probar que $(1 + 0{,}5) = \frac{3}{2}$, $(1 + 0{,}5 + 0{,}5^2) = \frac{7}{4}$ y $(1 + 0{,}5 + 0{,}5^2 + 0{,}5^3) = \frac{15}{8}$, hallar una expresión general para $a_n$ y el límite de la sucesión. Razonar que, tras ese tiempo, la pelota deja de botar.

65. Una consecuencia sorprendente del problema de la pelota en el ejercicio 64 puede verse en *An Experimental Approach to Nonlinear Dynamics and Chaos*, de Tufillaro, Abbott y Reilly. Supongamos que la pelota bota sobre una mesa que oscila arriba y abajo de acuerdo con la ecuación $A\cos\omega t$, con amplitud $A$ y frecuencia $\omega$. Sin ese movimiento de la mesa, la pelota pronto quedaría en reposo a altura 0. Sin embargo, para ciertos valores de $A$ y $\omega$, la pelota puede sufrir situaciones muy diversas y curiosas. Para entender esto, explicar por qué la colisión con la mesa puede aumentar o disminuir velocidad a la pelota. (¿Qué pasa si la mesa está moviéndose hacia arriba? ¿Y si se mueve hacia abajo?). Un modelo simplificado de la velocidad de la pelota en colisiones sucesivas con la mesa es $v_{n+1} = 0{,}8v_n - 10\cos(v_0 + v_1 + \cdots + v_n)$. Empezando con $v_0 = 5$, calcular $v_1, v_2, \cdots, v_{15}$. En este caso, la pelota nunca adopta un esquema permanente; su movimiento es caótico.

## 8.2 SERIES

Recordemos que la expresión decimal de $\frac{1}{3}$ se escribe en forma de decimal periódico:

$$\frac{1}{3} = 0{,}33333333\overline{3},$$

donde se entiende que la cifra 3 se repite infinitas veces. Una forma alternativa de interpretar esto consiste en escribir

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} &= 0{,}3 + 0{,}03 + 0{,}003 + 0{,}0003 + 0{,}00003 + \cdots \\ &= 3(0{,}1) + 3(0{,}1)^2 + 3(0{,}1)^3 + 3(0{,}1)^4 + \cdots + 3(0{,}1)^k + \cdots . \end{aligned} \tag{2.1}$$

Por conveniencia, abreviamos (2.1) en notación de sumatorios como

$$\frac{1}{3} = \sum_{k=1}^{\infty} [3(0,1)^k]. \tag{2.2}$$

Pero ¿qué significa exactamente la *suma infinita* indicada en (2.2)? Es evidente que no podemos sumar infinitos números (sólo se pueden sumar dos cada vez). Esa expresión significa que si se suman más y más términos, la suma se va aproximando cada vez más a $\frac{1}{3}$.

En general, dada una sucesión $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, imagine que empezamos a sumar sus términos. Así, se irían obteniendo las sumas

$$\begin{aligned}
S_1 &= a_1, \\
S_2 &= a_1 + a_2 = S_1 + a_2, \\
S_3 &= \underbrace{a_1 + a_2}_{S_2} + a_3 = S_2 + a_3, \\
S_4 &= \underbrace{a_1 + a_2 + a_3}_{S_3} + a_4 = S_3 + a_4, \qquad (2.3) \\
&\vdots \\
S_n &= \underbrace{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}_{S_{n-1}} + a_n = S_{n-1} + a_n \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

Se dice que $S_n$ es la **suma parcial** $n$-ésima. Nótese en (2.4) que cada una de ellas se puede calcular como suma de dos números: el término $n$-ésimo $a_n$ y la suma parcial anterior $S_{n-1}$.

Por ejemplo, para la sucesión $\left\{\frac{1}{2^k}\right\}_{k=1}^{\infty}$, las sumas parciales resultan ser

$$\begin{aligned}
S_1 &= \frac{1}{2}, \\
S_2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4}, \\
S_3 &= \frac{3}{4} + \frac{1}{2^3} = \frac{7}{8}, \\
S_4 &= \frac{7}{8} + \frac{1}{2^4} = \frac{15}{16}, \\
S_5 &= \frac{15}{16} + \frac{1}{2^5} = \frac{31}{32},
\end{aligned}$$

y así sucesivamente. Es fácil darse cuenta de que $S_2 = \frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{2^2}$, $S_3 = \frac{7}{8} = 1 - \frac{1}{2^3}$, $S_4 = \frac{15}{16} = 1 - \frac{1}{2^4}$, etc., es decir, $S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$, para $n = 1, 2, \cdots$. Si nos interesamos por la convergencia o divergencia de la sucesión $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ de las sumas parciales, observamos que

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1.$$

Piense en lo que esto quiere decir: al ir sumando más y más términos de la sucesión $\left\{\frac{1}{2^k}\right\}_{k=1}^{\infty}$, las sumas parciales se van aproximando al valor 1. Expresamos este hecho escribiendo

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1. \tag{2.5}$$

Es muy importante entender lo que está ocurriendo. Este ente matemático $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$, de un tipo nuevo, se llama una **serie**. **No es una suma** en el sentido usual de la palabra, sino el **límite** de una sucesión de sumas parciales. La ecuación (2.5) dice que al sumar cada vez más términos, las sumas van tendiendo a 1.

En general, una sucesión arbitraria $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ lleva asociada la serie

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Si la sucesión de las sumas parciales $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ converge a un número $S$, decimos que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es **convergente** (**converge** a $S$). En tal caso, se dice, asimismo, que $S$ es la **suma** de la serie y se escribe

**Definición de serie**

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n \to \infty} S_n = S.} \tag{2.6}$$

Por otra parte, si la sucesión de las sumas parciales $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ es divergente (o sea, si $\lim_{n \to \infty} S_n$ no existe), decimos que la serie es **divergente**.

### Ejemplo 2.1 Una serie convergente

Investigar si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ es convergente o divergente.

**Solución** Por lo que hemos dicho acerca del ejemplo introductorio,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1.$$

En este caso, la serie converge a 1.

En el próximo ejemplo examinamos una serie divergente sencilla.

### Ejemplo 2.2 Una serie divergente

Analizar la convergencia de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} k^2$.

**Solución** Ahora la $n$-ésima suma parcial es

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$$

y

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} (1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) = \infty.$$

Como la sucesión de sus sumas parciales diverge, la serie es divergente.

Pocas veces es tan fácil como en los ejemplos 2.1 y 2.2 determinar si una serie dada es convergente o no.

### Ejemplo 2.3 Una serie cuyas sumas parciales admiten expresión simple

Estudiar la convergencia de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$.

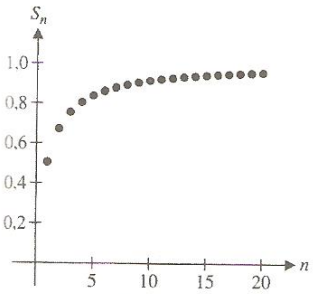



**Figura 8.17**

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

| $n$ | $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ |
|---|---|
| 10 | 0,90909091 |
| 100 | 0,99009901 |
| 1.000 | 0,999001 |
| 10.000 | 0,99990001 |
| 100.000 | 0,99999 |
| $1 \times 10^6$ | 0,999999 |
| $1 \times 10^7$ | 0,9999999 |

**Solución** La figura 8.17 muestra los puntos correspondientes a las primeras 20 sumas parciales y la tabla unos cuantos valores de sumas parciales.

Ambas informaciones sugieren que las sumas parciales tienden a 1 cuando $n \to \infty$. Sin embargo, recomendamos mucha cautela. No es prudente, a la vista tan sólo de una figura o de una tabla con unas cuantas sumas parciales, decidir si una serie es convergente o no. En este caso, tenemos la suerte de disponer de una expresión sencilla para las sumas parciales. Dejamos como ejercicio descomponer en fracciones simples el término general de la serie:

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}. \tag{2.7}$$

De acuerdo con (2.7), para la suma parcial $n$-ésima se tiene

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) + \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right).$$

Por la forma en que cada término en la suma parcial se cancela con otro, este tipo de sumas se llama **sumas telescópicas**. A consecuencia de tales cancelaciones,

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

y, por tanto,

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1.$$

Por tanto, la serie converge a 1, como habíamos conjeturado.

---

Es relativamente raro conocer la suma exacta de una serie convergente. Lo más frecuente es tener que recurrir a algún método indirecto para ver si es convergente y, a continuación, aproximar su suma evaluando algunas sumas parciales. Un tipo de series cuya suma sí se conoce exactamente, y que incluye la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$, del ejemplo 2.1 lo constituyen las **series geométricas**. Para ellas es válido el siguiente resultado.

---

**Teorema 2.1**

Para $a \neq 0$, la **serie geométrica** $\sum_{k=0}^{\infty} ar^k$ converge a $\frac{a}{1-r}$ si $|r| < 1$ y diverge si $|r| \geq 1$. (El número $r$ se llama **razón** de la serie.)

---

**Demostración**

La demostración se apoya en una ingeniosa observación. Dado que el primer término de la serie corresponde a $k = 0$, la $n$-ésima suma parcial (la suma de los $n$ primeros términos) es

$$S_n = a + ar^1 + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}. \tag{2.8}$$

Multiplicando (2.8) por $r$, se obtiene

$$rS_n = ar^1 + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n. \tag{2.9}$$

Restando (2.9) de (2.8), resulta

$$(1-r)S_n = (a + ar^1 + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}) - (ar^1 + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n)$$

$$= a - ar^n = a(1 - r^n).$$

Dividiendo entre $(1 - r)$, queda

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}.$$

Si $|r| < 1$, entonces $r^n \to 0$ cuando $n \to \infty$, luego

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{a}{1 - r}.$$

Dejamos como ejercicio probar que si $|r| \geq 1$, $\lim_{n \to \infty} S_n$ no existe.

---

**Ejemplo 2.4** **Una serie geométrica convergente**

Investigar la convergencia de la serie $\sum_{k=2}^{\infty} 5\left(\frac{1}{3}\right)^k$.

**Solución** La figura 8.18, que representa las primeras 20 sumas parciales, indica que la sucesión de las sumas parciales converge a un valor cercano a 0,8. La tabla, que da los valores de esas 20 sumas parciales, aporta evidencia suplementaria en ese sentido.

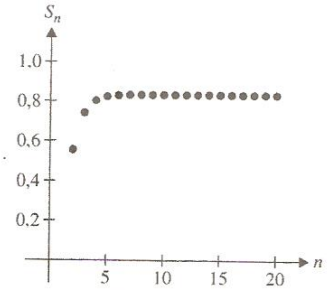



**Figura 8.18**

$$S_n = \sum_{k=2}^{n+1} 5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^k.$$

| $n$ | $S_n = \sum_{k=2}^{n+1} 5\left(\frac{1}{3}\right)^k$ | $n$ | $S_n = \sum_{k=2}^{n+1} 5\left(\frac{1}{3}\right)^k$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0,55555556 | 11 | 0,83332863 |
| 2 | 0,74074074 | 12 | 0,83333177 |
| 3 | 0,80246914 | 13 | 0,83333281 |
| 4 | 0,82304527 | 14 | 0,83333316 |
| 5 | 0,82990398 | 15 | 0,83333328 |
| 6 | 0,83219021 | 16 | 0,83333331 |
| 7 | 0,83295229 | 17 | 0,83333333 |
| 8 | 0,83320632 | 18 | 0,83333333 |
| 9 | 0,833291 | 19 | 0,83333333 |
| 10 | 0,83331922 | 20 | 0,83333333 |

La tabla sugiere que la serie converge aproximadamente a 0,83333333. De nuevo hacemos una llamada a la prudencia. Al examinar series, las evidencias gráfica y numérica pueden ser falaces. Algunas sucesiones y series convergen (o divergen) demasiado lentamente como para poder apreciarlo gráfica o numéricamente. Hay que confirmar **siempre** la sospecha mediante un análisis riguroso. En el ejemplo presente, la serie, aunque no está escrita en la forma usual, es geométrica:

$$\sum_{k=2}^{\infty} 5\left(\frac{1}{3}\right)^k = 5\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 5\left(\frac{1}{3}\right)^3 + 5\left(\frac{1}{3}\right)^4 + \cdots + 5\left(\frac{1}{3}\right)^n + \cdots$$

$$= 5\left(\frac{1}{3}\right)^2 \left[1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left\{5\left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^k\right\}.$$

Ahora ya se ve que es una serie geométrica de razón $r = \frac{1}{3}$ y $a = 5\left(\frac{1}{3}\right)^2$. Además, como

$$|r| = \frac{1}{3} < 1,$$

del teorema 2.1 se deduce que la serie converge a

$$\frac{a}{1-r} = \frac{5\left(\frac{1}{3}\right)^2}{1-\left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{\left(\frac{5}{9}\right)}{\left(\frac{2}{3}\right)} = \frac{5}{6} = 0{,}8333333\overline{3},$$

lo cual es consistente con la gráfica y con la tabla de las sumas parciales.

**Ejemplo 2.5** **Una serie geométrica divergente**

Investigar si es convergente la serie $\sum_{k=0}^{\infty} 6\left(-\frac{7}{2}\right)^k$.

**Solución** La figura 8.19, que muestra las 20 primeras sumas parciales, no parece muy esclarecedora hasta que nos fijamos en la escala vertical. La tabla de los 20 valores de esas sumas parciales es más reveladora.

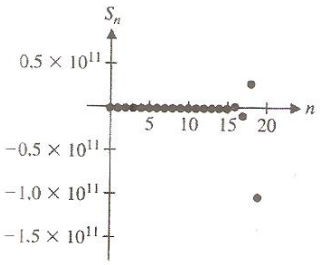



**Figura 8.19**

$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} 6 \cdot \left(-\frac{7}{2}\right)^k$.

| $n$ | $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} 6\left(-\frac{7}{2}\right)^k$ |
|---|---|
| 1 | 6 |
| 2 | –15 |
| 3 | 58,5 |
| 4 | –198,75 |
| 5 | 701,63 |
| 6 | –2.449,7 |
| 7 | 8.579,9 |
| 8 | –30.024 |
| 9 | $1{,}05 \times 10^5$ |
| 10 | $-3{,}68 \times 10^5$ |

| $n$ | $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} 6\left(-\frac{7}{2}\right)^k$ |
|---|---|
| 11 | $1{,}29 \times 10^6$ |
| 12 | $-4{,}5 \times 10^6$ |
| 13 | $1{,}6 \times 10^7$ |
| 14 | $-5{,}5 \times 10^7$ |
| 15 | $1{,}9 \times 10^8$ |
| 16 | $-6{,}8 \times 10^8$ |
| 17 | $2{,}4 \times 10^9$ |
| 18 | $-8{,}3 \times 10^9$ |
| 19 | $2{,}9 \times 10^{10}$ |
| 20 | $-1 \times 10^{11}$ |

Las sumas oscilan entre valores positivos y negativos, pero con valores absolutos cada vez más grandes. Podemos llegar a una conclusión firme observando que es una serie geométrica de razón $r = -\frac{7}{2}$. Como

$$|r| = \left|-\frac{7}{2}\right| = \frac{7}{2} \geq 1,$$

la serie es divergente, tal como sospechábamos.

Tendrá ocasión de comprobar que el análisis de la convergencia de una serie requiere, en general, un esfuerzo considerable. Enunciamos a continuación una propiedad simple que puede ahorrar mucho trabajo en esa tarea.

**Teorema 2.2**

Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, entonces $\lim_{k \to \infty} a_k = 0$.

**Demostración**

Supongamos que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge al número $L$. Eso quiere decir que la sucesión de sus sumas parciales $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ converge a $L$. Ahora bien,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n-1} a_k + a_n = S_{n-1} + a_n.$$

Por tanto,

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

Así, pues,

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \to \infty} S_n - \lim_{n \to \infty} S_{n-1} = L - L = 0,$$

que es lo que queríamos demostrar.

El siguiente criterio, muy útil, es consecuencia directa del teorema 2.2.

**Criterio del término general para la divergencia**

Si $\lim_{k \to \infty} a_k = 0$, la serie $\sum_{k=1}^{\infty}$ es divergente.

Este criterio es tan simple, que debe ser aplicado a cualquier serie antes de nada. Afirma que si los términos de la serie no tienden a cero, la serie es divergente y nuestro trabajo ha terminado. Por el contrario, si los términos de la serie **tienden a cero**, no podemos concluir que la serie sea convergente; hay que analizarla por otros métodos.

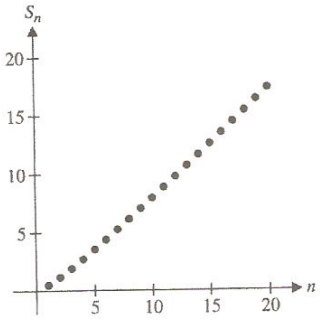



**Figura 8.20**

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1}.$$

**Ejemplo 2.6** **Una serie cuyos términos no tienden a cero**

Analizar si es convergente la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1}$.

**Solución** La figura 8.20, que muestra las 20 primeras sumas parciales, parece indicar que crecen sin tope. Una tabla de valores lleva a la misma sospecha. (¡Elabore la tabla!). Podemos decidir la cuestión observando que

$$\lim_{k \to \infty} \frac{k}{k+1} = 1 \neq 0.$$

De acuerdo con el criterio del término general, la serie es divergente.

La serie del próximo ejemplo, especialmente importante, es divergente a pesar de que sus términos tienden a 0 cuando $k \to \infty$.

**Ejemplo 2.7** **La serie armónica**

Investigar si es convergente la **serie armónica** definida como $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$.

**Solución** La figura 8.21 y la tabla muestran las 20 primeras sumas parciales. (Si lo hace con 200 o con 2.000 notará poca diferencia a la hora de concluir algo). Ambas parecen sugerir que la serie converge a un número cercano a 3,6.

**Advertencia**

El recíproco del teorema 2.2 es **falso**. Esto es, $\lim_{k \to \infty} a_k = 0$ no implica que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge. **Tenga muy claro esto. Se interpreta mal con frecuencia.**

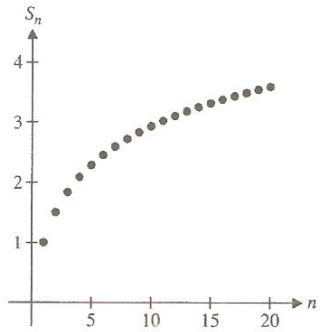



**Figura 8.21**

$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

| $n$ | $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | 1,5 |
| 3 | 1,83333 |
| 4 | 2,08333 |
| 5 | 2,28333 |
| 6 | 2,45 |
| 7 | 2,59286 |
| 8 | 2,71786 |
| 9 | 2,82897 |
| 10 | 2,92897 |

| $n$ | $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ |
|---|---|
| 11 | 3,01988 |
| 12 | 3,10321 |
| 13 | 3,18013 |
| 14 | 3,25156 |
| 15 | 3,31823 |
| 16 | 3,38073 |
| 17 | 3,43955 |
| 18 | 3,49511 |
| 19 | 3,54774 |
| 20 | 3,59774 |

Como con toda sucesión o serie, es necesario confirmar esa sospecha. Por lo que se refiere a nuestro criterio de divergencia, se tiene

$$\lim_{k \to \infty} a_k = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} = 0.$$

¡Cuidado una vez más! De ahí **no** se deduce que la serie sea convergente. Si ese límite hubiera sido distinto de 0, habríamos concluido que la serie es divergente y se acabó. Pero como el límite es 0, la única conclusión es que hay que seguir investigando la serie. (O sea, puede que sea convergente, pero no lo podemos saber sin análisis adicional).

El argumento que sigue es un preludio de lo que está por venir. Nótese que la suma parcial

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

puede verse como la suma de las áreas de los $n$ rectángulos superpuestos a la gráfica de $y = \frac{1}{x}$ que muestra, para $n = 7$, la figura 8.22.

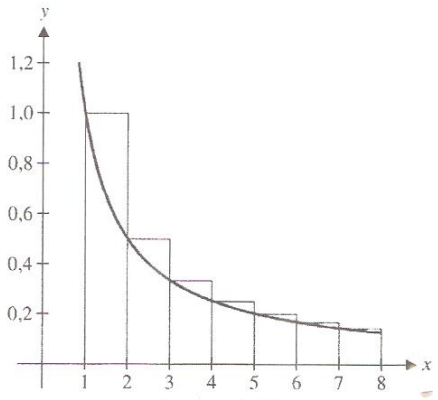



**Figura 8.22**

$y = \frac{1}{x}$.

Como cada uno de esos rectángulos queda parcialmente por encima de la curva, se tiene

$$S_n = \text{Suma de las áreas de los } n \text{ rectángulos}$$

$$\geq \text{Área bajo la curva} = \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx$$

$$= \ln|x| \Big|_1^{n+1} = \ln(n+1) \tag{2.10}$$

Sin embargo, la sucesión $\{\ln(n+1)\}_{n=1}^{\infty}$ diverge, ya que

$$\lim_{n\to\infty} \ln(n+1) = \infty.$$

Como $S_n \geq \ln(n+1)$, para todo $n$ [por (2.10)], también debe ser $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$. Por la definición de convergencia y divergencia de series, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ es **divergente**, y ello a pesar de que $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$.

---

Completamos esta sección con varios resultados nada sorprendentes.

---

**Teorema 2.3**

(i) Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge a $A$ y $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ converge a $B$, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \pm b_k)$ converge a $A \pm B$ y la serie $\sum_{k=1}^{\infty} (ca_k)$ converge a $cA$, para toda constante $c$.

(ii) Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es convergente y $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ divergente, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \pm b_k)$ es divergente.

---

La demostración se deja como ejercicio.

---

# EJERCICIOS 8.2

1. Suponga que un compañero no tiene clara la diferencia entre convergencia de una sucesión y convergencia de una serie. Piense cómo se lo explicaría utilizando como ejemplos la sucesión $a_k = \frac{k}{k+1}$ y la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1}$.

2. Argumentar, por escrito, por qué debe ser cierto el criterio del término general. Explicar por qué $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ **no** implica necesariamente que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sea convergente. Incluya un ejemplo importante que demuestre la falsedad de esa implicación y comente que la convergencia de $a_k$ hacia 0 puede ser rápida o lenta.

3. En los teoremas 2.2 y 2.3, la serie comienza en $k = 1$, como en $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Explicar por qué la conclusión de esos teoremas sigue siendo válida si la serie empieza en $k = 2$, en $k = 3$ o en cualquier entero positivo.

4. Hemos insistido en el texto en que las evidencias numéricas o gráficas pueden conducir a conclusiones erróneas. Imagine que una calculadora maneja 14 dígitos. Explique por qué, para valores suficientemente grandes de $n$, el término $\frac{1}{n}$ será demasiado pequeño para cambiar la suma parcial $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Así, pues, la calculadora indicará, incorrectamente, que la serie armónica es convergente.

**En los ejercicios 5-28, averiguar si la serie es convergente o divergente. Si es convergente, hallar su suma.**

5. $\sum_{k=0}^{\infty} 3\left(\frac{1}{5}\right)^k$

6. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3}(5)^k$

7. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^k$

8. $\sum_{k=0}^{\infty} 4\left(\frac{1}{2}\right)^k$

9. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2}(3)^k$

10. $\sum_{k=0}^{\infty} 5\left(-\frac{1}{3}\right)^k$

11. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k(k+2)}$

12. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k}{k+2}$

13. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k}{k+4}$

14. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{k(k+3)}$

15. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k}$

16. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{k+1}$

17. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$

18. $\sum_{k=0}^{\infty} [e^{-k} - e^{-(k+1)}]$

19. $\sum_{k=0}^{\infty} 3^{-k}$

20. $\sum_{k=0}^{\infty} 2e^{-k}$

21. $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k} - \frac{1}{k+1}\right)$

22. $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k} - \frac{1}{3^k}\right)$

23. $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3^k} + \frac{1}{2^k}\right)$

24. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{4^k}\right)$

25. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{3}{2^k}$

26. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{4}{3^k}$

27. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{3k}{k+1}$

28. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{k^3}{k^2+1}$

**En los ejercicios 29-34, usar evidencia gráfica y numérica para conjeturar la convergencia o divergencia de la serie.**

29. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

30. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$

31. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{k!}$

32. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k}$

33. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k}{k^2}$

34. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$

35. Demostrar que si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es convergente, $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ es también convergente para todo entero $m > 0$. En particular, si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge a $L$, ¿a qué número converge $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$?

36. Probar que si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge, $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ diverge para todo entero $m > 0$.

37. Demostrar el teorema 2.3 (i).

38. Demostrar el teorema 2.3 (ii).

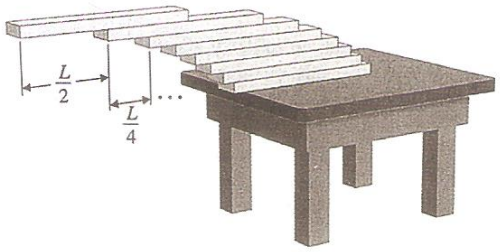
39. La serie armónica es probablemente la serie más importante a entender. En este ejercicio le guiamos hacia una demostración alternativa de su carácter divergente. Sea $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Probar que $S_1 = 1$ y $S_2 = \frac{3}{2}$. Como $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$, $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$. Por tanto, $S_4 > \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$. Análogamente, $\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$, así que $S_8 > \frac{5}{2}$. Probar que $S_{16} > 3$ y $S_{32} > \frac{7}{2}$. ¿Para qué $n$ se puede garantizar que $S_n > 4$? ¿Y $S_n > 5$? Para un entero $m > 0$ arbitrario, hallar un $n$ para el cual $S_n > m$. Concluya que la serie armónica es divergente.

40. Evaluar varias sumas parciales de la serie $1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$. Argumentar que no existe el límite de la sucesión de sumas parciales, por lo que la serie diverge. A continuación, escribir la serie como serie geométrica y usar el teorema 2.1 para concluir que la serie es divergente. Finalmente, llegar a la misma conclusión mediante el criterio del término general.

41. Escribir $0{,}9999\overline{9} = 0{,}9 + 0{,}09 + 0{,}009 + \cdots$ y sumar esta serie geométrica para demostrar que $0{,}9999\overline{9} = 1$.

42. Probar, como en el ejercicio 41, que $0{,}9999\overline{9} = 0{,}2$.

43. Suponga que tiene $n$ tablas de longitud $L$. Coloca la primera asomando una longitud $\frac{L}{2n}$ fuera de la mesa, otra saliendo $\frac{L}{2(n-1)}$ más que la primera, una tercera saliendo $\frac{L}{2(n-2)}$ más que la segunda, etc., hasta colocar la última saliendo $\frac{L}{2}$ más que la $(n-1)$-ésima. En teoría, esta pila de tablas quedaría en equilibrio (en la práctica, no se puede apurar tanto). Con $n = 8$, calcule cuánto sale en total la pila de tablas respecto del borde de la mesa. ¿Cuántas tablas hay que colocar de ese modo para que sobresalgan más de $L$? Esto significa que la última tabla colocada está completamente fuera de la vertical de la mesa. ¿Cuál es el límite del saliente total cuando $n \to \infty$?




44. ¿Ha tenido la impresión de que su fila de automóviles se mueve más despacio que las demás? En *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, William Feller analiza hasta qué punto es mala suerte. Sea $N$ el número de personas de la fila hasta alguien que espera más que usted (usted es el primero, así que $N \geq 2$). La probabilidad de que $N = k$ viene dada por $p(k) = \frac{1}{k(k-1)}$. Demostrar que la probabilidad total es igual a 1; es decir, $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = 1$. Según la teoría de probabilidades, el número medio (la media) de personas que debe haber en la fila antes de que alguien espere más que usted viene dada por $\sum_{k=2}^{\infty} k\frac{1}{k(k-1)}$. Probar que eso diverge a $\infty$. ¡Para que se queje de mala suerte!

45. Si $0 < r < \frac{1}{2}$, probar que $1 + 2r + 4r^2 + \cdots + (2r)^n + \cdots = \frac{1}{1-2r}$. Sustituir $r$ por $\frac{1}{1.000}$ y comentar qué hay de interesante en la expresión decimal de $\frac{500}{499}$.

46. En el ejercicio 64 de la sección 8.1 probamos que cierta pelota tardaba 2 segundos en efectuar infinitos botes. En general, una pelota tarda $\frac{2v}{g}\sum_{k=0}^{\infty} r^k$ en dar sus infinitos botes y recorre en total $\frac{v^2}{g}\sum_{k=0}^{\infty} r^{2k}$. Suponiendo $0 < r < 1$, calcular la suma de estas series geométricas.

47. Para ganar un desempate («deuce») en tenis usted debe ganar los dos puntos siguientes. Si cada jugador gana un punto, el desempate parte de cero. Si su probabilidad de ganar un punto es $p$, la de ganar dos seguidos es $p^2$. La probabilidad de que usted gane uno de los dos siguientes puntos es $2p(1-p)$. Por tanto, la probabilidad de que usted gane el desempate viene dada por $p^2 + 2p(1-p)p^2 + [2p(1-p)]^2 p^2 + [2p(1-p)]^3 p^2 + \cdots$. Explique qué significa cada término, por qué esa serie geométrica converge y calcule su suma. Si $p = 0{,}6$, usted es mejor que su contrincante. Demuestre que tiene más probabilidad de ganar un desempate que de ganar un punto. La extraña forma de puntuación del tenis hace más probable que el mejor jugador sea el vencedor.

48. A la 1:00 en punto, la aguja de las horas en un reloj apunta al 1 y la de los minutos al 12. Cuando la de los minutos llega al 1, la de las horas ha avanzado hasta $1 + \frac{1}{12}$. Cuando la de los minutos llega a $1 + \frac{1}{12}$, la de las horas se ha movido hasta $1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{12^2}$. Hallar la suma de una serie geométrica para saber a qué hora están en la misma posición las dos manecillas del reloj.

49. Dos ciclistas distan 40 millas y avanzan a 20 mph uno hacia el otro. Una mosca, que vuela a 60 mph, va desde uno de ellos hasta el otro. Cuando llega hasta éste, regresa a donde está el otro. A continuación, vuelve a donde está el otro, etc., y así hasta que los dos ciclistas se encuentran. Calcular la distancia recorrida por la mosca en cada trayecto y hallar la suma de la serie geométrica para determinar la distancia total recorrida por la mosca. Verificar que la respuesta es correcta resolviendo el problema de otra manera muy simple.

50. Exhibir dos series $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, ambas divergentes, tales que $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ sea convergente.

51. Supongamos que se ponen en circulación billetes falsos por valor de 100.000 euros y que, cada vez que se usa ese dinero falso, el 25% de los billetes falsificados que siguen en curso son identificados y retirados de la circulación. Determinar la cantidad de dinero falso usado en transacciones sucesivas. Esto es un ejemplo de lo que se llama **efecto multiplicador** en Economía.

52. En el ejercicio 51, supongamos que un nuevo sistema de control eleva el porcentaje de detección a un 40%. Calcular la reducción del total de dinero falso que opera en transacciones sucesivas.

53. En tiempos $t = 0, 1, 2, \ldots$ se administra una dosis $d$ de un fármaco cuya presencia en la sangre decrece exponencialmente a un ritmo $r$. Tras $n + 1$ dosis, la cantidad de fármaco en la sangre es $d + de^{-r} + de^{-2r} + \cdots + de^{-nr}$. Demostrar que el nivel del fármaco en la sangre sería, después de infinitas dosis hipotéticas, $\frac{d}{1-e^{-r}}$. Si $r = 0{,}1$, calcular la dosis necesaria para mantener un nivel 2 en sangre.

54. El **conjunto de Cantor** es uno de los conjuntos más famosos en Matemáticas. Para construirlo se parte del intervalo $[0, 1]$. Se suprime el tercio central $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ y quedan en el conjunto $\left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$. A cada uno de estos dos subconjuntos le quitamos su tercio central, respectivamente, $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ y $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$. Continuando este proceso, consistente en suprimir el tercio central de cada subintervalo que va quedando, se obtiene el conjunto de Cantor, que consta de todos los puntos de $[0, 1]$ que **no** son suprimidos en ninguno de los pasos de ese proceso. Argumentar que $0$, $1$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$ pertenecen al conjunto de Cantor. Identificar otros cuatro puntos de este conjunto. Se puede demostrar que hay infinitos puntos en el conjunto de Cantor. Por otra parte, la longitud suprimida en el proceso es $\frac{1}{3} + 2\left(\frac{1}{9}\right) + \cdots$. Hallar el tercer término de esta serie, identificarla como una serie geométrica convergente y calcular su suma. Puesto que habíamos comenzado con un intervalo de longitud 1, ¿qué «longitud» tiene el conjunto de Cantor?

55. Vamos a calcular el **valor actual** de una plantación. Si se planta un cultivo de valor $c$ euros en los años 1, 2, 3, etc., y la tasa de inflación anual es $r$, el valor actual viene dado por

$$P = ce^{-r} + ce^{-2r} + ce^{-3r} + \cdots.$$

Calcular la suma de esa serie geométrica para conocer el valor actual.

56. Los **productos infinitos** también son importantes para los matemáticos. Explore numéricamente la convergencia o divergencia del producto infinito $\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{25}\right)\left(1 - \frac{1}{49}\right) \cdots = \prod_{p=\text{primo}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)$. Este producto se toma sobre los números primos, no sobre todos los enteros. Compare sus resultados con el número $\frac{6}{\pi^2}$.

57. En el ejemplo 2.7 probamos que $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \ln(n+1)$. Superponer la gráfica de $f(x) = \frac{1}{x-1}$ a la figura 8.22 y demostrar que $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < \ln(n)$. Concluir que $\ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < 1 + \ln(n)$. La **constante de Euler** se define como

$$\gamma = \lim_{n \to \infty} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(n)\right].$$

Hallar, con ayuda de un PCS, el valor de $\gamma$. Usar ese valor para estimar $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$ para $n = 10.000$ y $n = 100.000$.

## 8.3 EL CRITERIO INTEGRAL Y CRITERIOS DE COMPARACIÓN

Como ya hemos advertido, rara vez se logra calcular la suma exacta de una serie. Es más, para muchas series no sabemos decidir si convergen o no mirando la sucesión de sus sumas parciales. Las más de las veces será necesario recurrir a criterios indirectos de convergencia. Una vez conocido que una serie dada es convergente, se puede aproximar su suma calculando sumas parciales. En esta sección presentamos varios criterios de convergencia para series. El primero generaliza el método utilizado en la sección 8.2 para ver que la serie armónica es divergente.

Dada una serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, supongamos que existe una función $f$ tal que

$$f(k) = a_k,\ k = 1, 2, \ldots,$$

siendo $f$ continua, decreciente y con $f(x) \geq 0$ para todo $x \geq 1$. Consideremos la suma parcial $n$-ésima

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

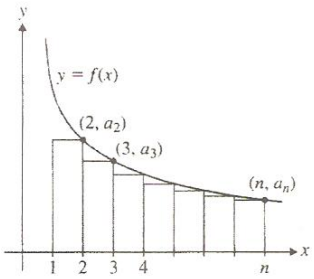



**Figura 8.23a**

$(n-1)$ rectángulos bajo la curva.

En la figura 8.23a hemos construido $(n-1)$ rectángulos sobre el intervalo $[1, n]$, cada uno de anchura 1 y de altura igual al valor de $f$ en el extremo derecho del subintervalo sobre el que se alza. Como cada rectángulo queda por debajo de la curva, la suma de sus áreas es menor que el área bajo la curva entre $x = 1$ y $x = n$. Así, pues,

$$0 \leq \text{Suma de las áreas de los } (n-1) \text{ rectángulos} \leq \text{Área bajo la curva} = \int_1^n f(x)\,dx. \qquad (3.1)$$

El área del primer rectángulo (base × altura) es $(1)(a_2)$, la del segundo $(1)(a_3)$, etc. Por tanto, la suma de las áreas de los $(n-1)$ rectángulos de la figura 8.23a es

$$a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n = S_n - a_1,$$

ya que

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Combinado con (3.1), esto implica que

$$0 \leq \text{Suma de las áreas de los } (n-1) \text{ rectángulos}$$

$$= S_n - a_1 \leq \text{Área bajo la curva} = \int_1^n f(x)\,dx. \qquad (3.2)$$

Ahora supongamos que la integral impropia $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ es convergente. En tal caso, de (3.2) se deduce que

$$0 \leq S_n - a_1 \leq \int_1^n f(x)\,dx \leq \int_1^{\infty} f(x)\,dx.$$

Sumando $a_1$ a todos los términos, se obtiene

$$a_1 \leq S_n \leq a_1 + \int_1^{\infty} f(x)\,dx.$$

Por tanto, la sucesión de las sumas parciales $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada. Y puesto que $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ es asimismo monótona (¿por qué?), $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente por el teorema 1.4. En consecuencia, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es convergente también.

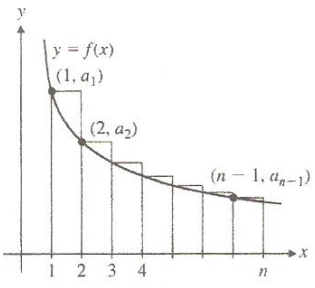



**Figura 8.23b**

$(n-1)$ rectángulos parcialmente por encima de la curva.

En la figura 8.23b hemos construido $(n-1)$ rectángulos sobre el intervalo $[1, n]$, cada uno de anchura 1 y de altura igual al valor de $f$ en el extremo izquierdo del subintervalo

**Notas históricas**

**Colin Maclaurin (1698-1746).** Matemático escocés, descubridor del criterio integral, Maclaurin fue uno de los fundadores de la Royal Society of Edinburgh y pionero en el estudio de las matemáticas actuariales. Introdujo el criterio integral en un libro, que ejerció gran influencia, que incluía además un método nuevo para obtener series de funciones. Las series de Maclaurin, como se les llama, serán objeto de estudio en la sección 8.7.

sobre el que se alza. En este caso, la suma de las áreas de los $(n-1)$ rectángulos es mayor que el área bajo la curva. Es decir,

$$0 \le \text{Área bajo la curva} = \int_1^n f(x)\,dx$$

$$\le \text{Suma de las áreas de los } (n-1) \text{ rectángulos.} \tag{3.3}$$

Además, el área del primer rectángulo es $(1)(a_1)$, la del segundo $(1)(a_2)$, etc., de modo que la suma de las áreas de los rectánguos de la figura 8.23b es

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} = S_{n-1}.$$

Junto con (3.3), esto implica que

$$0 \le \text{Área bajo la curva} = \int_1^n f(x)\,dx$$

$$\le \text{Suma de las áreas de los } (n-1) \text{ rectángulos} = S_{n-1}. \tag{3.4}$$

Ahora supongamos que la integral impropia $\int_1^\infty f(x)\,dx$ diverge. Como $f(x) \ge 0$, eso implica que $\lim_{n\to\infty} \int_1^n f(x)\,dx = \infty$. De (3.4) se sigue que

$$\int_1^n f(x)\,dx < S_{n-1}.$$

Por consiguiente, también

$$\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = \infty.$$

Así, pues, la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}_{n=1}^\infty$ diverge y, por tanto, la serie $\sum_{k=1}^\infty a_k$ diverge.

Resumimos el análisis precedente en el siguiente teorema.

**Teorema 3.1 (Criterio integral)**

Si $f(k) = a_k$ para $k = 1, 2, \ldots$ y $f$ es continua, decreciente y $f(x) \ge 0$ para $x \ge 1$, entonces $\int_1^\infty f(x)\,dx$ y $\sum_{k=1}^\infty a_k$ son **ambas** convergentes o **ambas** divergentes.

Es importante señalar que mientras el criterio integral afirma que una serie y una integral impropia convergen simultáneamente, **no** dice que convergen al mismo número. De hecho, es falso en general, como pone de manifiesto el próximo ejemplo.

**Ejemplo 3.1** **Aplicación del criterio integral**

Investigar la convergencia o divergencia de la serie $\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k^2+1}$.

**Solución** La gráfica de las primeras 20 sumas parciales (figura 8.24) sugiere que la serie converge a algún valor cercano a 2. La tabla de la página 559 muestra algunas sumas parciales con muchos sumandos debido a lo lento del ritmo de convergencia de esta serie.

Con esos datos, no podemos discernir si la serie converge muy despacio a un límite en torno a 2,076 o si diverge muy lentamente, como ocurría para la serie armónica. Para distinguir entre esas dos posibilidades hay que estudiar más a fondo la serie. Definimos $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$. Es una función, continua y positiva en todas partes, tal que $f(k) = \frac{1}{k^2+1} = a_k$, para todo $k \ge 1$. Además,

$$f'(x) = (-1)(x^2+1)^{-2}(2x) < 0,$$

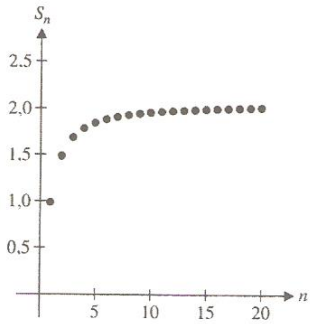



**Figura 8.24**

$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k^2+1}$.

| $n$ | $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k^2+1}$ |
|---|---|
| 10 | 1,97189 |
| 50 | 2,05648 |
| 100 | 2,06662 |
| 200 | 2,07166 |
| 500 | 2,07467 |
| 1.000 | 2,07567 |
| 2.000 | 2,07617 |

para $x \in (0, \infty)$, de modo que $f$ es decreciente. Eso implica que el criterio integral es aplicable a esta serie. Así, pues, consideramos la integral impropia

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{R\to\infty} \operatorname{tg}^{-1} x \Big|_0^R$$

$$= \lim_{R\to\infty} (\operatorname{tg}^{-1} R - \operatorname{tg}^{-1} 0) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Por el criterio integral, dado que la integral impropia es convergente, la serie debe ser convergente. Una vez demostrado que la serie converge, podemos usar nuestros cálculos previos para dar 2,076 como estimación de la suma. Nótese que este número no coincide con el valor de la integral impropia, que es $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}5708$.

En el próximo ejemplo analizamos una importante familia de series.

**Ejemplo 3.2** **Las *p*-series**

Investigar para qué valores de $p$ es convergente la ***p*-serie** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$.

**Solución** Para $p = 1$ es la serie armónica, divergente. Para $p > 1$, la función $f(x) = \frac{1}{x^p} = x^{-p}$ es continua y positiva en $x \geq 1$. Además,

$$f'(x) = -px^{-p-1} < 0,$$

de modo que $f$ es decreciente en $x \geq 1$. Por consiguiente, es aplicable el criterio integral. Ahora consideramos

$$\int_1^\infty x^{-p}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_1^R x^{-p}\,dx = \lim_{R\to\infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big|_1^R$$

$$= \lim_{R\to\infty} \left( \frac{R^{-p+1}}{-p+1} - \frac{1}{-p+1} \right) = \frac{1}{-p+1}. \qquad \text{Porque } p > 1 \text{ implica que } -p+1 < 0.$$

En este caso, la integral impropia converge y con ella la serie. Probar como ejercicio que la $p$-serie diverge cuando $p < 1$.

A continuación resumimos el resultado del ejemplo 3.2.

La $p$-serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ es convergente si $p > 1$ y divergente si $p \leq 1$.

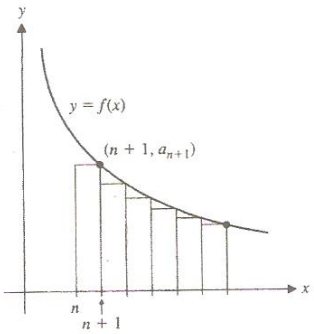



**Figura 8.25**

Estimación del resto.

En los ejemplos 3.1 y 3.2 hemos demostrado la convergencia de algunas series gracias al criterio integral. ¿Y ahora qué? Ya hemos comentado que se pueden utilizar las sumas parciales para estimar la suma de una serie, pero ¿qué precisión tiene una de tales aproximaciones?

La respuesta la dará el próximo teorema. Si estimamos la suma $s$ de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ por la suma parcial $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, el **resto** $R_n$ de la serie se define como

$$R_n = s - S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k.$$

En otras palabras, el resto es el error cometido al aproximar $s$ por $S_n$. Para cualquier serie cuya convergencia haya sido probada mediante el criterio integral podemos estimar el valor del resto como sigue. En la figura 8.25, el resto $R_n$ corresponde a la suma de las áreas de los

rectángulos indicados. Bajo las condiciones del criterio integral, ese área es menor que el área bajo la curva $y = f(x)$. (Recordemos que este área es finita, ya que $\int_1^\infty f(x)\,dx$ es convergente). Por tanto, se tiene el siguiente resultado.

**Teorema 3.2 (Estimación del error para el criterio integral)**

Supongamos que $f(k) = a_k$ para todo $k = 1, 2, \ldots$, donde $f$ es continua, decreciente y tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \geq 1$. Si $\int_1^\infty f(x)\,dx$ converge, el resto $R_n$ satisface

$$0 \leq R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \leq \int_n^\infty f(x)\,dx.$$

Este teorema permite estimar el error cometido al aproximar la suma de una serie por una de sus sumas parciales.

**Ejemplo 3.3** **Estimación del error de una suma parcial**

Estimar el error cometido al tomar la suma parcial $S_{100}$ como aproximación del valor de la suma de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$.

**Solución** Hemos demostrado ya, usando el criterio integral (ejemplo 3.2), que esta $p$-serie (con $p = 3$) es convergente. Por el teorema 3.2, el resto satisface

$$0 \leq R_{100} \leq \int_{100}^\infty \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{100}^R \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{R\to\infty} \left(-\frac{1}{2x^2}\right)_{100}^R$$

$$= \lim_{R\to\infty} \left(\frac{-1}{2R^2} + \frac{1}{2(100)^2}\right) = 5 \times 10^{-5}.$$

Una cuestión más interesante y mucho más práctica relacionada con el ejemplo 3.3 consiste en determinar, usando el teorema 3.2, cuántos términos de la serie hay que sumar para alcanzar una precisión prefijada.

**Ejemplo 3.4** **Cálculo del número de términos que garantizan una precisión prefijada**

Determinar cuántos términos son necesarios para aproximar la suma de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ con un error menor que $10^{-5}$.

**Solución** Ya hemos demostrado que la serie es convergente usando el criterio integral. Así, pues, por el teorema 3.2,

$$0 \leq R_n \leq \int_n^\infty \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_n^R \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{R\to\infty} \left(-\frac{1}{2x^2}\right)_n^R$$

$$= \lim_{R\to\infty} \left(\frac{-1}{2R^2} + \frac{1}{2n^2}\right) = \frac{1}{2n^2}.$$

Para garantizar que el error sea menor que $10^{-5}$, exigimos

$$0 \leq R_n \leq \frac{1}{2n^2} \leq 10^{-5}.$$

Despejando $n$ en esa desigualdad, obtenemos

$$n^2 \geq \frac{10^5}{2}, \quad \text{o sea,} \quad n \geq \sqrt{\frac{10^5}{2}} = 100\sqrt{5} \approx 223{,}6.$$

Por tanto, tomando $n \geq 224$ está asegurada la precisión requerida y, en consecuencia, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \approx \sum_{k=1}^{224} \frac{1}{k^3} = 1{,}202047$, con error menor que $10^{-5}$, como deseábamos.

## Criterios de comparación

Vamos a enunciar dos criterios que permiten comparar una serie dada con otra cuyo carácter convergente o divergente es conocido de antemano, del mismo modo que se hizo en el criterio integral (sección 7.7).

---

**Teorema 3.3 (Criterio de comparación)**

Supongamos que $0 \leq a_k \leq b_k$, para todo $k$.

(i) Si $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ converge, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge.

(ii) Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ diverge.

---

Intuitivamente, es claro: si la serie «mayor» converge, la menor con más razón. Y si la serie «menor» diverge, la mayor con más razón.

---

**Demostración**

Como $0 \leq a_k \leq b_k$, para todo $k$, las sumas parciales $n$-ésimas de las dos series satisfacen

$$0 \leq S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq b_1 + b_2 + \cdots + b_n.$$

(i) Si $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ converge a $B$, eso implica que

$$0 \leq S_n \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq b_1 + b_2 + \cdots + b_n \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k = B, \tag{3.5}$$

para todo $n \geq 1$. Por (3.5), la sucesión $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ de sumas parciales de $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es acotada. Además, $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ es creciente. (¿Por qué?). Puesto que toda sucesión monótona y acotada es convergente (teorema 1.4), concluimos que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es asimismo convergente.

(ii) Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es divergente, al ser no negativos todos los términos de la serie, se tiene

$$\lim_{n \to \infty} (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \geq \lim_{n \to \infty} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = \infty.$$

Así, pues, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ también es divergente.

---

Se suele usar el criterio de comparación para series de aspecto similar a otras ya analizadas (especialmente, series geométricas y $p$-series).

### Ejemplo 3.5 Aplicación del criterio de comparación a una serie convergente

Investigar la convergencia o divergencia de $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3 + 5k}$.

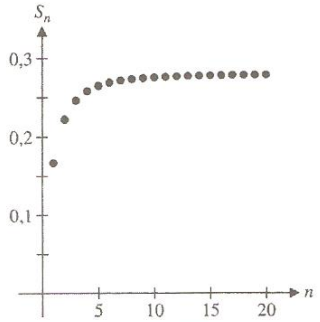



Figura 8.26

$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3 + 5k}$.

**Solución** La figura 8.26, que muestra las 20 primeras sumas parciales, parece indicar que la serie converge a un valor próximo a 0,3. Para confirmar esa conjetura, hay que estudiar la serie con cuidado. Para grandes $k$, el término general es casi igual a $\frac{1}{k^3}$, ya que entonces $5k$ es despreciable frente a $k^3$. Esta observación es importante, porque sabemos ya que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ es una $p$-serie convergente ($p = 3 > 1$). Además,

$$\frac{1}{k^3 + 5k} \leq \frac{1}{k^3},$$

para todo $k \geq 1$. Como $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ converge, el teorema de comparación asegura que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3 + 5k}$ converge también. Análogamente a lo que comentamos para el criterio integral, el criterio de comparación afirma que ambas series convergen simultáneamente, pero **no tienen por qué tener la misma suma**. El cálculo de unas cuantas sumas parciales muestra que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ converge aproximadamente a 1,202 y $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3 + 5k}$ aproximadamente a 0,2798 (consistente con la figura 8.26).

### Ejemplo 3.6 Aplicación del criterio de comparación a una serie divergente

Investigar si es convergente la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k + 1}{2^k - 1}$.

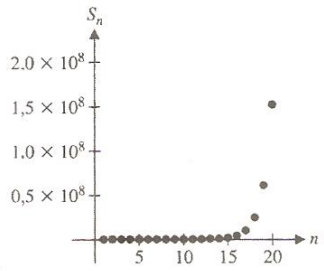



Figura 8.27

$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{5^k + 1}{2^k - 1}$.

**Solución** La gráfica de sus 20 primeras sumas parciales (figura 8.27) indica que las sumas parciales crecen muy rápidamente. Por tanto, conjeturamos que la serie diverge. Naturalmente, para verificarlo hay que estudiar la serie. Para grandes $k$, el término general es casi igual a $\frac{5^k}{2^k} = \left(\frac{5}{2}\right)^k$ y sabemos que $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{5}{2}\right)^k$ es una serie geométrica divergente $\left(|r| = \frac{5}{2} > 1\right)$. Además,

$$\frac{5^k + 1}{2^k - 1} \geq \frac{5^k}{2^k - 1} \geq \frac{5^k}{2^k} = \left(\frac{5}{2}\right)^k.$$

Por el criterio de comparación, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k + 1}{2^k - 1}$ también es divergente.

Hay muchas series cuyo término general es parecido al de alguna serie familiar, pero no siempre está claro cómo obtener la desigualdad requerida para que el criterio de comparación apunte en la dirección adecuada.

### Ejemplo 3.7 Una comparación que no ayuda

Investigar la convergencia o divergencia de la serie $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k^3 - 5k}$.

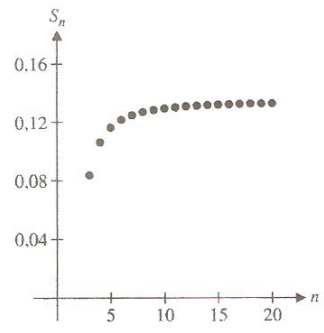



Figura 8.28

$S_n = \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k^3 - 5k}$.

**Solución** Esta serie es casi idéntica a la del ejemplo 3.5, salvo el signo «–» en el denominador. La gráfica de sus 20 primeras sumas parciales (figura 8.28) es análoga a la de la figu-

ra 8.26, excepto que la serie parece converger a un número cercano a 0,12. En este caso, se tiene la desigualdad

$$\frac{1}{k^3 - 5k} \geq \frac{1}{k^3}, \text{ para todo } k \geq 3,$$

que, por desgracia, va en la **mala dirección**: sabemos que $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ es una $p$-serie convergente, pero como $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k^3 - 5k}$ es «mayor» que ella, el criterio de comparación no concluye nada.

Mire de esta manera lo que ocurre en el ejemplo 3.7: aunque

$$k^2 \geq \frac{1}{k^3}, \text{ para todo } k \geq 1,$$

y sabemos que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ es convergente, el criterio de comparación no dice nada sobre la serie «mayor» $\sum_{k=1}^{\infty} k^2$. De hecho, sabemos que esta serie es divergente (por el criterio del término general, ya que $\lim_{k \to \infty} k^2 = \infty \neq 0$). En casos así, hay que buscar otra comparación más apropiada o bien utilizar el **criterio de comparación asintótica** (o comparación en el límite) que enunciamos a continuación.

**Advertencia**

Al escribir $\lim_{k \to \infty} \frac{a_k}{b_k} = L > 0$, queremos decir que el límite existe y es positivo. En particular, se está afirmando que $\lim_{k \to \infty} \frac{a_k}{b_k} \neq \infty$.

**Teorema 3.4 (Criterio de comparación asintótica)**

Sean $a_k > 0$, $b_k > 0$ y supongamos que para algún valor $L$ (finito), $\lim_{k \to \infty} \frac{a_k}{b_k} = L > 0$. Entonces las series $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ son **ambas** convergentes o **ambas** divergentes.

**Demostración**

El hecho de que $\lim_{k \to \infty} \frac{a_k}{b_k} = L > 0$ significa que podemos hacer $\frac{a_k}{b_k}$ tan próximo a $L$ como queramos. En particular, podemos hacer que $\frac{a_k}{b_k}$ esté a distancia menor que $\frac{L}{2}$ de $L$. Esto es, para algún número $N > 0$,

$$L - \frac{L}{2} < \frac{a_k}{b_k} < L + \frac{L}{2}, \text{ para todo } k > N$$

o sea,

$$\frac{L}{2} < \frac{a_k}{b_k} < \frac{3L}{2}. \tag{3.6}$$

Multiplicando la desigualdad (3.6) por $b_k$ (recordemos que $b_k > 0$), queda

$$\frac{L}{2} b_k < a_k < \frac{3L}{2} b_k, \text{ para todo } k \geq N.$$

Así, pues, si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, la serie «menor» $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{L}{2} b_k\right) = \frac{L}{2} \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ también debe ser convergente. Análogamente, si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge, la serie «mayor» $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3L}{2} b_k\right) = \frac{3L}{2} \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ también es

divergente. Asimismo, si $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ converge, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3L}{2} b_k\right)$ converge, luego también la serie «menor» $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Y, finalmente, si $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ diverge, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{L}{2} b_k\right)$ diverge y, por tanto, diverge también la serie «mayor» $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

---

Podemos aplicar el criterio de comparación asintótica a la serie del ejemplo 3.7, cuya convergencia o divergencia no ha sido establecida.

**Ejemplo 3.8** **Aplicación del criterio de comparación asintótica**

Investigar la convergencia de la serie $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k^3 - 5k}$.

**Solución** Ya dijimos, en el ejemplo 3.7, que el término general $a_k = \frac{1}{k^3 - 5k}$ «es parecido a» $b_k = \frac{1}{k^3}$, para $k$ grandes. Así, pues, consideramos el límite

$$\lim_{k \to \infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k \to \infty} \left(a_k \frac{1}{b_k}\right) = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{(k^3 - 5k)} \frac{1}{\left(\frac{1}{k^3}\right)} = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{1 - \frac{5}{k^2}} = 1 > 0.$$

Como $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ es una $p$-serie convergente ($p = 3 > 1$), el criterio de comparación asintótica asegura que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3 - 5k}$ también es convergente, como habíamos sospechado desde un primer momento.

---

El criterio de comparación asintótica resuelve la cuestión de la convergencia para muchas series. El primer paso, cuando se usa ese criterio, consiste en encontrar otra serie (cuya convergencia o divergencia sea ya conocida) «parecida» a la serie dada.

**Ejemplo 3.9** **Aplicación del criterio de comparación asintótica**

Investigar la convergencia de la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 - 2k + 7}{k^5 + 5k^4 - 3k^3 + 2k - 1}.$$

**Solución** La gráfica de sus 20 primeras sumas parciales (figura 8.29) sugiere que la serie converge a un límite en torno a 1,61. La tabla de los valores de esas 20 sumas parciales corrobora esa sospecha.

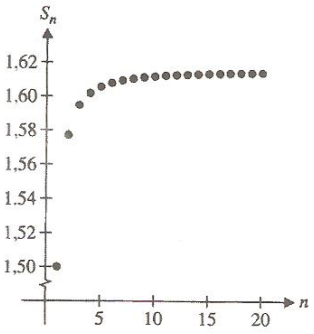



**Figura 8.29**

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2 - 2k + 7}{k^5 + 5k^4 - 3k^3 + 2k - 1}.$$

| $n$ | $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2 - 2k + 7}{k^5 + 5k^4 - 3k^3 + 2k - 1}$ |
|---|---|
| 5 | 1,60522 |
| 10 | 1,61145 |
| 20 | 1,61365 |
| 50 | 1,61444 |
| 75 | 1,61453 |
| 100 | 1,61457 |

Para grandes $k$, el término general se parece a $\dfrac{k^2}{k^5} = \dfrac{1}{k^3}$ (porque los términos de potencias más grandes tienden a dominar la expresión cuando $k$ es muy grande). Para poder aplicar el criterio de comparación asintótica, necesitamos calcular

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} &= \lim_{k\to\infty} \frac{k^2-2k+7}{k^5+5k^4-3k^3+2k-1} \Big/ \frac{1}{\left(\frac{1}{k^3}\right)} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{(k^2-2k+7)}{(k^5+5k^4-3k^3+2k-1)} \frac{k^3}{1} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{(k^5-2k^4+7k^3)}{(k^5+5k^4-3k^3+2k-1)} \Big/ \frac{\left(\frac{1}{k^5}\right)}{\left(\frac{1}{k^5}\right)} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{1-\frac{2}{k}+\frac{7}{k^2}}{1+\frac{5}{k}-\frac{3}{k^2}+\frac{2}{k^4}-\frac{1}{k^5}} = 1 > 0.
\end{aligned}$$

Como $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^3}$ es una $p$-serie convergente ($p = 3 > 1$), el criterio de comparación asintótica nos dice que $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{k^2-2k+7}{k^5+5k^4-3k^3+2k-1}$ es convergente. Finalmente, ahora que ya hemos demostrado su convergencia, podemos usar la tabla de sumas parciales para dar 1,61457 como valor aproximado de su suma.

---

# EJERCICIOS 8.3

1. El criterio de comparación no siempre decide acerca de la convergencia o divergencia. Si $a_k \le b_k$ para todo $k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ diverge, explicar por qué no se puede concluir si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge o no.

2. Argumentar por qué el criterio de comparación asintótica funciona. En particular, si $\lim_{k\to\infty} \dfrac{a_k}{b_k} = 1$, explicar cómo se comparan $a_k$ y $b_k$ y concluir que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ convergen o divergen simultáneamente.

3. En el criterio de comparación asintótica, si $\lim_{k\to\infty} \dfrac{a_k}{b_k} = 0$ y $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es convergente, explicar por qué no es posible decidir si $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ converge o no.

4. Una $p$-serie converge si $p > 1$ y diverge si $p < 1$. ¿Qué ocurre si $p = 1$? Si un compañero sabe ya que la serie armónica diverge, explíquele una forma sencilla de recordar el resto de la conclusión sobre la convergencia de las $p$-series.

**En los ejercicios 5-40, analizar si la serie dada es convergente o divergente.**

5. $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{4}{\sqrt[3]{k}}$

6. $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-9/10}$

7. $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-11/10}$

8. $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{4}{\sqrt{k}}$

9. $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{k+1}{k^2+2k+3}$

10. $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{k^2+1}{k^3+3k+2}$

11. $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{4}{2+4k}$

12. $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{4}{(2+4k)^2}$

13. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{k \ln k}$

14. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{3}{k(\ln k)^2}$

15. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{k^3+1}$

16. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{k2+1}$

17. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{1/k}}{k^2}$

18. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1+1/k}}{k^2}$

19. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{k}}}{\sqrt{k}}$

20. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{ke^{-k^2}}{4+e^{-k}}$

21. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k}{k^{3/2}+2}$

22. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^2}{k^{5/2}+2}$

23. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{k^2+4}}$

24. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\sqrt{k^3+1}}$

25. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2+1}{\sqrt{k^5+1}}$

26. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+2}{\sqrt[3]{k^5+4}}$

27. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tg}^{-1} k}{1+k^2}$

28. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^{-1}(1/k)}{k^2}$

29. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\cos^2 k}$

30. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{sen}^2 k}$

31. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} k+2}{k^2}$

32. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{1/k}+1}{k^3}$

33. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln k}{k}$

34. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2+\cos k}{k}$

35. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^4+2k-1}{k^5+3k^2+1}$

36. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^3+2k+3}{k^4+2k^2+4}$

37. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k+2}$

38. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^2+2}$

39. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^3+2}$

40. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^4+2}$

41. En el enunciado del criterio de comparación se ha exigido $a_k \le b_k$ para todo $k$. Explicar por qué la conclusión sigue siendo válida si $a_k \le b_k$ para $k \ge 100$.

42. Si $a_k > 0$ y $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, probar que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ converge.

43. Demostrar la siguiente extensión del criterio de comparación asintótica: si $\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = 0$ y $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ converge, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge.

44. Demostrar la siguiente extensión del criterio de comparación asintótica: si $\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \infty$ y $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ diverge, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge.

**En los ejercicios 45-48, determinar todos los valores de $p$ para los cuales la serie es convergente.**

45. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^p}$

46. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(a+bk)^p}, a>0, b>0$

47. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln k}{k^p}$

48. $\sum_{k=1}^{\infty} k^{p-1}e^{k^p}$

**En los ejercicios 49-54, estimar el error cometido al tomar la suma parcial especificada $S_n$ como aproximación de la suma de la serie.**

49. $S_{100}, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$

50. $S_{100}, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2}$

51. $S_{50}, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{6}{k^8}$

52. $S_{80}, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2+1}$

53. $S_{40}, \sum_{k=1}^{\infty} ke^{-k^2}$

54. $S_{200}, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tg}^{-1} k}{1+k^2}$

**En los ejercicios 55-58, calcular el número de términos que hay que sumar para conseguir una aproximación con error menor que $10^{-6}$.**

55. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{k^4}$

56. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2}$

57. $\sum_{k=1}^{\infty} ke^{-k^2}$

58. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^5}$

**En los ejercicios 59 y 60, responder «converge», «diverge» o «no se puede decidir». Suponemos $a_k > 0$ y $b_k > 0$.**

59. Suponiendo que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es convergente, rellenar los espacios vacíos.

(a) Si $b_k \ge a_k$ para $k \ge 10$, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ _____ .

(b) Si $\lim_{k\to\infty} \frac{b_k}{a_k} = 0$, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ _____ .

(c) Si $b_k \le a_k$ para $k \ge 6$, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ _____ .

(d) Si $\lim_{k\to\infty} \frac{b_k}{a_k} = \infty$, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ _____ .

60. Suponiendo que $\sum_{k=1}^{\infty}$ es divergente, rellenar los espacios vacíos.

(a) Si $b_k \ge a_k$ para $k \ge 10$, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ _____ .

(b) Si $\lim_{k\to\infty} \frac{b_k}{a_k} = 0$, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ _____ .

(c) Si $b_k \le a_k$ para $k \ge 6$, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ _____ .

(d) Si $\lim_{k\to\infty} \frac{b_k}{a_k} = \infty$, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ _____ .

61. Demostrar que la serie armónica de términos impares $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots$ es divergente. (Ayuda: Escribirla como $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1}$ y usar el criterio de comparación asintótica).

62. ¿Es divergente la serie $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{10} + \cdots$ obtenida de la armónica conservando uno de cada tres términos? ¿Y la serie $1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{13} + \ldots$ resultante al conservar uno de cada cuatro? Formular una propiedad lo más general posible acerca de esa colección de series.

63. La **función zeta de Riemann** se define como $\zeta(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x}$, para $x > 1$. Explicar por qué es necesaria la restricción $x > 1$. Leonhard Euler, uno de los más grandes y prolíficos matemáticos de todos los tiempos, probó el notable resultado

$$\zeta(x) = \prod_{p \text{ primo}} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{p^x}\right)}.$$

64. Estimar $\zeta(2)$ numéricamente. Comparar el resultado con el del ejercicio 56 de la sección 8.2.

**En los ejercicios 65-68, usar un PCS para estimar numéricamente la suma de la *p*-serie convergente e identificar un $x$ para el que la suma sea igual a $\zeta(x)$, siendo $z$ la función zeta de Riemann del ejercicio 63.**

65. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$

66. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6}$

67. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^8}$

68. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{10}}$

69. Investigar numéricamente las *p*-series $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{0,9}}$ y $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1,1}}$, así como para otros valores de $p$ próximos a 1. ¿Puede distinguir convergencia y divergencia numéricamente?

70. Sabemos que $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}$ es divergente. Es la *p*-serie «más pequeña» que diverge, en el sentido de que $\frac{1}{k} < \frac{1}{k^p}$ para $p < 1$. Demostrar que $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$ diverge y $\frac{1}{k \ln k} < \frac{1}{k}$. Probar además que $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k \ln(\ln k)}$ diverge y $\frac{1}{k \ln k \ln(\ln k)} < \frac{1}{k \ln k}$. Hallar una serie tal que $\sum_{k=2}^{\infty} a_k$ diverge y $a_k < \frac{1}{k \ln k \ln(\ln k)}$. ¿Existe «la serie divergente más pequeña»?

## 8.4 SERIES ALTERNADAS

Hasta ahora hemos estudiado series cuyos términos son todos positivos. Antes de considerar el caso más general, analizamos en esta sección las **series alternadas**, cuyos términos son alternativamente positivos y negativos. Y lo hacemos por dos razones: son frecuentes en las aplicaciones y su comportamiento es sorprendentemente fácil de investigar.

Se llama **serie alternada** a cualquier serie de la forma

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + \cdots,$$

donde $a_k > 0$ para todo $k$.

### Ejemplo 4.1 La serie armónica alternada

Investigar la convergencia o divergencia de la **serie armónica alternada**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$$

**Solución** La gráfica de sus 20 primeras sumas parciales (figura 8.30) sugiere que la serie converge a un valor en torno a 0,7. Calculamos unas cuantas sumas parciales a mano:

$$S_1 = 1,$$

$$S_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

$$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6},$$

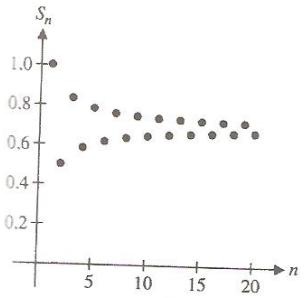



**Figura 8.30**

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

| $n$ | $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | 0,5 |
| 3 | 0,83333 |
| 4 | 0,58333 |
| 5 | 0,78333 |
| 6 | 0,61667 |
| 7 | 0,75952 |
| 8 | 0,63452 |
| 9 | 0,74563 |
| 10 | 0,64563 |
| 11 | 0,73654 |
| 12 | 0,65321 |
| 13 | 0,73013 |
| 14 | 0,65871 |
| 15 | 0,72537 |
| 16 | 0,66287 |
| 17 | 0,7217 |
| 18 | 0,66614 |
| 19 | 0,71877 |
| 20 | 0,66877 |

$$S_4 = \frac{5}{6} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12},$$

$$S_5 = \frac{7}{12} + \frac{1}{5} = \frac{47}{60},$$

$$S_6 = \frac{47}{60} - \frac{1}{6} = \frac{37}{60},$$

$$S_7 = \frac{37}{60} + \frac{1}{7} = \frac{319}{420},$$

$$S_8 = \frac{319}{420} - \frac{1}{8} = \frac{533}{840}$$

Hemos representado estos 8 valores en la figura 8.31.

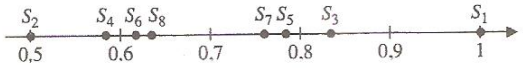



**Figura 8.31**

Sumas parciales de $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

Las sumas oscilan arriba y abajo, pero parecen acercarse a un cierto número. (¿Será ese número la suma de la serie?). No debe extrañar ese comportamiento, ya que al ir sumando o restando cada término, sumamos o restamos algo menos que lo que acabábamos de *restar o sumar* (¿por qué invertimos el orden aquí?) al obtener la anterior suma parcial. La misma tendencia hacia un número se advierte en la tabla del margen, que muestra las primeras 20 sumas parciales. Por tanto, parece razonable conjeturar que la serie converge a un valor entre 0,66877 y 0,71877. El teorema que sigue zanja definitivamente la cuestión de la convergencia de esta serie.

**Teorema 4.1 (Criterio de las series alternadas)**

Si $\lim_{k \to \infty} a_k = 0$ y $0 < a_{k+1} \leq a_k$ para todo $k \geq 1$, la serie alternada $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$ es convergente.

Antes de demostrarlo, comprenda bien su significado. En una serie alternada que satisfaga sus hipótesis, partimos de 0 y le sumamos $a_1 > 0$ para obtener la primera suma parcial $S_1$. Para obtener la segunda, $S_2$, restamos $a_2$ de $S_1$, donde $a_2 < a_1$. Esto implica que $S_2$ está entre 0 y $S_1$. La figura 8.32 ilustra la situación.

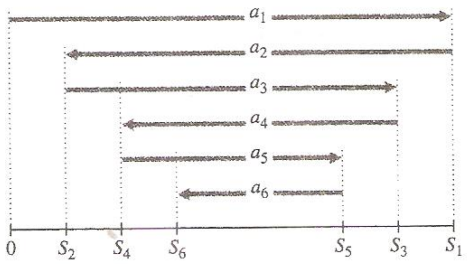



**Figura 8.32**

Convergencia de las sumas parciales de una serie alternada.

Continuando de esa manera, sumamos $a_3$ a $S_2$ y obtenemos $S_3$. Como $a_3 < a_2$, se tiene $S_2 < S_3 < S_1$. Así, van siendo, como indica la figura 8.32,

$$S_2 < S_4 < S_6 < \cdots < S_5 < S_3 < S_1.$$

En particular, **todas** las sumas de índice impar, $S_{2n+1}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, son mayores que **todas** las de índice par, $S_{2n}$, con $n = 1, 2, \ldots$ Y como las sumas parciales oscilan arriba y abajo, deben aproximarse a algún valor límite $S$, que estará entre las sumas de índice impar y las de índice par.

$$S_2 < S_4 < S_6 < \cdots < S < \cdots < S_5 < S_3 < S_1. \tag{4.1}$$

**Demostración**

Vemos en la figura 8.32 que las sumas de índice par y las de índice impar se comportan de manera distinta. Por lo que se refiere a las de índices pares, se tiene

$$S_2 = a_1 - a_2 > 0$$

y

$$S_4 = S_2 + (a_3 - a_4) \geq S_2,$$

ya que $(a_3 - a_4) \geq 0$. Análogamente, para todo $n$,

$$S_{2n} = S_{2n-2} + (a_{2n-1} - a_{2n}) \geq S_{2n-2},$$

porque $(a_{2n-1} - a_{2n}) \geq 0$. Por tanto, la sucesión de sumas parciales con índice par $\{S_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ es creciente (figura 8.32). Además,

$$0 < S_{2n} = a_1 + (-a_2 + a_3) + (-a_4 + a_5) + \cdots + (-a_{2n-2} + a_{2n-1}) - a_{2n} \leq a_1,$$

para todo $n$, ya que cada paréntesis tiene valor negativo. Así, pues, $\{S_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada (por $a_1$) y monótona (creciente). Por el teorema 1.4, $\{S_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente a algún número, digamos $L$.

Para la sucesión de sumas parciales con índices impares, se tiene

$$S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}.$$

De ahí se sigue que

$$\lim_{n \to \infty} S_{2n+1} = \lim_{n \to \infty} (S_{2n} + a_{2n+1}) = \lim_{n \to \infty} S_{2n} + \lim_{n \to \infty} a_{2n+1} = L + 0 = L,$$

porque $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$. Como la sucesión de sumas parciales de índices impares $\{S_{2n+1}\}_{n=0}^{\infty}$ y la de índices pares $\{S_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ convergen al mismo límite $L$, concluimos que

$$\lim_{n \to \infty} S_n = L.$$

**Ejemplo 4.2** **Aplicación del criterio de series alternadas**

Analizar de nuevo la convergencia de la serie armónica alternada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

**Solución** Para esta serie,

$$\lim_{k \to \infty} a_k = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} = 0.$$

Además,

$$0 < a_{k+1} = \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k} = a_k, \text{ para todo } k \geq 1.$$

Por el criterio de series alternadas, esta serie es convergente. (Puede obtener una suma aproximada usando los cálculos del ejemplo 4.1).

El criterio de series alternadas es, sin duda, el criterio de convergencia más sencillo discutido hasta ahora. Es muy directo, aunque a veces hay que trabajar un poco para verificar sus hipótesis.

### Ejemplo 4.3 Aplicación del criterio de series alternadas

Investigar la convergencia de la serie alternada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k(k+3)}{k(k+1)}$.

**Solución** La gráfica de sus 20 primeras sumas parciales (figura 8.33) sugiere que la serie converge a algún valor en torno a – 1,5. La tabla muestra los valores de unas cuantas sumas parciales y empuja hacia la misma sospecha.

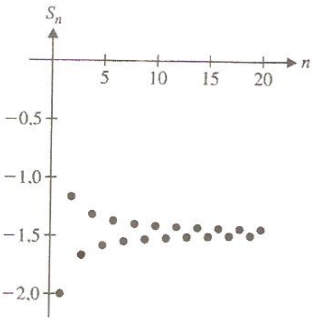



**Figura 8.33**

$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k(k+3)}{k(k+1)}$.

| $n$ | $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k(k+3)}{k(k+1)}$ |
|---|---|
| 50 | –1,45545 |
| 100 | –1,46066 |
| 200 | –1,46322 |
| 300 | –1,46406 |
| 400 | –1,46448 |

| $n$ | $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k(k+3)}{k(k+1)}$ |
|---|---|
| 51 | –1,47581 |
| 101 | –1,47076 |
| 201 | –1,46824 |
| 301 | –1,46741 |
| 401 | –1,46699 |

Para verificar rigurosamente que la serie converge, comprobamos en primer lugar que

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+3)}{k(k+1)} \frac{\frac{1}{k^2}}{\frac{1}{k^2}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k} + \frac{3}{k^2}}{1 + \frac{1}{k}} = 0.$$

A continuación, consideramos el cociente entre términos sucesivos:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+4)}{(k+1)(k+2)} \frac{k(k+1)}{(k+3)} = \frac{k^2+4k}{k^2+5k+6} < 1,$$

para todo $k \geq 1$. De ahí que $a_{k+1} < a_k$, para todo $k \geq 1$. Así, pues, por el criterio de series alternadas, la serie converge. La tabla indica que su suma está entre –1,46448 y –1,46699. (¿Por qué estamos seguros de que la suma está en ese intervalo?).

### Ejemplo 4.4 Una serie alternada divergente

Investigar la convergencia de la serie alternada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{k+2}$.

**Solución** Antes de nada, observamos que

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+2} = 1 \neq 0.$$

En consecuencia, esta serie alternada es divergente, ya que, según el criterio del término general, para que una serie pueda ser convergente es necesario que su término general tienda a cero.

## Estimación de la suma de una serie alternada

Ya hemos dicho que, una vez sabido que una serie converge, su suma se puede aproximar mediante sumas parciales. Ahora bien, ¿cómo es de precisa la aproximación que da una suma parcial? No hay respuesta universal, dado que la cuestión depende mucho del contexto. Por ejemplo, si la suma de una serie se va a usar para calcular con qué ángulo se lanza una pelota a un amigo, se puede admitir una respuesta poco precisa, que no sería admisible si el ángulo a estimar es el que garantice el regreso seguro a la atmósfera terrestre de un transbordador espacial.

Hasta ahora hemos calculado las sumas aproximadas de series observando que varias sumas parciales sucesivas se mantienen a menos de una cierta distancia unas de otras. Al obrar así hemos dado por supuesto, como hipótesis implícita, que cuando eso ocurre las sumas parciales distan también menos que esa distancia de la suma verdadera. Por desgracia, esto no es cierto en general (sí lo es para algunas series). ¿Qué hacer? En el caso de series alternadas, somos muy afortunados. Disponemos de un método muy simple para controlar el error. Nótese que el error cometido al tomar la suma parcial $S_n$ como aproximación de la suma verdadera $S$ es $S - S_n$.

Vuelva a mirar la figura 8.32. Todas las sumas parciales de índice par de una serie alternada convergente $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$ son menores que la suma $S$, y todas las de índice impar son mayores que $S$. Es decir, [como en (4.1)],

$$S_2 < S_4 < S_6 < \ldots < S < \ldots < S_5 < S_3 < S_1.$$

Así, pues, para $n$ par,

$$S_n \leq S \leq S_{n+1}.$$

Restando $S_n$ de todos los términos de esta doble desigualdad, se obtiene

$$0 \leq S - S_n \leq S_{n+1} - S_n = a_{n+1}.$$

De $a_{n+1} > 0$, se sigue que

$$-a_{n+1} \leq 0 \leq S - S_n \leq a_{n+1},$$

o sea,

$$|S - S_n| \leq a_{n+1}, \text{ para } n \text{ par.} \tag{4.2}$$

Análogamente, para $n$ impar,

$$S_{n+1} \leq S \leq S_n.$$

Restando $S_n$ de nuevo, se obtiene

$$-a_{n+1} = S_{n+1} - S_n \leq S - S_n \leq 0 \leq a_{n+1},$$

es decir,

$$|S - S_n| \leq a_{n+1}, \text{ para } n \text{ impar} \tag{4.3}$$

Como (4.2) y (4.3) (que se llaman **cotas de error**) son iguales, tenemos la misma cota de error cuando $n$ es par o impar. Esto establece el siguiente resultado.

---

**Teorema 4.2**

Si $\lim_{k \to \infty} a_k = 0$ y $0 < a_{k+1} \leq a_k$ para todo $k \geq 1$, la serie alternada $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$ converge a algún número $S$ (la suma de la serie) y el error cometido al aproximar $S$ por la $n$-ésima suma parcial $S_n$ satisface

$$|S - S_n| \leq a_{n+1}. \tag{4.4}$$

---

Eso quiere decir que el error, al aproximar $S$ por $S_n$, no es mayor que $a_{n+1}$ (valor absoluto del primer término desechado).

**Ejemplo 4.5** **Estimación de la suma de una serie alternada**

Aproximar la suma de la serie alternada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^4}$ mediante la suma parcial $S_{40}$ y estimar el error de tal aproximación.

**Solución** Dejamos como ejercicio demostrar que la serie es convergente. Aproximamos la suma por

$$S \approx S_{40} = 0{,}9470326439.$$

De la estimación del error (4.4) se sigue que

$$|S - S_{40}| \leq a_{41} = \frac{1}{41^4} = 3{,}54 \times 10^{-7}.$$

Eso significa que nuestra aproximación $S \approx 0{,}9470326439$ difiere de la suma exacta en menos de $\pm 3{,}54 \times 10^{-7}$.

Una cuestión aún más interesante que la planteada en el ejemplo 4.5 es saber cuántos términos hay que sumar para lograr una aproximación de precisión prefijada. La misma cota de error (4.4) permite responder esa pregunta, como muestra el próximo ejemplo.

**Ejemplo 4.6** **Cálculo del número de términos necesarios para una precisión dada**

Sea la serie alternada convergente $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^4}$. ¿Cuántos términos hay que sumar para que $S_n$ difiera de la suma exacta $S$ menos que $1 \times 10^{-10}$?

**Solución** En este caso queremos hallar un número $n$ de términos tal que

$$|S - S_n| \leq 1 \times 10^{-10}.$$

Por (4.4), se tiene

$$|S - S_n| \leq a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^4}.$$

Así, pues, buscamos un $n$ tal que

$$\frac{1}{(n+1)^4} \leq 1 \times 10^{-10}.$$

Resolviendo en $n$, resulta

$$10^{10} \leq (n+1)^4,$$

de donde

$$\sqrt[4]{10^{10}} \leq n + 1,$$

o sea,

$$n \geq \sqrt[4]{10^{10}} - 1 \approx 315{,}2$$

Por tanto, tomando $n \geq 316$ tenemos garantizado que el error será menor que $1 \times 10^{-10}$. Con ese número mínimo de términos se obtiene la aproximación

$$S \approx S_{316} = 0{,}947032829447,$$

y estamos seguros de que es correcta con una precisión de al menos $1 \times 10^{-10}$.

# EJERCICIOS 8.4

1. Si $a_k \geq 0$, explicar, en términos de sumas parciales, por qué es más fácil la convergencia de $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$ que la de $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

2. Explicar por qué en el teorema 4.2 necesitamos suponer $a_{k+1} \leq a_k$. Es decir, ¿qué fallaría en la demostración si $a_{k+1} > a_k$?

3. Hemos enunciado el criterio de series alternadas para la serie $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$. Explicar la diferencia entre $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k} a_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$ y justificar por qué es preferible enunciar el teorema para $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k} a_k$.

4. Un error común consiste en creer que si $\lim_{k \to \infty} a_k = 0$, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge. Explicar por qué eso es falso para series de términos positivos. Tampoco es cierto para series alternadas, **a menos que** se añada otra hipótesis. Formular esta hipótesis adicional y argumentar por qué es necesaria.

**En los ejercicios 5-30, averiguar si la serie es convergente o divergente.**

5. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{3}{k}$

6. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{4}{k+1}$

7. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k} \frac{2}{k^2}$

8. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k} \frac{4}{\sqrt{k}}$

9. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k^2}{k+1}$

10. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2k^2 - 1}{k}$

11. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k} \frac{k}{k^2+2}$

12. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k} \frac{2k-1}{k^3}$

13. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k}{2^k}$

14. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{3^k}{k}$

15. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k} \frac{4^k}{k^2}$

16. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k} \frac{k+2}{4k}$

17. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{k+1}$

18. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k^2}{k^2+2k+2}$

19. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k} \frac{3}{\sqrt{k+1}}$

20. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k} \frac{k+1}{k^3}$

21. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2}{k!}$

22. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k!}{3^k}$

23. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k} \frac{k!}{2^k}$

24. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k} \frac{4^k}{k!}$

25. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} 2e^{-k}$

26. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} 3e^{1/k}$

27. $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k} \ln k$

28. $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k} \frac{1}{\ln k}$

29. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{2^k}$

30. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} 2^k$

**En los ejercicios 31-38, estimar la suma de cada serie convergente con error menor que 0,01.**

31. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{4}{k^3}$

32. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2}{k^3}$

33. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k} \frac{k}{2^k}$

34. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k} \frac{k^2}{10^k}$

35. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k} \frac{3}{k!}$

36. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2}{k!}$

37. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{4}{k^4}$

38. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{3}{k^5}$

**En los ejercicios 39-44, determinar cuántos términos de la serie hay que sumar para aproximar la suma con un error menor que 0,0001.**

39. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2}{k}$

40. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{4}{\sqrt{k}}$

41. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k} \frac{2^k}{k!}$

42. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k} \frac{10^k}{k!}$

43. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k!}{k^k}$

44. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{4^k}{k^k}$

45. En el texto vimos un método para comprobar que una sucesión es decreciente. Como alternativa, explicar por qué si $a_k = f(k)$ y $f'(k)$ es negativa, la sucesión $a_k$ es decreciente. Usar este método para probar que $a_k = \frac{k}{k^2+2}$ es decreciente.

46. Probar, por el método del ejercicio 45, que $a_k = \frac{k}{2^k}$ es decreciente.

47. En este ejercicio descubrirá por qué el criterio de series alternadas exige $a_{k+1} \leq a_k$. Si $a_k = \begin{cases} 1/k & \text{si } k \text{ es impar} \\ 1/k^2 & \text{si } k \text{ es par} \end{cases}$, argumentar que $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$ diverge hacia $\infty$. Así, pues, una serie alternada puede ser divergente aunque $\lim_{k \to \infty} a_k = 0$.

48. Probar que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k} \frac{1}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$ converge. Se puede demostrar que su suma es $\frac{\pi}{4}$. Sabiendo eso, podemos usar la serie para aproximar $\pi$. ¿Cuántos términos habría que sumar para evaluar $\pi$ con ocho dígitos correctos?

49. Una persona camina desde su casa (en $x = 0$) hasta la casa de un amigo (en $x = 1$). Cuando ha recorrido las tres cuartas partes del camino, cambia de idea y emprende el camino de regreso hacia su casa. Cuando ha recorrido los tres cuartos de ese camino, cambia otra vez de idea y comienza a caminar hacia la casa del amigo. Si sigue ese proceso de indecisión, ¿a qué punto llegará al final de su paseo? Un problema similar, aparecido en una revista, creó controversia debido a la ambigüedad del enunciado. Está claro que el primer cambio de dirección se pro-

duce en $x = \frac{3}{4}$ y el segundo en $\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{16}$. Pero ¿el tercero ocurre a los tres cuartos del camino hasta $x = 1$ o hasta $x = \frac{3}{4}$? El escritor que lo planteó en la revista suponía esta segunda interpretación. Probar que, con esa interpretación, el camino de la persona produce una serie geométrica. Hallar la suma de esa serie para saber en qué punto termina su trayecto la persona.

50. En el problema del ejercicio 49, la otra interpretación da lugar a una respuesta más interesante. Como antes, $x_1 = \frac{3}{4}$ y $x_2 = \frac{3}{16}$. Si el próximo cambio de sentido se produce a las tres cuartas partes del camino entre $x_2$ y 1, entonces $x_3 = \frac{3}{16} + \frac{3}{4}\left(1 - \frac{3}{16}\right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}x_2 = \frac{51}{64}$. Los tres cuartos desde allí hasta $x = 0$ nos llevan a $x_4 = x_3 - \frac{3}{4}x_3 = \frac{1}{4}x_3 = \frac{51}{264}$. Probar que si $n$ es par, $x_{n+1} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}x_n$ y $x_{n+2} = \frac{1}{4}x_{n+1}$. Demostrar que la persona termina caminando, ida y vuelta, entre dos posiciones específicas.

51. Calcular, con ayuda de un PCS, la suma de la serie $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}$ con seis dígitos correctos. Comparar el resultado con ln 2.

52. En este ejercicio vamos a investigar si es o no convergente la integral impropia $\int_0^1 \operatorname{sen}(1/x)\,dx$. Justificar que las integrales $\int_{1/\pi}^1 \operatorname{sen}(1/x)\,dx$, $\int_{1/(2\pi)}^{1/\pi} \operatorname{sen}(1/x)\,dx$, $\int_{1/(3\pi)}^{1/(2\pi)} \operatorname{sen}(1/x)\,dx$, ... existen y que (si existe)

$$\int_0^1 \operatorname{sen}(1/x)\,dx = \int_{1/\pi}^1 \operatorname{sen}(1/x)\,dx + \int_{1/(2\pi)}^{1/\pi} \operatorname{sen}(1/x)\,dx + \int_{1/(3\pi)}^{1/(2\pi)} \operatorname{sen}(1/x)\,dx + \cdots$$

Verificar que la serie es alternada y probar que se satisfacen las hipótesis del criterio de series alternadas. Por tanto, la serie y la integral impropia son ambas convergentes.

53. Consideremos la serie $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}$, donde $x$ es una constante. Demostrar que la serie converge para $x = 1/2$, para $x = -1/2$ y para cualquier $x$ tal que $-1 < x \leq 1$. Probar que la serie diverge para $x = -1$, $x < -1$ y $x > 1$. Veremos en la sección 8.6 que la serie, cuando es convergente, converge a $\ln(1 + x)$. Comprobarlo numéricamente para $x = 1/2$ y para $x = -1/2$.

## 8.5 CONVERGENCIA ABSOLUTA Y EL CRITERIO DEL COCIENTE

Salvo el de series alternadas, los criterios de la sección 8.4 (el criterio integral y los de comparación) se aplican solamente a series de términos **positivos**. Pues bien, ¿qué hacer si nos encontramos con una serie de términos positivos y negativos, pero no alternada? Como ejemplo, consideremos la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} k}{k^3} = \operatorname{sen} 1 + \frac{1}{8}\operatorname{sen} 2 + \frac{1}{27}\operatorname{sen} 3 + \frac{1}{64}\operatorname{sen} 4 + \cdots.$$

Contiene términos positivos y negativos, pero no van alternando sus signos. (Calcule los primeros seis términos para comprobarlo). Para una serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ de ese tipo, podemos desviar el problema y preguntarnos si es convergente la serie de valores absolutos $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$. Si lo es, se dice que la serie dada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es **absolutamente convergente** (o que **converge absolutamente**). Nótese que para analizar la convergencia de la serie de valores absolutos $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ (cuyos términos son todos positivos) podemos usar los criterios para series de términos positivos.

### Ejemplo 5.1 Análisis de la convergencia absoluta

Investigar si la serie $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2^k}$ es absolutamente convergente.

**Solución** Es fácil probar que esta serie alternada es convergente. (¡Inténtelo!). La gráfica de sus 20 primeras sumas parciales sugiere que la serie converge con suma aproximada 0,35.

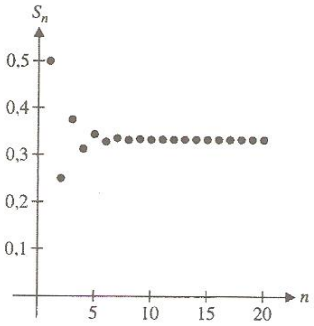



**Figura 8.34**

$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2^k}$.

Para decidir sobre la convergencia absoluta hemos de ver si la serie de valores absolutos $\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{k+1}}{2^k} \right|$ es convergente. Ahora bien, de

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{k+1}}{2^k} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2} \right)^k,$$

se deduce que es una serie geométrica convergente ($|r| = \frac{1}{2} < 1$). Por consiguiente, la serie original $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2^k}$ es absolutamente convergente.

Puede estar preguntándose qué relación hay entre convergencia y convergencia absoluta. Pronto demostraremos que toda serie absolutamente convergente es convergente (como en el ejemplo 5.1). Sin embargo, el recíproco no es cierto: hay muchas series convergentes que no son absolutamente convergentes. A estas series se les llama **condicionalmente convergentes**. ¿Se le ocurre algún ejemplo de esta clase de series? Si es así, muy probablemente estará pensando en el ejemplo que sigue.

### Ejemplo 5.2 Una serie condicionalmente convergente

Estudiar si la serie armónica alternada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ es condicionalmente convergente.

**Solución** En el ejemplo 4.2 hemos probado que esta serie es convergente. Para ver si converge absolutamente hay que analizar la serie de valores absolutos,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k},$$

que es la serie armónica, divergente como ya sabemos (véase ejemplo 2.7 en la sección 8.2). Por tanto, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ converge, pero no absolutamente. En otras palabras, la serie dada es condicionalmente convergente.

### Teorema 5.1

Si $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ converge, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge.

Este teorema asegura que si una serie converge absolutamente, es convergente. En consecuencia, conviene empezar investigando la convergencia absoluta de una serie dada. Si converge absolutamente, habremos demostrado de paso que es convergente.

### Demostración

Para cualquier número real $x$, $-|x| \leq x \leq |x|$. Así, pues, para todo $k$, se tiene

$$-|a_k| \leq a_k \leq |a_k|.$$

Sumando $|a_k|$ a los tres términos, obtenemos

$$0 \leq a_k + |a_k| \leq 2|a_k|. \tag{5.1}$$

Como $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es absolutamente convergente, $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ y, por tanto, también $\sum_{k=1}^{\infty} 2|a_k| = 2\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ son convergentes. Definamos $b_k = a_k + |a_k|$. Según (5.1),

$$0 \leq b_k \leq 2|a_k|$$

y el criterio de comparación asegura que $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ es convergente. Obsérvese ahora que podemos escribir

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + |a_k| - |a_k|) = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{(a_k + |a_k|)}_{b_k} - \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} b_k - \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|.$$

Puesto que las dos series de la derecha son convergentes, se deduce que también $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es convergente.

---

**Ejemplo 5.3** **Investigación de la convergencia absoluta**

Determinar si $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} k}{k^3}$ es convergente o divergente.

**Solución** No es una serie de términos positivos, pero tampoco es alternada. Por tanto, nuestra única opción (con lo que sabemos) es aplicar el criterio de convergencia absoluta. La gráfica de sus 20 primeras sumas parciales (figura 8.35) sugiere convergencia a un valor próximo a 0,94. Para aplicar el criterio de convergencia absoluta, consideramos la serie de valores absolutos $\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\operatorname{sen} k}{k^3} \right|$. Observamos que

$$\left| \frac{\operatorname{sen} k}{k^3} \right| = \frac{|\operatorname{sen} k|}{k^3} \leq \frac{1}{k^3}, \tag{5.2}$$

ya que $|\operatorname{sen} k| \leq 1$, para todo $k$. Como $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ es una $p$-serie convergente ($p = 3 > 1$), del criterio de comparación y de (5.2) se sigue que $\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\operatorname{sen} k}{k^3} \right|$ converge. Por consiguiente, la serie original $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} k}{k^3}$ es absolutamente convergente (luego convergente).

---

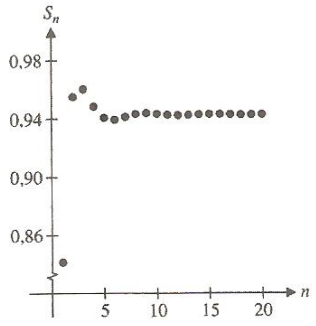



**Figura 8.35**

$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{sen} k}{k^3}$.

## El criterio del cociente

Vamos a presentar un criterio muy eficaz de convergencia absoluta. Es aplicable a series muy diversas y, en particular, al caso especialmente importante de las series de potencias que estudiaremos en la sección 8.6. Además, es muy fácil de utilizar.

---

**Teorema 5.2 (Criterio del cociente)**

Dada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, con $a_k \neq 0$ para todo $k$, supongamos que

$$\lim_{k \to \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = L.$$

Entonces,

(i) si $L < 1$, la serie es absolutamente convergente;
(ii) si $L > 1$, (o si $L = \infty$), la serie diverge, y
(iii) si $L = 1$, no se concluye nada.

---

**Demostración**

(i) Si $L < 1$, si tomamos un número $r$ tal que $L < r < 1$, se tiene

$$\lim_{k \to \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = L < r.$$

Para que eso ocurra debe haber algún $N > 0$ tal que siempre que $k \geq N$,

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < r. \tag{5.3}$$

Multiplicando (5.3) por $|a_k|$ obtenemos

$$|a_{k+1}| < r\,|a_k|.$$

En particular, para $k = N$,

$$|a_{N+1}| < r\,|a_N|$$

y para $k = N + 1$,

$$|a_{N+2}| < r\,|a_{N+1}|\ r^2\,|a_N|.$$

Análogamente,

$$|a_{N+3}| < r\,|a_{N+2}| < r^3\,|a_N|,$$

y así sucesivamente. Así, pues,

$$|a_{N+k}| < r^k\,|a_N|, \text{ para } k = 1, 2, 3, \ldots .$$

Nótese que $\sum_{k=1}^{\infty} |a_N|\, r^k = |a_N| \sum_{k=1}^{\infty} r^k$ es una serie geométrica convergente, ya que $0 < r < 1$. El criterio de comparación asegura que $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{N+k}| = \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n|$ converge también. Eso significa que $\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente. Finalmente, como

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{N} a_n + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n,$$

concluimos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente.

(ii) Si $L > 1$, se tiene

$$\lim_{k \to \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = L > 1.$$

Eso quiere decir que existe algún $N > 0$ tal que siempre que $k \geq N$,

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| > 1. \tag{5.4}$$

Multiplicando (5.4) por $|a_k|$, obtenemos

$$|a_{k+1}| > |a_k| > 0, \text{ para todo } k \geq N.$$

Ahora bien, eso implica que

$$\lim_{k \to \infty} a_k \neq 0.$$

Por el criterio del término general, concluimos que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge.

---

**Ejemplo 5.4** **Aplicación del criterio del cociente**

Estudiar la convergencia de $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{2^k}$.

**Solución** La gráfica de las 20 primeras sumas parciales de la serie de valores absolutos $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$ (figura 8.36) parece indicar que esta serie converge a un valor en torno a 2.

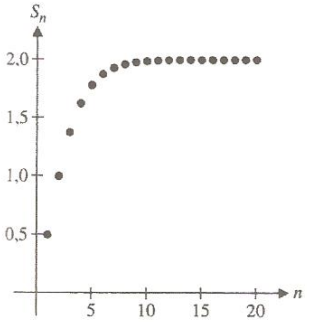



**Figura 8.36**

$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}$.

Por el criterio del cociente, al ser

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{\dfrac{k+1}{2^{k+1}}}{\dfrac{k}{2^k}} = \lim_{k\to\infty}\frac{k+1}{2^{k+1}}\frac{2^k}{k} = \frac{1}{2}\lim_{k\to\infty}\frac{k+1}{k} = \frac{1}{2} < 1$$

Usar $2^{k+1} = 2^k \cdot 2^1$

la serie converge absolutamente, como sugería la figura 8.36.

El criterio del cociente es especialmente útil cuando el término general de la serie contiene una exponencial, como en el ejemplo 5.4, o una factorial, como en el próximo ejemplo.

### Ejemplo 5.5 Aplicación del criterio del cociente

Estudiar la convergencia de $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k k!}{e^k}$.

**Solución** La gráfica de sus 20 primeras sumas parciales (figura 8.37) sugiere que la serie diverge. (Observe la escala del eje $y$ y calcule una tabla de valores por su cuenta). Podemos confirmar esa sospecha mediante el criterio del cociente. Se tiene

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{\dfrac{(k+1)!}{e^{k+1}}}{\dfrac{k!}{e^k}} = \lim_{k\to\infty}\frac{(k+1)!}{e^{k+1}}\frac{e^k}{k!}$$

$$= \lim_{k\to\infty}\frac{(k+1)k!}{ek!} = \frac{1}{e}\lim_{k\to\infty}\frac{k+1}{1} = \infty.$$

Usar $(k+1)! = (k+1)\cdot k!$ y $e^{k+1} = e^k \cdot e^1$

Por el criterio del cociente, la serie diverge.

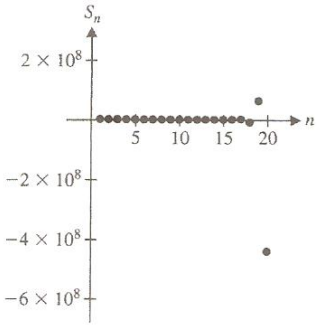



**Figura 8.37**

$S_n = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k k!}{e^k}$.

## Notas históricas

**Srinivasa Ramanujan (1887-1920).** Matemático indio cuyos sorprendentes descubrimientos sobre series todavía dejan estupefactos a los expertos. Autodidacta, Ramanujan llenó cuadernos de notas con conjeturas sobre series, fracciones continuas y la función zeta de Riemann. Rara vez escribía una demostración o una justificación de sus resultados. No obstante, el famoso matemático inglés G. H. Hardy dijo: «Deben ser ciertos, porque si no lo fueran, nadie habría tenido suficiente imaginación para inventarlos» (véase el ejercicio 43).

En el enunciado del criterio del cociente (teorema 5.2) se dice que si

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = 1,$$

el criterio no concluye nada. Con eso se quiere decir que, en esa circunstancia, la serie puede ser convergente o divergente, y la cuestión sólo se puede zanjar con análisis adicional.

### Ejemplo 5.6 Una serie divergente para la que el criterio del cociente no decide

Aplicar el criterio del cociente a la serie $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k}$.

**Solución** Ahora es

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{\dfrac{1}{k+1}}{\dfrac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty}\frac{k}{k+1} = 1.$$

Por tanto, el criterio del cociente no lleva a ninguna conclusión (aunque ya hemos visto antes que la serie armónica es divergente).

**Ejemplo 5.7** **Una serie convergente para la que el criterio del cociente no decide**

Aplicar el criterio del cociente a la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

**Solución** Aquí se tiene

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{(k+1)^2} \frac{k^2}{1}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{k^2}{k^2+2k+1} = 1.$$

Por tanto, el criterio tampoco esta vez permite una conclusión (aunque ya sabíamos de antemano que esta $p$-serie es convergente).

Mire con atención los ejemplos 5.6 y 5.7. Sacará la conclusión de que el criterio del cociente deja sin conclusión ante cualquier $p$-serie. No importa mucho, porque no lo necesitamos para analizar esas series.

Presentamos a continuación el último criterio para la convergencia de series.

**Teorema 5.3 (Criterio de la raíz)**

Dada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, supongamos que $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = L$. Entonces,

(i) si $L < 1$, la serie converge absolutamente;
(ii) si $L > 1$ (o si $L = \infty$), la serie diverge, y
(iii) si $L = 1$, no se concluye nada.

Es una conclusión muy parecida a la del criterio del cociente. La demostración es también análoga y la dejamos como ejercicio.

**Ejemplo 5.8** **Aplicación del criterio de la raíz**

Investigar, usando el criterio de la raíz, si es convergente o divergente la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{2k+4}{5k-1} \right)^k$.

**Solución** En este caso, consideramos

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left| \frac{2k+4}{5k-1} \right|^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{2k+4}{5k-1} = \frac{2}{5} < 1.$$

Por el criterio de la raíz, esta serie es absolutamente convergente.

En este punto puede tener la impresión de que le hemos ido lanzando una colección mareante de series y criterios. ¿Cómo puede poner orden en esa maraña? La única sugerencia válida es que sólo lo conseguirá a base de resolver **muchos** problemas. Al final de la sección le proponemos abundantes ejercicios. Algunos requieren los métodos expuestos en esta sección, mientras otros están motivados por las secciones precedentes con el claro propósito de obligarle a contemplar el cuadro completo. Para simplificar su consulta, reunimos en la tabla siguiente todos los criterios de convergencia estudiados en este capítulo.

| Criterio | Cuándo usarlo | Conclusiones | Sección |
|---|---|---|---|
| **Series geométricas** | $\sum_{k=0}^{\infty} ar^k$ | Converge a $\frac{a}{1-r}$ si $\lvert r\rvert < 1$; diverge si $\lvert r\rvert \geq 1$. | 8.2 |
| **Criterio del término general** | Todas las series | Si $\lim_{k\to\infty} a_k \neq 0$, la serie diverge. | 8.2 |
| **Criterio integral** | $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, donde $f(k) = a_k$, $f$ es continua, decreciente y $f(x) \geq 0$ | $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ y $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ **ambas** convergen o **ambas** divergen. | 8.3 |
| ***p*-series** | $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ | Converge para $p > 1$; diverge para $p \leq 1$. | 8.3 |
| **Criterio de comparación** | $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, donde $0 \leq a_k \leq b_k$ | Si $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ converge, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge. Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ diverge. | 8.3 |
| **Criterio de comparación asintótica** | $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, donde $a_k, b_k > 0$ y $\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = L > 0$ | $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ **ambas** convergen o **ambas** divergen. | 8.3 |
| **Criterio de serie alternadas** | $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$, donde $a_k > 0$ para todo $k$ | Si $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ y $a_{k+1} \leq a_k$ para todo $k$, entonces la serie converge. | 8.4 |
| **Convergencia absoluta** | Series de términos positivos y negativos (incluidas las alternadas) | Si $\sum_{k=1}^{\infty} \lvert a_k\rvert$ converge, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge (absolutamente). | 8.5 |
| **Criterio del cociente** | Todas las series (especialmente si contienen exponenciales y factoriales) | Con $\lim_{k\to\infty} \left\lvert \frac{a_{k+1}}{a_k} \right\rvert = L$, si $L < 1$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge absolutamente; si $L > 1$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge; si $L = 1$, no hay conclusión. | 8.5 |
| **Criterio de la raíz** | Todas las series (especialmente si contienen exponenciales) | Con $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\lvert a_k\rvert} = L$, si $L < 1$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge absolutamente; si $L > 1$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge; si $L = 1$, no hay conclusión. | 8.5 |

# EJERCICIOS 8.5

1. Supongamos que dos series $A$ y $B$ tienen los mismos términos, excepto que en la serie $A$ todos son positivos y en la $B$ los hay positivos y negativos. Explicar por qué es más probable que sea convergente la serie $B$. A la vista de esto, argumentar por qué es cierto el teorema 5.1.

2. En el criterio del cociente, si $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 0$, ¿cuál es mayor, $|a_{k+1}|$ o $|a_k|$? Explicar por qué esto implica que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge.

3. En el criterio del cociente, si $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = L < 1$, ¿cuál es mayor, $|a_{k+1}|$ o $|a_k|$? Esta desigualdad podría ser válida también si $L = 1$. Compare los valores relativos de $|a_{k+1}|$ y $|a_k|$ si $L = 0{,}8$ frente al caso $L = 1$. Explique por qué $L = 0{,}8$ tiene más probabilidad que $L = 1$ de corresponder a una serie convergente.

4. En muchas series de interés, los términos contienen potencias de $k$ (por ejemplo, $k^2$), exponenciales (como $2^k$) o factoriales (como $k!$). ¿Para qué términos de esos tipos es más probable que el criterio del cociente lleve a una conclusión (o sea, produzca un límite $L \neq 1$)?

**En los ejercicios 5-42, investigar si la serie es absolutamente convergente, condicionalmente convergente o divergente.**

5. $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{3}{k!}$

6. $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{6}{k!}$

7. $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k 2^k$

8. $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{2}{3^k}$

9. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{k}{k^2+1}$

10. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{k^2+1}{k}$

11. $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{3^k}{k!}$

12. $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{10^k}{k!}$

13. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{k}{2k+1}$

14. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{4}{2k+1}$

15. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{k2^k}{3^k}$

16. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{k^23^k}{2^k}$

17. $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4k}{5k+1}\right)^k$

18. $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1-3k}{4k}\right)^k$

19. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-2}{k}$

20. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k}$

21. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sqrt{k}}{k+1}$

22. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{k}{k^3+1}$

23. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{e^k}$

24. $\sum_{k=1}^{\infty}k^3e^{-k}$

25. $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{e^{3k}}{k^{3k}}$

26. $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{e^k}{k^2}\right)^k$

27. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} k}{k^2}$

28. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos k}{k^3}$

29. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos k\pi}{k}$

30. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} k\pi}{k}$

31. $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\ln k}$

32. $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k\ln k}$

33. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k\sqrt{k}}$

34. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$

35. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3}{k^k}$

36. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2k}{3^k}$

37. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{k!}{4^k}$

38. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{k^24^k}{k!}$

39. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{k^{10}}{(2k)!}$

40. $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{4^k}{(2k+1)!}$

41. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-2)^k(k+1)}{5^k}$

42. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-3)^k}{k^24^k}$

43. Hacia 1910, el matemático indio Srinivasa Ramanujan descubrió la fórmula

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{9.801}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(4k)!(1.103+26.390k)}{(k!)^4396^{4k}}.$$

Aproximar la suma de la serie con sólo el término $k = 0$ y probar que se obtienen 6 dígitos correctos de $\pi$. Aproximarla con los términos $k = 0$ y $k = 1$ y probar que se obtienen 14 dígitos correctos de $\pi$. En general, cada término de esta serie admirable añade 8 dígitos correctos de precisión.

44. Demostrar que la serie de Ramanujan del ejercicio 43 converge.

45. Probar que $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k!}{k^k}$ converge usando el criterio del cociente y el hecho de que

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{k+1}{k}\right)^k = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = e.$$

46. Analizar si la serie $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}$ es convergente o divergente.

## 8.6 SERIES DE POTENCIAS

Extenderemos ahora nuestro estudio a series cuyos términos son funciones de una variable $x$. De esta forma culminaremos todo el trabajo previo de las cinco secciones últimas. La razón principal para estudiar este tipo de series es su utilidad para representar funciones. Esto abre toda clase de posibilidades, desde aproximar valores de funciones trascendentes hasta calcular derivadas e integrales de tales funciones y resolver ecuaciones diferenciales. Paralelamente, la posibilidad de **definir** funciones mediante series de potencias convergentes produce una eclosión de nuevas funciones disponibles. De hecho, muchas funciones relevantes en las aplicaciones (las de Bessel, sin ir más lejos) se definen mediante series. En esta sección damos los primeros pasos en esa dirección.

Para empezar, consideremos la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} (x-2)^k = 1 + (x-2) + (x-2)^2 + (x-2)^3 + \cdots.$$

Fijado un valor de $x$, se convierte en una serie geométrica de razón $r = (x-2)$. Por lo que sabemos, esa serie será convergente si $|r| = |x-2| < 1$ y divergente si $|r| = |x-2| \geq 1$. Además, para cada $x$ con $|x-2| < 1$ (o sea, $1 < x < 3$), la serie converge a

$$\frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-(x-2)} = \frac{1}{3-x}.$$

Esto es, para cada $x$ en el intervalo $(1, 3)$, se tiene

$$\sum_{k=0}^{\infty} (x-2)^k = \frac{1}{3-x}.$$

Para todos los demás valores de $x$, la serie diverge. La figura 8.38 muestra una gráfica de $f(x) = \dfrac{1}{3-x}$ junto con las tres primeras sumas parciales $P_n$ de esa serie, donde

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (x-2)^k = 1 + (x-2) + (x-2)^2 + \cdots + (x-2)^n,$$

en el intervalo $[1, 3]$. Nótese que cuando $n$ se hace grande, $P_n(x)$ parece aproximarse a $f(x)$ en todo el intervalo $(1, 3)$; incluso observamos que $P_n(x)$ tiende a estar más cerca de $f(x)$ en un rango mayor de valores de $x$.

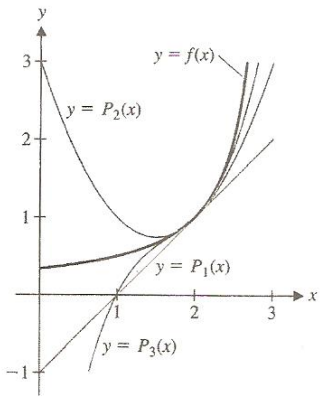



**Figura 8.38**

$y = \dfrac{1}{3-x}$ y las tres primeras sumas parciales de $\sum_{k=0}^{\infty} (x-2)^k$.

Es importante que entienda bien lo que hemos hecho: hemos tomado una serie y hemos observado que es equivalente (o sea, converge) a una función **conocida** sobre cierto intervalo. Tiene derecho a preguntarse por qué interesarnos en eso. A decir verdad, $f(x) = \dfrac{1}{3-x}$ es una función perfectamente conocida y cuanto queramos hacer con ella será, sin duda, más fácil de hacer usando la expresión algebraica $\dfrac{1}{3-x}$ que su representación equivalente como serie, $\sum_{k=0}^{\infty} (x-2)^k$. Sin embargo, imagine las ventajas que podremos obtener si encontramos una representación en forma de serie para una función de la que apenas sabemos nada. Esto es precisamente lo que haremos en la sección 8.7. Por ejemplo, seremos capaces de demostrar que, para todo $x$,

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots. \tag{6.1}$$

Está bien. ¿Y qué? Bueno, suponga que desea calcular $e^{1.234567}$. ¿Cómo lo haría? «Puedo usar la calculadora», estará pensando. Sí, claro, pero ¿se ha preguntado alguna vez cómo lo hace la calculadora? El problema es que $e^x$ no es una función algebraica. En otras palabras, no se puede evaluar usando operaciones algebraicas (suma, resta, multiplicación, división y raíces $n$-ésimas). En las próximas secciones profundizaremos en este asunto. Por el momento, bastará decir esto: gracias a la representación (6.1) de $e^x$ como serie, para cualquier $x$ dado,

podemos calcular una aproximación de $e^x$ sumando simplemente unos cuantos términos de esa serie de potencias. Y eso es muy fácil de hacer, ya que las sumas parciales de una serie de potencias son polinomios.

En general, cualquier serie de la forma

**Serie de potencia**

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-c)^k = b_0 + b_1(x-c) + b_2(x-c)^2 + b_3(x-c)^3 + \cdots$$

con potencias de $(x - c)$, se llama una **serie de potencias** (centrada en $c$). Las constantes $b_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ son los **coeficientes** de la serie. La primera cuestión es ¿para qué valores de $x$ converge esa serie? En otras palabras, la serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-c)^k$ define una función de $x$. Su dominio es el conjunto de todos los $x$ para los que la serie converge. El instrumento clave para investigar la convergencia de una serie de potencias es el criterio del cociente. Recordemos que las sumas parciales de una serie de potencias son polinomios, las funciones más simples posibles.

### Ejemplo 6.1 Convergencia de una serie de potencias

Determinar para qué valores de $x$ es convergente la serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{3^{k+1}} x^k$.

**Solución** Por el criterio del cociente, como

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{(k+1)x^{k+1}}{3^{k+2}} \frac{3^{k+1}}{kx^k} \right|$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)|x|}{3k} = \frac{|x|}{3} \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{k} \qquad \text{Usar } x^{k+1} = x^k \cdot x^1 \text{ y } 3^{k+2} = 3^{k+1} \cdot 3^1.$$

$$= \frac{|x|}{3} < 1,$$

para $|x| < 3$, o sea, $-3 < x < 3$, la serie converge absolutamente para $-3 < x < 3$ y diverge para $|x| > 3$ (es decir, para $x > 3$ y para $x < -3$). Puesto que el criterio del cociente no decide en los dos extremos de ese intervalo, $x = \pm 3$, estos casos exigen análisis por separado.

Para $x = 3$, la serie es

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{3^{k+1}} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{3^{k+1}} 3^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{3}.$$

Puesto que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k}{3} = \infty \neq 0,$$

divergente por el criterio del término general. Por idéntica razón, la serie diverge también en $x = -3$. En conclusión, la serie de potencias converge para todo $x$ en el intervalo $(-3, 3)$ y diverge para todo $x$ fuera de él.

El ejemplo 6.1 tiene algo en común con el ejemplo introductorio. En ambos casos, la serie tiene la forma $\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-c)^k$, converge en un intervalo de la forma $(c - r, c + r)$ y diverge fuera de él. (En el ejemplo 6.1 era $c = 0$). Ese intervalo en el que la serie de potencias converge se denomina **intervalo de convergencia**. La constante $r$ se llama **radio de convergencia** ($r$ es la mitad de la longitud del intervalo de convergencia). Pues bien, tal como se enuncia en el próximo teorema, toda serie de potencias tiene un intervalo de convergencia.

**Teorema 6.1**

Dada cualquier serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-c)^k$, hay exactamente tres posibilidades:

(i) La serie converge **para todo** $x \in (-\infty, \infty)$. El radio de convergencia es $r = \infty$.

(ii) La serie converge **sólo para** $x = c$ (y diverge para todos los demás valores de $x$). El radio de convergencia es $r = 0$.

(iii) La serie converge para $x \in (c-r, c+r)$ y diverge para $x < c-r$ y para $x > c+r$, donde $r$ (el radio de convergencia) es algún número con $0 < r < \infty$.

La demostración de este teorema puede verse en el apéndice A.

**Ejemplo 6.2** **Intervalo y radio de convergencia**

Hallar el intervalo y el radio de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{10k}{k!}(x-1)^k.$$

**Solución** Para aplicar el criterio del cociente, calculamos

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{10^{k+1}(x-1)^{k+1}}{(k+1)!}\,\frac{k!}{10^k(x-1)^k}\right|$$

$$= 10|x-1| \lim_{k\to\infty}\frac{k!}{(k+1)k!} \qquad \text{Ya que } (x-1)^{k+1} = (x-1)^k(x-1)^1 \text{ y } (k+1)! = (k+1)k!$$

$$= 10|x-1| \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k+1} = 0 < 1,$$

para **todo** $x$. Eso implica que la serie converge absolutamente para todo $x$. Por tanto, su intervalo de convergencia es $(-\infty, \infty)$ y su radio de convergencia es $r = \infty$.

El intervalo de convergencia de una serie de potencias puede ser cerrado, abierto o semiabierto, como en el ejemplo que sigue.

**Ejemplo 6.3** **Un intervalo semiabierto de convergencia**

Calcular el intervalo y el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k4^k}$.

**Solución** Por el criterio del cociente,

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{x^{k+1}}{(k+1)4^{k+1}}\,\frac{k4^k}{x^k}\right|$$

$$= \frac{|x|}{4}\lim_{k\to\infty}\frac{k}{k+1} = \frac{|x|}{4} < 1.$$

Así, pues, tenemos garantizada la convergencia absoluta en $|x| < 4$ y divergencia para $|x| > 4$. Queda pendiente saber qué ocurre en los extremos del intervalo: $x = \pm 4$. En $x = 4$,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k4^k} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4^k}{k4^k} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k},$$

donde reconocemos la serie armónica, que es divergente. En $x = -4$,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k4^k} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-4)^k}{k4^k} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k},$$

que es la serie armónica alternada, convergente (véase ejemplo 4.2). En consecuencia, el intervalo de convergencia es el intervalo semiabierto $[-4, 4)$ y el radio de convergencia es $r = 4$.

Tal como se ha especificado en el teorema 6.1, toda serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-c)^k$ es convergente en al menos un punto, $x = c$, ya que para $x = c$ la serie queda reducida a

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-c)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(c-c)^k = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k 0^k = a_0 + 0 = a_0.$$

**Ejemplo 6.4** **Una serie de potencias que converge en un único punto**

Hallar el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} k!(x-5)^k$.

**Solución** Por el criterio del cociente,

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(k+1)!(x-5)^{k+1}}{k!(x-5)^k}\right|$$

$$= \lim_{k\to\infty}\frac{(k+1)k!|x-5|}{k!}$$

$$= \lim_{k\to\infty}[(k+1)|x-5|]$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{si } x = 5 \\ \infty, & \text{si } x \neq 5 \end{cases}.$$

Por tanto, esta serie de potencias converge sólo en $x = 5$ y su radio de convergencia es $r = 0$.

Supongamos que la serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-c)^k$ tiene radio de convergencia $r > 0$. Entonces la serie converge absolutamente en el intervalo $(c-r, c+r)$ y podría ser convergente en uno o en los dos extremos, $x = c-r$ y $x = c+r$. Puesto que la serie converge en todo $x \in (c-r, c+r)$, define una función $f$ en el intervalo $(c-r, c+r)$, a saber:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-c)^k = b_0 + b_1(x-c) + b_2(x-c)^2 + b_3(x-c)^3 + \cdots.$$

Esa función resulta ser continua y derivable (omitimos la demostración, que escapa al nivel de este libro). Es más, esa función se puede derivar del modo que cabía esperar:

**Derivada de una serie de potencias**

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}[b_0 + b_1(x-c) + b_2(x-c)^2 + b_3(x-c)^3 + \cdots]$$

$$= b_1 + 2b_2(x-c) + 3b_3(x-c)^2 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} b_k k(x-c)^{k-1},$$

y el radio de convergencia de la serie resultante es también $r$. Debido a cómo se realiza la derivación, se dice que la serie ha sido **derivada término a término**. Análogamente, se puede integrar una serie de potencias convergente término a término:

**Integral de una serie de potencias**

$$\int f(x)\,dx = \int \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-c)^k\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \int (x-c)^k\,dx$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} b_k \frac{(x-c)^{k+1}}{k+1} + K,$$

donde $K$ es una constante de integración y el radio de convergencia de la serie resultante es también $r$. La demostración de estos dos resultados se puede encontrar en textos de Cálculo avanzado. Es importante hacer ver que estos dos resultados **no** son obvios. No son una simple aplicación de «la derivada (o integral) de una suma es la suma de las derivadas (o integrales)». Una serie no es una suma, sino un límite de sumas. (¿Es tanta la diferencia?). Más aún, esos dos resultados son válidos para series de potencias, pero **no** para series de funciones de $x$ en general.

**Ejemplo 6.5** **Una serie convergente cuya serie de derivadas diverge**

Hallar el intervalo de convergencia de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(k^3x)}{k^2}$ y probar que la serie de las derivadas no converge para ningún $x$.

**Solución** Para empezar, observamos que

$$\left| \frac{\operatorname{sen}(k^3x)}{k^2} \right| \leq \frac{1}{k^2}, \text{ para todo } x,$$

ya que $|\operatorname{sen}(k^3x)| \leq 1$. Además, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ es una $p$-serie convergente ($p = 2 > 1$). Por tanto, del criterio de comparación se sigue que $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(k^3x)}{k^2}$ converge absolutamente para todo $x$. Por otra parte, la serie de las derivadas (obtenida derivando término a término la serie dada)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dx}\left[\frac{\operatorname{sen}(k^3x)}{k^2}\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3 \cos(k^3x)}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} [k \cos(k^3 x)]$$

diverge para todo $x$, por el criterio del término general, porque sus términos no tienden a cero cuando $k \to \infty$.

La serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(k^3x)}{k^2}$ no es una serie de potencias. Lo que ha sucedido en el ejemplo 6.5 (una serie convergente cuya serie derivada diverge) no puede ocurrir para series de potencias con radio de convergencia $r > 0$.

El próximo ejemplo muestra que, una vez que tenemos una representación de una función dada como serie de potencias, se pueden deducir de ella representaciones en serie de potencias de otras funciones derivando e integrando la serie término a término.

**Ejemplo 6.6** **Derivación e integración de una serie de potencias**

Usar la serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k$ para expresar como series de potencias las funciones $\frac{1}{(1+x)^2}$, $\frac{1}{1+x^2}$ y $\operatorname{tg}^{-1} x$.

**Solución** La serie $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-x)^k$ es geométrica con razón $r = -x$. Por consiguiente, converge, siempre que $|r| = |-x| = |x| < 1$, a

$$\frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x}.$$

Es decir, para $-1 < x < 1$,

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k. \tag{6.2}$$

Derivando ambos lados de (6.2), obtenemos

$$\frac{-1}{(1+x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k k x^{k-1}, \text{ para } -1 < x < 1.$$

Multiplicando ambos lados por $-1$ se obtiene una nueva representación en serie de potencias:

$$\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1} k x^{k-1},$$

válida en $-1 < x < 1$. Podemos obtener otra serie de potencias nueva si cambiamos en (6.2) $x$ por $x^2$, a saber,

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k}, \tag{6.3}$$

válida en $-1 < x^2 < 1$ (que equivale a $x^2 < 1$, o sea, $-1 < x < 1$).

Integrando los dos miembros de (6.3), resulta

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \int x^{2k}\,dx = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + c. \tag{6.4}$$

Identificamos la integral de la izquierda como $\tan^{-1}x$, así que

$$\tan^{-1}x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + c, \text{ para } -1 < x < 1. \tag{6.5}$$

Tomando $x = 0$, vemos que

$$\tan^{-1}0 = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 0^{2k+1}}{2k+1} + c = c,$$

de modo que $c = \text{tg}^{-1}0 = 0$. Por tanto, (6.5) proporciona la siguiente representación en serie de potencias para $\text{tg}^{-1}x$:

$$\tan^{-1}x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} = x\,\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots, \text{ para } -1 < x < 1.$$

---

Procediendo como en el ejemplo 6.6, se pueden expresar como series de potencias muchas funciones. En la sección 8.7 presentamos un método sistemático para representar una gran variedad de funciones en forma de series de potencias.

---

## EJERCICIOS 8.6

1. Las series de potencias tienen la forma $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-c)^k$. Explicar por qué cuanto más alejado esté $x$ de $c$, más grandes son los términos de la serie y menos probable es que sea convergente. Describir la relación entre esta observación y el radio de convergencia.

2. La aplicación del criterio del cociente a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-c)^k$ exige calcular $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}(x-c)\right|$. Para $x = c$, ese límite es 0 y la serie converge. Cuando $x$ crece o decrece, $|x-c|$ crece. Si la serie tiene radio de convergencia finito $r > 0$, ¿cuál es el valor del límite cuando $|x-c| = r$? Explicar cómo cambia el límite cuando $|x-c| < r$ y $|x-c| > r$ y cómo eso determina la convergencia o divergencia de la serie.

3. El ejemplo 6.2 enseña que $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{10^k}{k!}(x-1)^k$ converge para todo $x$. Si $x = 1.001$, el valor de $(x-1)^k = 1.000^k$ se hace muy grande cuando $k$ crece. Explicar por qué, para que la serie sea convergente, el valor de $k!$ debe crecer más rápidamente que $1.000^k$. Para ilustrar la rapidez de crecimiento de la factorial, calcule 50!, 100! y 200! (si su calculadora lo soporta).

En una representación en serie de potencias de $\sqrt{x+1}$ centrada en $c = 0$, explicar por qué el radio de convergencia no puede ser mayor que 1 (piense en el dominio de $\sqrt{x+1}$).

**En los ejercicios 5-14, hallar una representación de $f(x)$ como serie de potencias centrada en $c = 0$ (véase el ejemplo 6.6). Calcular el radio y el intervalo de convergencia. Representar gráficamente $f(x)$ junto con las sumas parciales $\sum_{k=0}^{3} a_k x^k$ y $\sum_{k=0}^{6} a_k x^k$.**

5. $f(x) = \dfrac{2}{1-x}$

6. $f(x) = \dfrac{3}{x-1}$

7. $f(x) = \dfrac{3}{1-x^2}$

8. $f(x) = \dfrac{2}{1-x^2}$

9. $f(x) = \dfrac{2x}{1-x^3}$

10. $f(x) = \dfrac{3x}{1+x^2}$

11. $f(x) = \dfrac{4}{1+4x}$ 12. $f(x) = \dfrac{3}{1-4x}$

13. $f(x) = \dfrac{2}{4+x}$ 14. $f(x) = \dfrac{3}{6-x}$

**En los ejercicios 15-20, hallar el intervalo de convergencia e identificar la función a la que converge la serie de potencias dada.**

15. $\sum_{k=0}^{\infty} (x+2)^k$ 16. $\sum_{k=0}^{\infty} (x-3)^k$

17. $\sum_{k=0}^{\infty} (2x-1)^k$ 18. $\sum_{k=0}^{\infty} (3x+1)^k$

19. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\dfrac{x}{2}\right)^k$ 20. $\sum_{k=0}^{\infty} 3\left(\dfrac{x}{4}\right)^k$

**En los ejercicios 21-38, determinar el radio y el intervalo de convergencia.**

21. $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{2^k}{k!}(x-2)^k$ 22. $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{3k}{k!}x^k$

23. $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{k}{4^k}x^k$ 24. $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{k}{2^k}x^k$

25. $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{k3^k}(x-1)^k$ 26. $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k4^k}(x+2)^k$

27. $\sum_{k=0}^{\infty} k!(x+1)^k$ 28. $\sum_{k=0}^{\infty} k!(x-2)^k$

29. $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k}(x-1)^k$ 30. $\sum_{k=0}^{\infty} k(x-2)^k$

31. $\sum_{k=0}^{\infty} k^2(x-3)^k$ 32. $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2}(x+2)^k$

33. $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{k!}{(2k)!}x^k$ 34. $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(k!)^2}{(2k)!}x^k$

35. $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{2^k}{k^2}(x+2)^k$ 36. $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{k^2}{k!}(x+1)^k$

37. $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{4^k}{\sqrt{k}}x^k$ 38. $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^k x^k}{\sqrt{k}}$

**En los ejercicios 39-46, hallar una representación en serie de potencias y el radio de convergencia integrando o derivando una de las series de los ejercicios 5-14.**

39. $f(x) = 3\ \mathrm{tg}^{-1} x$ 40. $f(x) = 2\ln(1-x)$

41. $f(x) = \dfrac{2x}{(1-x^2)^2}$ 42. $f(x) = \dfrac{3}{(x-1)^2}$

43. $f(x) = \ln(1+x^2)$ 44. $f(x) = \ln(1+4x)$

45. $f(x) = \dfrac{1}{(1+4x)^2}$ 46. $f(x) = \dfrac{2}{(4+x)^2}$

**En los ejercicios 47-50, hallar el intervalo de convergencia de la serie (no es una serie de potencias) y la serie derivada término a término.**

47. $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{\cos(k^3x)}{k^2}$ 48. $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{\cos(x/k)}{k}$

49. $\sum_{k=0}^{\infty} e^{kx}$ 50. $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-2kx}$

51. Determinar el intervalo y el radio de convergencia de $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(x-a)^k}{b^k}$, donde $a$ y $b > 0$ son constantes.

52. Demostrar que si $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ tiene radio de convergencia $r$, con $0 < r < \infty$, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{2k}$ tiene radio de convergencia $\sqrt{r}$.

53. Si $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ tiene radio de convergencia $r$, con $0 < r < \infty$, calcular el radio de convergencia de $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k$ para cualquier $c$.

54. Si $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ tiene radio de convergencia $r$, con $0 < r < \infty$, calcular el radio de convergencia de $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\dfrac{x}{b}\right)^k$ para cualquier $b \neq 0$.

55. Probar que $f(x) = \dfrac{x+1}{(1-x)^2} = \dfrac{\frac{2x}{1-x}+1}{1-x}$ admite la representación en serie de potencias $f(x) = 1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + 9x^4 + \cdots$. Hallar su radio de convergencia. Tomar $x = \dfrac{1}{1.000}$ y discutir la interesante representación decimal de $\dfrac{1.001.000}{998.001}$.

56. Verificar, efectuando la división, que $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$.

57. Incluso los grandes matemáticos están expuestos al error. Leonhard Euler partió de la identidad $\dfrac{x}{x-1} + \dfrac{x}{1-x} = 0$, la reescribió como $\dfrac{1}{1-1/x} + \dfrac{x}{1-x} = 0$, halló una representación en serie de potencias para cada función y concluyó que $\cdots + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x} + 1 + x + x^2 + \cdots = 0$. Sustituir $x = 1$ para ver que esa conclusión es falsa. Detectar la falacia en el argumento de Euler.

58. Todas las series de potencias de los ejercicios 5-9 tienen radio de convergencia 1. Dado que las funciones de los ejercicios 5, 6, 8 y 9 no están definidas en $x = 1$, explicar por qué el radio de convergencia no podía ser mayor que 1. La limitación para el radio de convergencia en el ejercicio 7 sólo se entiende desde la perspectiva de los números complejos. Probar

que $1 + x^2 = 0$ para $x = \pm i$, donde $i = \sqrt{-1}$. En general, un número complejo $a + bi$ se asocia al punto $(a, b)$ del plano. Calcular la «distancia» entre los números complejos 0 e $i$ evaluando la distancia entre sus puntos asociados, (0, 0) y (0, 1). Discutir cómo se relaciona esto con el valor del radio de convergencia. Teniendo en cuenta las ideas expuestas en este ejercicio, conjeturar a simple vista los radios de convergencia de las series de potencias centradas en $c = 0$ de las funciones $f(x) = \dfrac{4}{1 + 4x}$, $f(x) \dfrac{2}{4 + x}$ y $f(x) = \dfrac{2}{4 + x^2}$.

## 8.7 SERIES DE TAYLOR

Todavía puede estar preguntándose por qué hemos introducido las series. Cada vez que hemos introducido un concepto nuevo nos hemos esforzado en justificarlo. La derivada nació asociada al cálculo de la pendiente y la velocidad instantánea y la integral definida al cálculo de áreas. Pero aún no hemos desvelado por qué prestamos atención a las series, a pesar de que llevamos con ellas ya cinco secciones. Pues bien, ya estamos a punto de desvelar ese misterio. Esta sección aportará una razón poderosa. No es una simple curiosidad matemática, sino un instrumento esencial para explorar y calcular con funciones trascendentes (sen $x$, cos $x$, ln $x$, $e^x$, etc.).

Supongamos que la serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x - c)^k$ tiene radio de convergencia $r > 0$. Como ya hemos dicho, eso significa que la serie converge absolutamente en el intervalo $(c - r, c + r)$ a alguna función $f$. Esto es,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x - c)^k = b_0 + b_1(x - c) + b_2(x - c)^2 + b_3(x - c)^3 + b_4(x - c)^4 + \cdots,$$

para todo $x \in (c - r, c + r)$. Derivando término a término, se obtiene

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k k(x - c)^{k-1} = b_1 + 2b_2(x - c) + 3b_3(x - c)^2 + 4b_4(x - c)^3 + \cdots,$$

para todo $x \in (c - r, c + r)$ otra vez. Análogamente,

$$f''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k k(k - 1)(x - c)^{k-2} = 2b_2 + 3 \cdot 2b_3(x - c) + 4 \cdot 3b_4(x - c)^2 + \cdots$$

y

$$f'''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k k(k - 1)(k - 2)(x - c)^{k-3} = 3 \cdot 2b_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2b_4(x - c) + \cdots$$

y así sucesivamente (todas ellas válidas para $c - r < x < c + r$). Si hacemos $x = c$ en cada una de estas derivadas, todos los términos de la serie, excepto el primero, se anulan. Se obtiene

$$f(c) = b_0,$$
$$f'(c) = b_1,$$
$$f''(c) = 2b_2,$$
$$f'''(c) = 3!b_3,$$

y así sucesivamente. En general,

$$f^{(k)}(c) = k!b_k. \tag{7.1}$$

Despejando $b_k$ en (7.1), resulta

$$b_k = \frac{f^{(k)}(c)}{k!}, \text{ con } k = 0, 1, 2, \cdots$$

En resumen, hemos probado que si $\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-c)^k$ es una serie de potencias convergente, con radio de convergencia $r > 0$, la serie converge a una función $f$ que se puede escribir como

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-c)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k, \text{ para } x \in (c-r, c+r).$$

Ahora miremos esta situación desde otra perspectiva. En lugar de partir de una serie, vamos a partir de una función $f$ infinitas veces derivable. Entonces, construimos con ella la serie

**Desarrollo en serie de Taylor de $f(x)$ en $x = c$**

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k,$$

que llamaremos la **serie de Taylor** de $f$. (Consulte la nota histórica referida a Brook Taylor en la sección 7.2). Hay dos cuestiones importantes pendientes de respuesta:

- Una serie construida así, ¿es convergente? En caso afirmativo, ¿cuál es su radio de convergencia?
- Si la serie es convergente, converge a una función. ¿A qué función? ¿A la función $f$?

La primera cuestión hay que contestarla caso por caso, en general usando el criterio del cociente. La segunda requiere un análisis más profundo.

### Ejemplo 7.1 Un desarrollo en serie de Taylor

Construir el desarrollo en serie de Taylor para $f(x) = e^x$, centrado en $x = 0$ (esto es, con $c = 0$).

**Solución** Este caso es especialmente fácil, porque

$$f'(x) = e^x,\ f''(x) = e^x,\ \cdots,\ f^{(k)}(x) = e^x, \text{ para } k = 0, 1, 2, \cdots$$

Así, pues, la serie de Taylor buscada es

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^0}{k!}x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k.$$

**Nota 7.1**

Las series de Taylor centradas en $x = 0$ suelen llamarse **series de Maclaurin**. (Véase la nota histórica sobre Colin Maclaurin en la sección 8.3). Así, se dice que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(x)(0)}{k!}x^k$ es el desarrollo en serie de Maclaurin de $f$.

Por el criterio del cociente, de

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!}\frac{k!}{|x|^k} = |x|\lim_{k\to\infty}\frac{k!}{(k+1)k!}$$

$$= |x|\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k+1} = |x|(0) = 0 < 1, \text{ para todo } x,$$

se deduce que la serie de Taylor $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k$ converge para todo número real $x$. Sin embargo, no sabemos a qué función converge. (¿Tal vez a $e^x$?).

Antes de presentar más ejemplos de series de Taylor, intentemos averiguar a qué converge una serie de Taylor dada. En primer lugar, las sumas parciales de una serie de Taylor (como las de toda serie de potencias) son polinomios. Definimos

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$$

$$= f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n.$$

$P_n(x)$ es un polinomio de grado $n$, ya que $\dfrac{f^{(k)}(c)}{k!}$ es una constante para todo $k$. Se dice que es el **polinomio de Taylor de grado** $n$ de $f$, centrado en $x = c$.

### Ejemplo 7.2 Construcción y gráfica de un polinomio de Taylor

Hallar el polinomio de Taylor de grado $n$, centrado en $x = 0$, para $f(x) = e^x$.

**Solución** Igual que en el ejemplo 7.1, aquí $f^{(k)}(x) = e^x$, para todo $k$. Así, pues, el polinomio de Taylor de grado $n$ es

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{e^0}{k!}x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

Puesto que hemos demostrado en el ejemplo 7.1 que la serie de Taylor de $f(x) = e^x$, centrada en $x = 0$, converge para todo $x$, eso implica que la sucesión de sus sumas parciales (o sea, sus polinomios de Taylor) converge para todo $x$. En un esfuerzo por adivinar a qué función convergen los polinomios de Taylor, hemos dibujado las gráficas de $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$ y $P_4(x)$ junto con la de $f(x) = e^x$ en las figuras 8.39a-d.

Observamos que cuando $n$ crece, las gráficas de $P_n(x)$ (al menos en el intervalo de la figura) se aproximan a la gráfica de $f(x) = e^x$. Es razonable conjeturar, como consecuencia, que la serie converge a $e^x$.

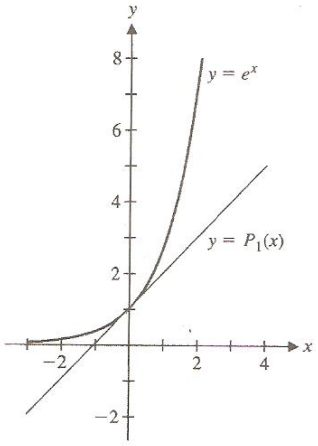



**Figura 8.39a**
$y = e^x$ e $y = P_1(x)$.

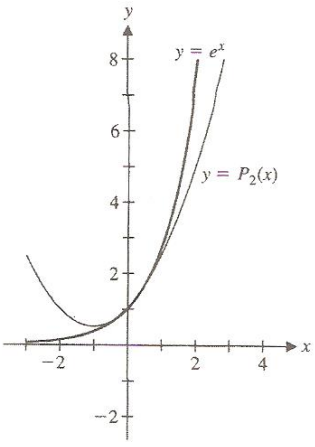



**Figura 8.39b**
$y = e^x$ e $y = P_2(x)$.

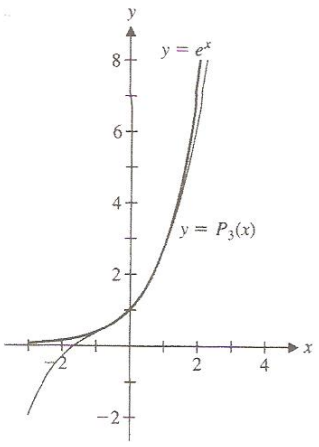



**Figura 8.39c**
$y = e^x$ e $y = P_3(x)$.

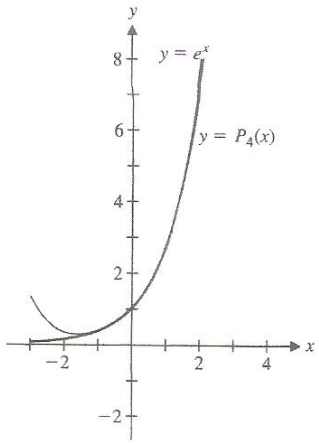



**Figura 8.39d**
$y = e^x$ e $y = P_4(x)$.

En efecto, eso es lo que está ocurriendo, como podremos demostrar usando los dos teoremas siguientes.

---

**Teorema 7.1 (Teorema de Taylor)**
Sea $f$ derivable $(n+1)$ veces en el intervalo $(c - r, c + r)$, para algún $r > 0$. Entonces, para $x \in (c - r, c + r)$, $f(x) \approx P_n(x)$ y el error cometido al usar $P_n(x)$ como aproximación de $f(x)$ es

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}, \tag{7.2}$$

donde $z$ es algún número entre $x$ y $c$.

El término $R_n(x)$ en (7.2), que da el error, se llama **resto** de la serie de Taylor. Es casi idéntico al primer término desechado de la serie de Taylor. Se diferencia de él en que el resto no está evaluado en $c$, sino en algún número $z$ (desconocido) entre $x$ y $c$. El resto tiene una doble utilidad: permite estimar el error cometido al aproximar una función por uno de sus polinomios de Taylor y, como veremos en el próximo teorema, es un instrumento adecuado para probar que la serie de Taylor de una función $f$ converge a $f$.

Dejamos la demostración del teorema de Taylor, algo técnica, para el final de la sección.

**Observación.** Si supiéramos que

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0, \text{ para } \textbf{todo } x \text{ en } (c - r, c + r),$$

podríamos concluir que

$$0 = \lim_{n \to \infty} R_n(x) = \lim_{n \to \infty} [f(x) - P_n(x)] = f(x) - \lim_{n \to \infty} P_n(x),$$

o sea,

$$\lim_{n \to \infty} P_n(x) = f(x), \text{ para } \textbf{todo } x \in (c - r, c + r).$$

Así, pues, la sucesión de sumas parciales de la serie de Taylor (o sea, la sucesión de los polinomios de Taylor) converge a $f(x)$ en todo $x \in (c - r, c + r)$. Enunciamos este hecho en el teorema que sigue.

### Nota 7.2

Para $n = 0$, el teorema de Taylor se reduce a un resultado familiar. En efecto, por una parte,

$$R_0(x) = f(x) - P_0(x) = \frac{f'(z)}{(0+1)!}(x - c)^{0+1}.$$

Como $P_0(x) = f(c)$, se tiene simplemente

$$f(x) - f(c) = f'(z)(x - c).$$

Dividiendo ahora entre $(x - c)$ obtenemos

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(z),$$

que es la conclusión del teorema del valor medio. En este sentido, cabe afirmar que el teorema de Taylor es una generalización del teorema del valor medio.

### Teorema 7.2

Supongamos que $f$ tiene derivadas de todo orden en el intervalo $(c - r, c + r)$, para algún $r > 0$, y que $\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0$, para todo $x$ en $(c - r, c + r)$. Entonces, la serie de Taylor de $f$, centrada en $x = c$, converge a $f(x)$, es decir,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x - c)^k,$$

para todo $x$ en $(c - r, c + r)$.

Volvamos ahora al desarrollo de Taylor para $f(x) = e^x$, centrado en $x = 0$ (ejemplos 7.1 y 7.2), para demostrar por fin que converge a $e^x$, como sospechábamos.

### Ejemplo 7.3 Demostración de que una serie de Taylor converge a la función deseada

Demostrar que la serie de Taylor de $f(x) = e^x$, centrada en $x = 0$, converge a $e^x$.

**Solución** La serie de Taylor en cuestión (ejemplo 7.1) es $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$. Como $f^{(k)}(x) = e^x$, para todo $k = 0, 1, 2, \ldots$ el resto viene dado por

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x - 0)^{n+1} = \frac{e^z}{(n+1)!} x^{n+1}, \tag{7.3}$$

donde $z$ está entre $x$ y 0 (depende también del valor de $n$). En primer lugar, buscamos una cota para $e^z$. Si $x > 0$, entonces $0 < z < x$, así que

$$e^z < e^x.$$

Y si $x \leq 0$, entonces $x \leq z \leq 0$, luego

$$e^z \leq e^0 = 1.$$

Denotemos por $M$ la mayor de esas dos cotas para $e^z$, esto es,

$$M = \text{máx}\{e^x, 1\}.$$

Entonces, para cualquier $x$ y cualquier $n$, tenemos

$$e^z \leq M.$$

Eso, junto con (7.3), proporciona la siguiente estimación del error:

$$|R_n(x)| = \frac{e^z}{(n+1)!}|x|^{n+1} \leq M\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{7.4}$$

Para probar que la serie de Taylor converge a $e^x$, queremos usar (7.4) con el fin de demostrar que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, para todo $x$. Sin embargo, dado cualquier $x$, ¿cómo podemos calcular $\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$? No podemos de manera directa, pero sí indirectamente. Consideramos la **serie** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$. Aplicándole el criterio del cociente, se tiene

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+2}}{(n+2)!}\frac{(n+1)!}{|x|^{n+1}} = |x|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+2} = 0,$$

para todo $x$, de donde se sigue que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ converge absolutamente para todo $x$. Por el criterio del término general, dado que esa última serie converge su término general, debe tender a 0 cuando $n \to \infty$, es decir,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

Por tanto, (7.4) implica que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, para todo $x$. Y el teorema 7.2 asegura que la serie de Taylor converge a $e^x$. Así, hemos probado que, para todo $x$,

$$\boxed{e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots} \tag{7.5}$$

El truco, si se puede llamar así, para hallar un desarrollo en serie de Taylor consiste en calcular *con precisión* suficientes derivadas, tantas que seamos capaces de reconocer la forma general de la derivada $n$-ésima. Por tanto, ¡tómese su tiempo y **vaya con cuidado**! Una vez hecho eso, sólo le faltará probar que $R_n(x) \to 0$, cuando $n \to \infty$ para todo $x$, y habrá demostrado que la serie converge a la función que estaba desarrollando.

Una razón importante para calcular series de Taylor es que sus sumas parciales permiten aproximar valores de funciones.

### Ejemplo 7.4 Aproximación de $e$ mediante una serie de Taylor

Usar la serie de Taylor (7.5) de $e^x$ para aproximar el valor del número $e$.

**Solución** Se tiene

$$e = e^1 = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}1^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}.$$

| $M$ | $\sum_{k=0}^{M} \frac{1}{k!}$ |
|---|---|
| 5 | 2,716666667 |
| 10 | 2,718281801 |
| 15 | 2,718281828 |
| 20 | 2,718281828 |

La tabla, que muestra varias sumas parciales de esa serie, da una aproximación muy precisa:

$$e \approx 2{,}718281828.$$

**Ejemplo 7.5** **Un desarrollo en serie de Taylor para sen $x$**

Hallar la serie de Taylor de $f(x) = \operatorname{sen} x$, centrada en $x = \frac{\pi}{2}$, y demostrar que esa serie converge a sen $x$ para todo $x$.

**Solución** En este caso, la serie de Taylor es

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{k!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^k.$$

Empezamos calculando unas cuantas derivadas y sus valores en $x = \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \operatorname{sen} x & f\left(\tfrac{\pi}{2}\right) &= 1,\\
f'(x) &= \cos x & f'\left(\tfrac{\pi}{2}\right) &= 0,\\
f''(x) &= -\operatorname{sen} x & f''\left(\tfrac{\pi}{2}\right) &= -1,\\
f'''(x) &= -\cos x & f'''\left(\tfrac{\pi}{2}\right) &= 0,\\
f^{(4)}(x) &= -\operatorname{sen} x & f^{(4)}\left(\tfrac{\pi}{2}\right) &= 1
\end{aligned}$$

Es evidente que, evaluadas en $\frac{\pi}{2}$, las derivadas impares dan 0 y las pares $\pm 1$, luego la serie de Taylor es

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{k!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^k &= 1 - \frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4 - \frac{1}{6!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^6 + \cdots\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2k}.
\end{aligned}$$

Con el fin de verificar que la serie converge, consideramos el resto, que viene dado por

$$|R_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{n+1}\right|, \tag{7.6}$$

para algún $z$ entre $x$ y $\frac{\pi}{2}$. El cálculo anterior de las derivadas enseña que

$$f^{(n+1)}(z) = \begin{cases} \pm\cos z, & \text{si } n \text{ es par} \\ \pm \operatorname{sen} z, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}.$$

Por tanto,

$$\left|f^{(n+1)}(z)\right| \le 1,$$

para todo $n$. (Nótese que esto es cierto tanto si $n$ es par como si $n$ es impar). De (7.6) se deduce ahora que

$$|R_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}\right|\left|x-\frac{\pi}{2}\right|^{n+1} \le \frac{1}{(n+1)!}\left|x-\frac{\pi}{2}\right|^{n+1} \to 0,$$

cuando $n \to \infty$, para todo $x$, como en el ejemplo 7.3. Así, pues,

$$\operatorname{sen} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{2k} = 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4 - \cdots,$$

para todo $x$. Las figuras 8.40a-d muestran las gráficas de $f(x) = \operatorname{sen} x$ junto a las de los polinomios de Taylor $P_2(x)$, $P_4(x)$, $P_6(x)$ y $P_8(x)$ (las primeras sumas parciales de la serie). Vemos que cuanto mayor es el grado del polinomio de Taylor, mejor tiende a ser su aproximación de $f(x) = \operatorname{sen} x$.

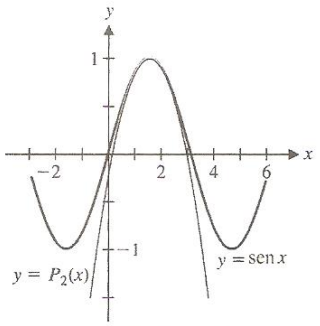



**Figura 8.40a**

$y = \operatorname{sen} x$ e $y = P_2(x)$.

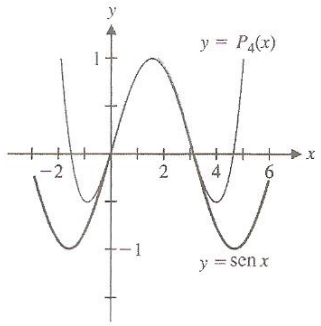



**Figura 8.40b**

$y = \operatorname{sen} x$ e $y = P_4(x)$.

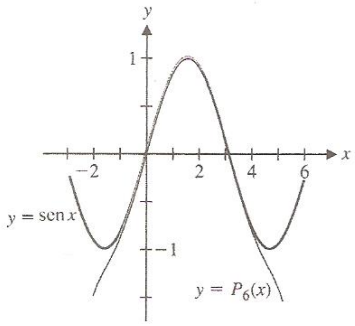



**Figura 8.40c**

$y = \operatorname{sen} x$ e $y = P_6(x)$.

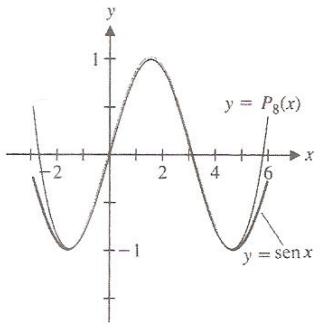



**Figura 8.40d**

$y = \operatorname{sen} x$ e $y = P_8(x)$.

El próximo ejemplo ilustra el uso del teorema de Taylor para estimar el error cometido al tomar el valor de un polinomio de Taylor como aproximación del valor de una función.

### Ejemplo 7.6 Error en una aproximación por polinomios de Taylor

Aproximar $\ln(1{,}1)$ mediante un polinomio de Taylor y estimar el error de la aproximación.

**Solución** Como conocemos exactamente el valor de $\ln 1$ y 1 está muy cerca de 1,1 (¿por qué importa esto?), desarrollamos $f(x) = \ln x$ en una serie de Taylor, centrada en $x = 1$. Evaluamos un número suficiente de derivadas hasta que la pauta aparece con nitidez.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln x & f(1) &= 0\\
f'(x) &= x^{-1} & f'(1) &= 1\\
f''(x) &= -x^{-2} & f''(1) &= -1\\
f'''(x) &= 2x^{-3} & f'''(1) &= 2\\
f^{(4)}(x) &= -3 \cdot 2x^{-4} & f^{(4)}(1) &= -3!\\
f^{(5)}(x) &= 4!\,x^{-5} & f^{(5)}(1) &= 4!\\
&\vdots & &\vdots\\
f^{(k)}(x) &= (-1)^{k+1}\,(k-1)!\,x^{-k} & f^{(k)}(1) &= (-1)^{k+1}(k-1)!
\end{aligned}$$

Obtenemos la serie de Taylor

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(1)}{k!}\,(x-1)^k\\
&\quad = (x-1) - \frac{1}{2}\,(x-1)^2 + \frac{2}{3!}\,(x-1)^3 + \cdots + (-1)^{k+1}\,\frac{(k-1)!}{k!}\,(x-1)^k + \cdots\\
&\quad = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\,(x-1)^k.
\end{aligned}$$

Podríamos usar el resto para demostrar que la serie converge a $f(x) = \ln x$ en $0 < x < 2$, pero ésa no es la cuestión aquí (lo dejamos como ejercicio). Como ilustración, construimos el polinomio $P_4(x)$ de Taylor:

$$\begin{aligned}
P_4(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\,(x-1)^k \qquad \text{por lo anterior}\\
&= (x-1) - \frac{1}{2}\,(x-1)^2 + \frac{1}{3}\,(x-1)^3 - \frac{1}{4}\,(x-1)^4.
\end{aligned}$$

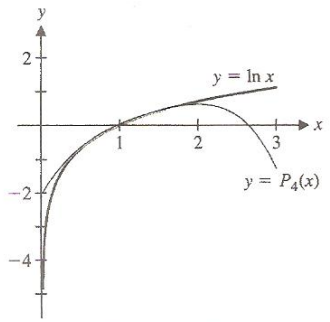



**Figura 8.41**
$y = \ln x$ e $y = P_4(x)$.

La figura 8.41 muestra las gráficas de $y = \ln x$ e $y = P_4(x)$. Tomando $x = 1{,}1$, se obtiene la aproximación

$$\ln(1{,}1) \approx P_4(1{,}1) = 0{,}1 - \frac{1}{2}\,(0{,}1)^2 + \frac{1}{3}\,(0{,}1)^3 - \frac{1}{4}\,(0{,}1)^4 \approx 0{,}095308333.$$

Podemos estimar el error cometido en esa aproximación usando el resto. Se tiene

$$\begin{aligned}
|Error| &= |\ln(1{,}1) - P_4(1{,}1)| = |R_4(1{,}1)|\\
&= \left| \frac{f^{(4+1)}(z)}{(4+1)!}\,(1{,}1-1)^{4+1} \right| = \frac{4!\,|z|^{-5}}{5!}\,(0{,}1)^5,
\end{aligned}$$

donde $z$ está entre 1 y 1,1. Eso proporciona la cota de error:

$$|Error| = \frac{(0{,}1)^5}{5z^5} < \frac{(0{,}1)^5}{5(1^5)} = 0{,}000002,$$

ya que $1 < z < 1{,}1$ implica $\frac{1}{z} < \frac{1}{1} = 1$. En otras palabras, nuestra aproximación $\ln(1{,}1) \approx 0{,}095308333$ difiere del valor exacto a lo sumo en $\pm 0{,}000002$.

---

Una cuestión más interesante es determinar cuántos términos de la serie de Taylor hay que sumar para garantizar una precisión prefijada. En el próximo ejemplo resolvemos esto gracias al resto.

## Ejemplo 7.7 Número de términos necesarios para una precisión prefijada

Calcular el número de términos de la serie de Taylor de $f(x) = \ln x$, centrada en $x = 1$, necesarios para asegurar una precisión de al menos $1 \times 10^{-10}$ en la aproximación de $\ln(1{,}1)$ y $\ln(1{,}5)$.

**Solución** De los cálculos realizados en el ejemplo 7.6 y de (7.2) se deduce que

$$|R_n(1{,}1)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} (1{,}1 - 1)^{n+1} \right|$$

$$= \frac{n!\,|z|^{-n-1}}{(n+1)!} (0{,}1)^{n+1} = \frac{(0{,}1)^{n+1}}{(n+1)z^{n+1}} < \frac{(0{,}1)^{n+1}}{n+1},$$

porque $1 < z < 1{,}1$ implica $\frac{1}{z} < \frac{1}{1} = 1$. Como deseamos que el error sea menor que $1 \times 10^{-10}$, exigimos

$$|R_n(1{,}1)| < \frac{(0{,}1)^{n+1}}{n+1} < 1 \times 10^{-10}.$$

Por prueba y error se ve que $n = 9$ asegura la precisión requerida. Claro está que valores mayores de $n$ también sirven, puesto que $\frac{(0{,}1)^{n+1}}{n+1}$ es una función decreciente de $n$. Por tanto, tenemos la aproximación

$$\ln(1{,}1) \approx P_9(1{,}1) = \sum_{k=0}^{9} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (1{,}1 - 1)^k$$

$$= (0{,}1) - \frac{1}{2}(0{,}1)^2 + \frac{1}{3}(0{,}1)^3 - \frac{1}{4}(0{,}1)^4 + \frac{1}{5}(0{,}1)^5$$

$$- \frac{1}{6}(0{,}1)^6 + \frac{1}{7}(0{,}1)^7 - \frac{1}{8}(0{,}1)^8 + \frac{1}{9}(0{,}1)^9$$

$$\approx 0{,}095310179813,$$

de la que sabemos, por nuestra estimación del error, que es correcta con una precisión no inferior a $1 \times 10^{-10}$. La figura 8.42 muestra las gráficas de $y = \ln x$ e $y = P_9(x)$. Comparada con la figura 8.41, se observa que $P_9(x)$ es mejor aproximación que $P_4(x)$ dentro del intervalo de convergencia (0, 2), pero no fuera de él.

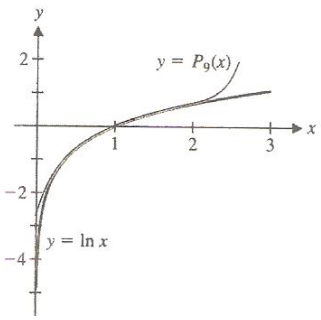



**Figura 8.42**
$y = \ln x$ e $y = P_9(x)$.

Análogamente, para algún $z$ entre 1 y 1,5,

$$|R_n(1{,}5)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} (1{,}5 - 1)^{n+1} \right| = \frac{n!|z|^{-n-1}}{(n+1)!} (0{,}5)^{n+1}$$

$$= \frac{(0{,}5)^{n+1}}{(n+1)z^{n+1}} < \frac{(0{,}5)^{n+1}}{n+1},$$

ya que $1 < z < 1{,}5$ implica $\frac{1}{z} < \frac{1}{1} = 1$. Así, pues, aquí exigimos

$$|R_n(1{,}5)| < \frac{(0{,}5)^{n+1}}{n+1} < 1 \times 10^{-10}.$$

Por prueba y error vemos que $n = 28$ garantiza la precisión requerida. Nótese que son necesarios muchos más términos para lograr una cierta precisión en $f(1{,}5)$ que en $f(1{,}1)$. Eso no hace sino corroborar el hecho ya comentado de que cuanto más lejos de $x = c$ (el punto en el que está centrado el desarrollo), más lenta es la convergencia de la serie de Taylor.

Por conveniencia, hemos elaborado una tabla con los desarrollos en serie de Taylor más comunes.

| Serie de Taylor | Intervalo de convergencia | Dónde aparece |
|---|---|---|
| $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{4!} x^4 + \dots$ | $(-\infty, \infty)$ | ejemplos 7.1 y 7.3 |
| $\operatorname{sen} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 - \frac{1}{7!} x^7 + \dots$ | $(-\infty, \infty)$ | ejercicio 9 |
| $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 - \frac{1}{6!} x^6 + \dots$ | $(-\infty, \infty)$ | ejercicio 7 |
| $\operatorname{sen} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{2k} = 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4 - \dots$ | $(-\infty, \infty)$ | ejemplo 7.5 |
| $\ln x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (x-1)^k = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \dots$ | $(0, 2]$ | ejemplos 7.6 y 7.7 |
| $\tan^{-1} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} = x - \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{7} x^7 + \dots$ | $(-1, 1)$ | ejemplo 6.6 |

Una vez conocida la serie de Taylor de una función, se pueden deducir de ella los desarrollos de Taylor de otras funciones por simple sustitución.

### Ejemplo 7.8 Nuevas series de Taylor a partir de otras ya conocidas

Hallar series de Taylor en potencias de $x$ para $e^{2x}$, $e^{x^2}$ y $e^{-2x}$.

**Solución** En lugar de efectuar el cálculo de esas series de Taylor de principio a fin, recordemos que en el ejemplo 7.3 hemos demostrado que

$$e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k = 1 + t + \frac{1}{2!} t^2 + \frac{1}{3!} t^3 + \frac{1}{4!} t^4 + \cdots, \tag{7.7}$$

para todo $t \in (-\infty, \infty)$. Utilizamos $t$ como variable, en vez de $x$, para facilitar las sustituciones. Haciendo $t = 2x$ en (7.7), obtenemos la nueva serie de Taylor

$$e^{2x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (2x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} x^k = 1 + 2x + \frac{2^2}{2!} x^2 + \frac{2^3}{3!} x^3 + \cdots$$

Análogamente, haciendo $t = x^2$ en (7.7), resulta la serie de Taylor

$$e^{x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^{2k} = 1 + x^2 + \frac{1}{2!} x^4 + \frac{1}{3!} x^6 + \cdots$$

Finalmente, con $t = -2x$ en (7.7) da el desarrollo

$$e^{-2x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (-2x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} 2^k x^k = 1 - 2x + \frac{2^2}{2!} x^2 - \frac{2^3}{3!} x^3 + \cdots$$

Las tres series resultantes convergen para todo $x \in (-\infty, \infty)$. (¿Por qué?).

## Demostración del teorema de Taylor

Hemos comentado antes que el teorema de Taylor es una generalización del teorema del valor medio. Pues bien, sus demostraciones también son paralelas y utilizan el teorema de Rolle: Si $g$ es continua en $[a, b]$, derivable en $(a, b)$ y $g(a) = g(b)$, existe un $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$. Igual que en la demostración del teorema del valor medio, para cada $x \in (c - r, c + r)$ **fijado**, definimos la función auxiliar

$$g(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \frac{1}{2!} f''(t)(x-t)^2 - \frac{1}{3!} f'''(t)(x-t)^3 - \cdots - \frac{1}{n!} f^{(n)}(t)(x-t)^n - R_n(x) \frac{(x-t)^{n+1}}{(x-c)^{n+1}},$$

donde $R_n(x)$ denota el resto, $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$. Si hacemos $t = x$, obtenemos

$$g(x) = f(x) - f(x) - 0 - 0 - \cdots - 0 = 0,$$

y si hacemos $t = c$,

$$\begin{aligned} g(c) &= f(x) - f(c) - f'(c)(x-c) - \frac{1}{2!} f''(c)(x-c)^2 - \frac{1}{3!} f'''(c)(x-c)^3 \\ &\quad - \cdots - \frac{1}{n!} f^{(n)}(c)(x-c)^n - R_n(x) \frac{(x-c)^{n+1}}{(x-c)^{n+1}} \\ &= f(x) - P_n(x) - R_n(x) = R_n(x) - R_n(x) = 0. \end{aligned}$$

Por el teorema de Rolle, debe existir un número $z$ entre $x$ y $c$ para el cual $g'(z) = 0$. Derivando nuestra expresión de $g(t)$ (¡respecto de $t$!), resulta (¡cuidado con todas las reglas del producto!)

$$\begin{aligned} g'(t) &= 0 - f'(t) - f'(t)(-1) - f''(t)(x-t) - \frac{1}{2} f''(t)(2)(x-t)(-1) \\ &\quad - \frac{1}{2} f'''(t)(x-t)^2 - \cdots - \frac{1}{n!} f^{(n)}(t)(n)(x-t)^{n-1}(-1) \\ &\quad - \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n - R_n(x) \frac{(n+1)(x-t)^n(-1)}{(x-c)^{n+1}} \\ &= -\frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n + R_n(x) \frac{(n+1)(x-t)^n}{(x-c)^{n+1}}, \end{aligned}$$

después de que la mayor parte de los términos se cancelen. Por tanto, tomando $t = z$ se tiene

$$0 = g'(z) = -\frac{1}{n!} f^{(n+1)}(z)(x-z)^n + R_n(x) \frac{(n+1)(x-z)^n}{(x-c)^{n+1}}.$$

Despejamos el resto $R_n(x)$, escribiendo

$$R_n(x) \frac{(n+1)(x-z)^n}{(x-c)^{n+1}} = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(z)(x-z)^n,$$

y finalmente,

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(z)(x-z)^n \frac{(x-c)^{n+1}}{(n+1)(x-z)^n} \\ &= \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)n!} (x-c)^{n+1} \\ &= \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} (x-c)^{n+1}, \end{aligned}$$

que es lo que queríamos demostrar.

# EJERCICIOS 8.7

1. Comparar el polinomio de Taylor de grado $n = 1$ con la aproximación lineal (sección 3.1). Dar una interpretación análoga del polinomio de Taylor con $n = 2$. Es decir, comparar las propiedades gráficas (posición, pendiente, concavidad) del polinomio de Taylor con las de la función $f(x)$ en $x = c$.

2. Discutir cómo una calculadora podría usar polinomios de Taylor para calcular sen(1,2). En particular, ¿cómo sabría la calculadora cuántos términos debe sumar? Comparar ese número de términos con el que necesitaría para evaluar sen(100). Describir un truco que hiciera mucho más fácil el cálculo de sen(100). (Ayuda: La función seno es periódica).

3. Los polinomios de Taylor se construyen a partir de $f(c)$, $f'(c)$, $f''(c)$, etc. Explicar, en términos gráficos, por qué información en un punto (posición, pendiente, concavidad...) permite construir la gráfica de la función en todo el intervalo de convergencia.

4. Si $f(c)$ representa la posición de un objeto en el instante $t = c$, $f'(c)$ y $f''(c)$ son su velocidad y su aceleración en ese instante, explicar, en términos físicos, cómo el conocimiento de esos datos (más $f'''(c)$, etc.) permite predecir la posición del objeto en el intervalo de convergencia.

5. Nuestra tabla de series de Taylor comunes contiene dos series distintas para sen $x$. Explicar por qué una misma función puede tener dos desarrollos distintos en serie de Taylor. En un problema concreto (por ejemplo, aproximar sen 2), ¿cómo elegiría la más adecuada?

6. Explicar por qué la serie de Taylor de $f(x) = x^2 - 1$, centrada en $c = 0$, es simplemente $x^2 - 1$.

**En los ejercicios 7-14, hallar la serie de Maclaurin (esto es, la serie de Taylor centrada en $c = 0$) y su intervalo de convergencia.**

7. $f(x) = \cos x$
8. $f(x) = e^{2x}$
9. $f(x) = \operatorname{sen} x$
10. $f(x) = \cos 2x$
11. $f(x) = \ln(1 + x)$
12. $f(x) = e^{-x}$
13. $f(x) = 1/(1 + x^2)$
14. $f(x) = 1/(1 - x)$

**En los ejercicios 15-20, hallar la serie de Taylor centrada en el punto que se especifica y su intervalo de convergencia.**

15. $f(x) = e^{x-1}$, $c = 1$
16. $f(x) = \cos x$, $c = -\pi/2$
17. $f(x) = \ln x$, $c = e$
18. $f(x) = e^x$, $c = 2$
19. $f(x) = 1/x$, $c = 1$
20. $f(x) = 1/x$, $c = -1$

**En los ejercicios 21-28, representar la gráfica de $f(x)$ y las de los polinomios de Taylor con el centro y los grados que se indican.**

21. $f(x) = \cos x$, $c = 0$, $n = 5$; $n = 9$
22. $f(x) = \ln x$, $c = 1$, $n = 4$; $n = 8$
23. $f(x) = \sqrt{x}$, $c = 1$, $n = 3$; $n = 6$
24. $f(x) = \dfrac{1}{1 + x}$, $c = 0$, $n = 4$; $n = 8$
25. $f(x) = e^x$, $c = 2$, $n = 3$; $n = 6$
26. $f(x) = \cos x$, $c = \pi/2$, $n = 4$; $n = 8$
27. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $c = 4$, $n = 2$; $n = 4$
28. $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$, $c = 0$, $n = 2$; $n = 4$

**En los ejercicios 29-32, demostrar que la serie de Taylor converge a $f(x)$, probando que $R_n(x) \to 0$ cuando $n \to \infty$.**

29. $\operatorname{sen} x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$
30. $\cos x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$
31. $\ln x = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(x-1)^k}{k}$, $1 \le x \le 2$
32. $e^{-x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k!}$

**En los ejercicios 33-38, (a) usar un polinomio de Taylor de grado 4 para aproximar el número pedido, (b) estimar el error de esa aproximación, (c) estimar el número de términos que es necesario sumar para garantizar una precisión de $10^{-10}$.**

33. ln(1,05)
34. ln(0,9)
35. $\sqrt{1,1}$
36. $\sqrt{1,2}$
37. $e^{0.1}$
38. $e^{-0.1}$

**En los ejercicios 39-44, usar series de Taylor para verificar la fórmula propuesta.**

39. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} = e^2$
40. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = e^{-1}$
41. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)k\pi^{2k+1}}{(2k+1)!} = 0$
42. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(\pi/2)^{2k+1}}{(2k+1)!} = 1$
43. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4} = e^2$
44. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2$

**En los ejercicios 45-52, usar una serie de Taylor conocida para hallar la serie de Taylor centrada en $c = 0$ de la función propuesta. Calcular su radio de convergencia.**

45. $f(x) = e^{-2x}$
46. $f(x) = e^{3x}$
47. $f(x) = xe^{-x^2}$
48. $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$

49. $f(x) = \operatorname{sen} x^2$

50. $f(x) = x \operatorname{sen} 2x$

51. $f(x) = \cos 3x$

52. $f(x) = \cos x^3$

53. Tal vez se haya planteado por qué es necesario probar que $\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0$ para concluir que la serie de Taylor de una función $f$ converge a $f$. Considere $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$. Demuestre que $f'(0) = f''(0) = 0$. (Ayuda: Usar que $\lim_{n \to 0} \dfrac{e^{-1/n^2}}{n^n} = 0$ para todo entero $n > 0$). Se puede demostrar que $f^{(n)}(0) = 0$ para todo $n$. Así, pues, la serie de Taylor de $f(x)$ centrada en $c = 0$ es idénticamente igual a 0. Es, en consecuencia, una serie de Taylor convergente que no converge a $f(x)$.

54. La **función error** $\operatorname{erf}(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^x e^{-u^2}\, du$ es importante en muchas aplicaciones. Calcular y representar gráficamente el polinomio de Taylor de grado 4 de $\operatorname{erf}(x)$ centrado en $c = 0$.

55. En el instante $t = 0$, un avión está en la posición $f(0) = 10$ millas con velocidad $f'(0) = 10$ millas/min, aceleración $f''(0) = 2$ millas/min$^2$ y $f'''(0) = -1$ millas/min$^3$. Predecir su posición en el instante $t = 2$ min.

56. Un astronauta está en (0, 0) y la Luna viene representada por un círculo de radio 1 centrado en (10, 5). La cápsula del astronauta sigue una trayectoria $y = f(x)$ con posición actual $f(0) = 0$, pendiente $f'(0) = 1/5$, concavidad $f''(0) = -1/10$, $f'''(0) = 1/25$, $f^{(4)}(0) = 1/25$ y $f^{(5)}(0) = -1/50$. Dibujar la gráfica de una aproximación de $f(x)$ dada por un polinomio de Taylor. Con esos datos, ¿aconsejaría al astronauta que modifique su trayectoria? ¿Qué confianza tiene en su aproximación?

57. Hallar la serie de Taylor de $e^x$ centrada en un punto $c$ arbitrario.

58. Hallar la serie de Taylor de $\sqrt{x}$ centrada en un punto arbitrario $c = a^2$.

**Los ejercicios 59-62 requieren el desarrollo del binomio.**

59. Probar que la serie de Maclaurin de $(1 + x)^r$ es
$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{k!} x^k.$$

60. Simplificar la serie del ejercicio 59 para $r = 2$, $r = 3$, $r$ entero $> 0$.

61. Usar el ejercicio 59 para escribir la serie de Maclaurin de $f(x) = \sqrt{1 + x}$.

62. Usar el ejercicio 59 para escribir la serie de Maclaurin de $f(x) = (1 + x)^{3/2}$.

63. Hallar la serie de Maclaurin de $f(x) = \cosh x$ y $f(x) = \operatorname{senh} x$. Compararlas con las series de Maclaurin de $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$.

64. Usando la serie de Maclaurin de $\tan x$ y el resultado del ejercicio 63, conjeturar cuál es la serie de Maclaurin de $\operatorname{tgh} x$.

65. Casi todos los resultados sobre series se aplican a las series de números complejos. Con $i = \sqrt{-1}$, probar que $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$ y así sucesivamente. Cambiar $x$ por $ix$ en la serie de Maclaurin de $e^x$, separar los términos con $i$ de los que no contienen $i$ (tras las simplificaciones indicadas más arriba) y deducir la **fórmula de Euler**: $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$.

66. Aplicando el mismo procedimiento que en el ejercicio 65, probar que $\cos(ix) = \cosh x$ y $\operatorname{sen}(ix) = i \operatorname{senh} x$. La consecuencia es que las funciones trigonométricas y sus correspondientes hiperbólicas están estrechamente relacionadas como funciones de una variable compleja.

## 8.8 APLICACIONES DE LAS SERIES DE TAYLOR

En la sección 8.7 hemos definido las series de Taylor, ilustrado cómo se calculan y dado algunas indicaciones acerca de su uso. En esta sección veremos algunas de sus posibles aplicaciones. Reconocerá que la tarea de las secciones precedentes ha resultado dura. La buena noticia es que ese esfuerzo va a producir magníficos dividendos, como pondrán de manifiesto los problemas siguientes. Conviene advertir que muchos de los pioneros del Cálculo (Newton y Leibniz entre ellos) trabajaron activamente con series.

En esta sección haremos uso de las series para aproximar valores de funciones trascendentes, para evaluar límites e integrales y para definir funciones nuevas muy importantes. Conforme se vaya adentrando en diversos campos científicos irá encontrando nuevas aplicaciones de las series de Taylor, aparte de las aquí citadas.

En la introducción de este capítulo nos preguntábamos cómo se las arreglan las calculadoras para evaluar funciones trascendentes, por ejemplo, para calcular sen(1,234567). Ya podemos contestar: usando series de Taylor.

**Ejemplo 8.1** **Aproximación de un valor del seno por polinomios de Taylor**

Usar una serie de Taylor para calcular sen(1,234567) con error menor que $10^{-11}$.

**Solución** No es difícil hallar la serie de Taylor de $f(x) = \operatorname{sen} x$ centrada en $x = 0$ (se dejó como ejercicio en la sección 8.7):

$$\operatorname{sen} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots,$$

con intervalo de convergencia $(-\infty, \infty)$. Tomando $x = 1{,}234567$, se obtiene la representación de sen 1,234567 en serie

$$\operatorname{sen} 1{,}234567 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (1{,}234567)^{2k+1}$$

que es una serie alternada. Podemos aproximar el valor deseado por una suma parcial de esa serie, pero ¿cuál será el error? Recordemos que para una serie alternada el error es menor que el valor absoluto del primer término desechado. (También se puede acotar el error usando el resto y el teorema de Taylor). Para garantizar que el error será menor que $10^{-11}$, debemos encontrar un entero $k$ tal que $\dfrac{1{,}234567^{2k+1}}{(2k+1)!} < 10^{-11}$. Por prueba y error se ve que

$$\frac{1{,}234567^{17}}{17!} \approx 1{,}010836 \times 10^{-13} < 10^{-11},$$

de modo que $k = 8$ sirve. Eso quiere decir que el primer término desechado corresponde a $k = 8$, así que tomamos la suma parcial

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 1{,}234567 &\approx \sum_{k=0}^{7} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (1{,}234567)^{2k+1} \\ &= 1{,}234567 - \frac{1{,}234567^3}{3!} + \frac{1{,}234567^5}{5!} - \frac{1{,}234567^7}{7!} + \ldots - \frac{1{,}234567^{15}}{15!} \\ &\approx 0{,}94400543137.\end{aligned}$$

Compare este valor aproximado con el que dé su calculadora.

En el ejemplo 8.1 hemos actuado de forma un tanto precipitada. Ciertamente, hemos conseguido una aproximación con la precisión pedida, pero ¿era ése el camino más fácil para llegar a ella? No. Y no lo es porque hemos tomado la serie de Taylor de $f(x) = \operatorname{sen} x$ que teníamos a mano, sin pensar más. Debemos resistir el primer impulso, que es siempre el de tomar la serie de Taylor centrada en $x = 0$ (la serie de Maclaurin), y pensar si hay una elección más conveniente. El próximo ejemplo ilustra esta situación.

**Ejemplo 8.2** **Elección del desarrollo en serie de Taylor más conveniente**

Repetir el ejemplo 8.1 con una elección más eficiente de la serie de Taylor.

**Solución** Vimos en la sección 8.7 que una serie de Taylor converge tanto más rápidamente cuanto más cerca estemos del punto en el que está centrada. Así, pues, si queremos calcular sen 1,234567, ¿tenemos a mano alguna serie de Taylor para sen $x$ centrada en un punto cercano al $x = 1{,}234567$? Sólo conocemos el valor exacto del seno en unos pocos puntos. Recordando en cuáles, pronto nos daremos cuenta de que un desarrollo centrado en $x = \dfrac{\pi}{2} \approx 1{,}57$ es mejor elección que uno centrado en $x = 0$. (Otra elección razonable sería la serie de Taylor centrada en $x = \dfrac{\pi}{3}$). En el ejemplo 7.5 hemos encontrado el desarrollo

$$\operatorname{sen} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k!)} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{2k} = 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4 - \cdots,$$

con intervalo de convergencia $(-\infty, \infty)$. De ahí se sigue, para $x = 1{,}234567$:

$$\operatorname{sen} 1{,}234567 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k!)} \left(1{,}234567 - \frac{\pi}{2}\right)^{2k}$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(1{,}234567 - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(1{,}234567 - \frac{\pi}{2}\right)^4 -$$

que vuelve a ser una serie alternada. Acotando el error mediante el resto de Taylor, se tiene

$$|R_n(1{,}234567)| = \left|\frac{f^{(2n+2)}(z)}{(2n+2)!}\right| \left|1{,}234567 - \frac{\pi}{2}\right|^{2n+2}$$

$$\leq \frac{\left|1{,}234567 - \frac{\pi}{2}\right|^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

(También se puede usar el teorema 4.2). Por prueba y error se ve que

$$\frac{\left|1{,}234567 - \frac{\pi}{2}\right|^{2n+2}}{(2n+2)!} < 10^{-11}$$

para $n = 4$, luego una aproximación con la precisión requerida es

$$\operatorname{sen} 1{,}234567 \approx \sum_{k=0}^{4} \frac{(-1)^k}{(2k!)} \left(1{,}234567 - \frac{\pi}{2}\right)^{2k}$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(1{,}234567 - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(1{,}234567 - \frac{\pi}{2}\right)^4$$

$$- \frac{1}{6!}\left(1{,}234567 - \frac{\pi}{2}\right)^6 + \frac{1}{8!}\left(1{,}234567 - \frac{\pi}{2}\right)^8$$

$$\approx 0{,}94400543137.$$

Compare este resultado con el del ejemplo 8.1, donde hemos tenido que sumar más términos de la serie de Taylor para obtener el mismo grado de precisión.

---

Las series de Taylor permiten adivinar rápidamente el valor de ciertos límites difíciles. Pero ¡mucho cuidado! La teoría que decide cuándo esas conjeturas son correctas cae fuera del nivel de este libro. En cualquier caso, se pueden obtener ayudas interesantes acerca de algunos límites.

**Ejemplo 8.3** **Uso de polinomios de Taylor para conjeturar el valor de un límite**

Usar series de Taylor para conjeturar el valor de $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x^3 - x^3}{x^9}$.

**Solución** Recordemos de nuevo la serie de Maclaurin de sen $x$,

$$\operatorname{sen} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots,$$

con intervalo de convergencia $(-\infty, \infty)$. Cambiando $x$ por $x^3$, obtenemos

$$\operatorname{sen} x^3 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (x^3)^{2k+1} = x^3 - \frac{x^9}{3!} + \frac{x^{15}}{5!} - \cdots$$

Así, pues,

$$\frac{\operatorname{sen} x^3 - x^3}{x^9} = \frac{\left(x^3 - \dfrac{x^9}{3!} + \dfrac{x^{15}}{5!} - \cdots\right) - x^3}{x^9} = -\frac{1}{3!} + \frac{x^6}{5!} + \cdots$$

Por tanto, conjeturamos que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x^3 - x^3}{x^9} = -\frac{1}{3!} = -\frac{1}{6}.$$

Puede verificar que ese límite es correcto aplicando la regla de L'Hôpital (tres veces y simplificando cada vez).

¿Para qué otras cosas se pueden usar las series de Taylor? Para muchas, pero la que vamos a exponer es particularmente relevante. Puesto que los polinomios de Taylor sirven para aproximar funciones y no hay nada más fácil de integrar que un polinomio, parece lógico utilizarlos para aproximar el valor de integrales definidas. Resulta que esa aproximación es, con frecuencia, mejor que la obtenida por los métodos numéricos de la sección 4.7. Ilustramos esta aplicación en el ejemplo que sigue.

### Ejemplo 8.4 Aproximación de una integral definida usando series de Taylor

Usar un polinomio de Taylor de grado 8 para aproximar $\int_{-1}^{1} \cos(x^2)\, dx$.

**Solución** Como no conocemos una primitiva de $\cos(x^2)$, estamos obligados a aproximar la integral. Puesto que estamos integrando en el intervalo $(-1, 1)$, la serie de Maclaurin (la serie de Taylor centrada en $x = 0$) parece una buena elección. Es fácil ver que

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 - \frac{1}{6!} x^6 + \cdots,$$

que converge en todos los puntos de $(-\infty,\infty)$. Cambiando $x$ por $x^2$ obtenemos el desarrollo en serie de Taylor

$$\cos(x)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{4k} = 1 - \frac{1}{2} x^4 + \frac{1}{4!} x^8 - \frac{1}{6!} x^{12} + \cdots,$$

y, por tanto,

$$\cos(x)^2 \approx 1 - \frac{1}{2} x^4 + \frac{1}{4!} x^8.$$

Esto lleva a la aproximación

$$\int_{-1}^{1} \cos(x)^2\, dx \approx \int_{-1}^{1} \left(1 - \frac{1}{2} x^4 + \frac{1}{4!} x^8\right) dx$$

$$= \left(x - \frac{x^5}{10} + \frac{x^9}{216}\right)\Bigg|_{x=-1}^{x=1}$$

$$= \frac{977}{540} \approx 1{,}809259.$$

Un PCS da $\int_{-1}^{1} \cos(x)^2\, dx \approx 1{,}809048$, de modo que nuestra aproximación es muy buena.

Puede argumentar que no es necesario recurrir a las series de Taylor para obtener aproximaciones como la del ejemplo 8.4, ya que hay otros métodos más simples, la regla de Simpson, pongamos por caso. Eso es verdad en general, pero intente aproximar mediante la regla de Simpson la integral del siguiente ejemplo.

### Ejemplo 8.5 Aproximación de una integral por series de Taylor

Usar un polinomio de Taylor de grado $n = 5$ para aproximar $\int_{-1}^{1} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$.

**Solución** No conocemos una primitiva de $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$. Además, el integrando es discontinuo en $x = 0$. Sin embargo, no es necesario tratarla como una integral impropia, porque $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$. (Esto significa que el integrando tiene una discontinuidad evitable en $x = 0$). Los primeros términos de la serie de Taylor para $f(x) = \operatorname{sen} x$ dan el polinomio aproximante de Taylor

$$\operatorname{sen} x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!},$$

o bien

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} \approx 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!}.$$

Por ser un polinomio, es fácil de integrar. Así, obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx &\approx \int_{-1}^{1} \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}\right) dx \\
&= \left(x - \frac{x^3}{18} + \frac{x^5}{600}\right)\Bigg|_{x=-1}^{x=1} \\
&= \left(1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{600}\right) - \left(-1 + \frac{1}{18} - \frac{1}{600}\right) \\
&= \frac{1.703}{900} \approx 1{,}8922.
\end{aligned}$$

Nuestro PCS da $\int_{-1}^{1} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx \approx 1{,}89216$, de modo que la aproximación es muy buena. Por otra parte, si aplica la regla de Simpson o la de los trapecios verá que no funcionan, ya que intentarán evaluar $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ en $x = 0$. (La mayoría de las calculadoras gráficas y algunos PCS tampoco consiguen dar respuesta a causa de la división entre cero en $x = 0$).

Hemos aprendido a calcular los desarrollos de Taylor de muchas funciones, pero muchas otras funciones **se definen** mediante una serie de potencias. Eso incluye a la clase de las **funciones especiales**, importantísima en Física e Ingeniería. Estas funciones no se pueden expresar en términos de funciones elementales (algebraicas, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas) y sólo se conocen a través de su definición como series de potencias. Una familia importante de funciones especiales la constituyen las funciones de Bessel, utilizadas en el estudio del movimiento de fluidos, propagación de ondas y otras

áreas de las Matemáticas aplicadas. La **función de Bessel de orden** $p$ se define por la serie de potencias

$$J_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+p}}{2^{2k+p} k!(k+p)!}, \tag{8.1}$$

para enteros $p \geq 0$. Tal vez le parezca extraño definir una función a partir de una serie de potencias, pero es práctica habitual. En particular, en el proceso de resolución de ecuaciones diferenciales se llega con frecuencia como solución a una serie de potencias. Por lo general, esas soluciones en forma de serie no son funciones elementales. Específicamente, las funciones de Bessel aparecen al resolver la ecuación diferencial $x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$. En los próximos ejemplos estudiamos algunas propiedades interesantes de las funciones de Bessel.

### Ejemplo 8.6 Radio de convergencia de una función de Bessel

Hallar el radio de convergencia de la serie que define la función $J_0(x)$ de Bessel.

**Solución** Por la ecuación (8.1), con $p = 0$, se tiene $J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^2 (k!)^2}$. Aplicando el criterio del cociente de

$$\lim_{k \to \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \to \infty} \left| \frac{x^{2k+2}}{2^{2k+2}[(k+1)!]^2} \frac{2^{2k}(k!)^2}{x^{2k}} \right| = \lim_{k \to \infty} \left| \frac{x^2}{4(k+1)^2} \right| = 0 < 1,$$

para todo $x$, se sigue que la serie converge absolutamente para todo $x$, luego el radio de convergencia es $\infty$.

El próximo ejemplo revela una interesante relación entre los ceros de dos funciones de Bessel.

### Ejemplo 8.7 Los ceros de las funciones de Bessel

Verificar gráficamente que en el intervalo $[0, 10]$ los ceros de $J_0(x)$ y $J_1(x)$ alternan.

**Solución** Salvo que disponga de un PCS que lleve incorporadas las funciones de Bessel, le será necesario representar las gráficas de las sumas parciales de las series que las definen:

$$J_0(x) \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2} \quad \text{y} \quad J_1(x) \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2^{2k+1} k!(k+1)!}.$$

Antes debe saber cómo de grande tomar $n$ para obtener una gráfica razonable. Para todo $x > 0$ las dos series en cuestión son alternadas, de modo que el error cometido al aproximar por una suma parcial está acotado por el primer término desechado:

$$\left| J_0(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2} \right| \leq \frac{x^{2n+2}}{2^{2n+2}[(n+1)!]^2}$$

$$\left| J_1(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2^{2k+1} k!(k+1)!} \right| \leq \frac{x^{2n+3}}{2^{2n+3}(n+1)!(n+2)!},$$

con error máximo, en ambos casos, en $x = 10$. Nótese que para $n = 12$ es

$$\left| J_0(x) - \sum_{k=0}^{12} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2} \right| \leq \frac{x^{2(12)+2}}{2^{2(12)+2}[(12+1)!]^2} \leq \frac{10^{26}}{2^{26}(13!)^2} < 0{,}04$$

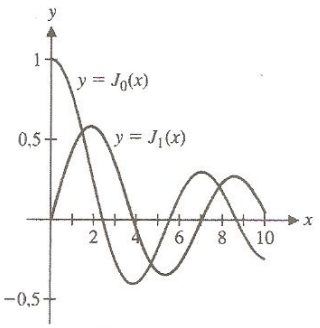



**Figura 8.43**
$y = J_0(x)$ e $y = J_1(x)$.

y

$$\left| J_1(x) - \sum_{k=0}^{12} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2^{2k+1} k!(k+1)!} \right| \le \frac{x^{2(12)+3}}{2^{2(12)+3}(12+1)!(12+2)!} \le \frac{10^{27}}{2^{27}(13!)(14!)} < 0{,}04.$$

Por tanto, una suma parcial con $n = 12$ dará una aproximación que diferirá del valor exacto en menos de 0,04, para todo $x$ en [0, 10]. Es una buena precisión para nuestro propósito actual. La figura 8.43 muestra las gráficas de las sumas parciales con $n = 12$ para $J_0(x)$ y $J_1(x)$.

En la figura se ve que, en efecto, los ceros de $J_0(x)$ y $J_1(x)$ en el intervalo especificado alternan.

---

Puede demostrarse que esa propiedad de alternancia es válida en cualquier intervalo y para todo par de funciones de Bessel de órdenes consecutivos. Es decir, entre dos ceros consecutivos de $J_p(x)$ hay un cero de $J_{p+1}(x)$ y entre cada dos ceros consecutivos de $J_{p+1}(x)$ hay un cero de $J_p(x)$. En los ejercicios exploramos más esta cuestión.

---

# EJERCICIOS 8.8

1. En el ejemplo 8.2 hemos demostrado que para aproximar sen(1,234567) es mejor tomar como centro del desarrollo $x = \frac{\pi}{2}$ que $x = 0$. Explicar por qué un desarrollo centrado en $x = 1{,}2$ es preferible, pero nada práctico.

2. Supuesto que no tiene que volver a deducir la serie de Maclaurin de cos $x$, comparar la cantidad de trabajo realizado en el ejemplo 8.4 con el necesario para calcular una aproximación con la regla de Simpson con $n = 16$.

3. En (8.1) hemos definido las funciones de Bessel como series. Puede parecer un modo retorcido de definir funciones, pero compare la dificultad de hacer lo que sigue con una función de Bessel y con sen $x$: calcular $f(0), f(1{,}2), f(2x), f'(x)$, $\int f(x)\,dx$ y $\int_0^1 f(x)\,dx$.

4. Discutir cómo se puede estimar el error en la aproximación del ejemplo 8.4.

**En los ejercicios 5-10, usar una serie de Taylor apropiada para aproximar el valor especificado con error menor que $10^{-11}$.**

5. sen 1,61
6. sen 6,32
7. cos 0,34
8. cos 3,04
9. $e^{-0,2}$
10. $e^{0,4}$

**En los ejercicios 11-16, usar una serie de Taylor conocida para conjeturar el valor del límite.**

11. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\cos x^2 - 1}{x^4}$
12. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } x^2 - x^2}{x^6}$
13. $\lim_{x \to 1} \dfrac{\ln x - (x-1)}{(x-1)^2}$
14. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\text{tg}^{-1} x - x}{x^3}$
15. $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$
16. $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^{-2x} - 1}{x}$

**En los ejercicios 17-22, usar un polinomio de Taylor conocido con $n$ términos no nulos para estimar el valor de la integral.**

17. $\int_{-1}^{1} \dfrac{\text{sen } x}{x}\,dx,\ n = 3$
18. $\int_{-\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\pi}} \cos x^2\,dx,\ n = 4$
19. $\int_{-1}^{1} e^{-x^2}\,dx,\ n = 5$
20. $\int_0^1 \text{tg}^{-1} x\,dx,\ n = 5$
21. $\int_1^2 \ln x\,dx,\ n = 5$
22. $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,dx,\ n = 4$

23. Hallar el radio de convergencia de $J_1(x)$.

24. Hallar el radio de convergencia de $J_2(x)$.

25. Determinar cuántos términos son necesarios para aproximar $J_2(x)$ con error menor que 0,04 en el intervalo [0, 10].

26. Probar gráficamente que los ceros de $J_1(x)$ y $J_2(x)$ alternan en el intervalo (0, 10].

27. Según la teoría de la relatividad de Einstein, la masa de un objeto que viaja con velocidad $v$ es $m(v) = m_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, donde $m_0$ es la masa en reposo del objeto y $c$ la velocidad de la luz. Demostrar que $m \approx m_0 + \left(\dfrac{m_0}{2c^2}\right)v^2$. Usando esta aproximación, estimar la velocidad $v$ necesaria para aumentar la masa en un 10 %.

28. Hallar el polinomio de Taylor de grado 4 para $m(v)$ en el ejercicio 27.

29. El peso (fuerza debida a la gravedad) de un objeto de masa $m$ a una altura de $x$ millas sobre la superficie de la Tierra es $\omega(x) = \frac{mgR^2}{(R+x)^2}$, donde $R$ es el radio de la Tierra y $g$ la aceleración de la gravedad. Probar que $\omega(x) \approx mg(1 - 2x/R)$. Estimar a qué altura $x$ el peso se reduce en un 10 %.

30. Hallar el polinomio de Taylor de grado 2 para $\omega(x)$ en el ejercicio 29. Usarlo para estimar la altura $x$ necesaria para reducir el peso en un 10 %.

31. Según las respuestas a los ejercicios 29 y 30, ¿el peso es significativamente distinto en la superficie terrestre y a una altura de 7.500 pies (una montaña, digamos)?

32. El radio de la Tierra es unas 300 millas mayor en el ecuador que en los polos. ¿Qué tiene más efecto sobre el peso, la longitud o la latitud?

**En los ejercicios 33-36, usar el desarrollo en serie de Maclaurin** $x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^{15} - \cdots$.

33. La componente tangencial de la velocidad del transbordador espacial en su regreso a la atmósfera es aproximadamente $v(t) = v_c \tanh\left(\frac{g}{v_c}t + \tanh^{-1}\frac{v_0}{v_c}\right)$, donde $v_0$ denota la velocidad en $t = 0$ y $v_c$ la velocidad terminal (véase Long y Weiss, *The American Mathematical Monthly*, febrero 1999). Si $\tanh^{-1}\frac{v_0}{v_c} = \frac{1}{2}$, probar que $v(t) \approx gt + \frac{1}{2}v_c$. La estimación de $v(t)$ ¿es demasiado alta o demasiado baja?

34. Probar que en el ejercicio 33 $v(t) \to v_c$ cuando $t \to \infty$. Usando la aproximación del ejercicio 33, estimar el tiempo necesario para alcanzar el 90% de la velocidad terminal.

35. La velocidad de caída de un paracaidista de masa $m$ en caída libre es
$$v(t) = \sqrt{40mg}\tanh\left(\sqrt{\frac{g}{40m}}t\right).$$
Probar que $v(t) \approx gt - \frac{g^2}{120m}t^3$.

36. La velocidad de una onda de longitud $L$ en agua de profundidad $h$ satisface la ecuación $v^2 = \frac{gL}{2\pi}\tanh\frac{2\pi h}{L}$. Probar que $v \approx \sqrt{gh}$.

37. La potencia de un telescopio de reflexión es proporcional al área $S$ de su superficie parabólica, siendo $S = \frac{8\pi}{3}c^2\left[\left(\frac{d^2}{16c^2}+1\right)^{3/2} - 1\right]$. Aquí $d$ es el diámetro del reflector parabólico, de profundidad $k$, con $c = \frac{d^2}{4k}$. Desarrollar el término $\left(\frac{d^2}{16c^2}+1\right)^{3/2}$ y probar que si $\frac{d^2}{16c^2}$ es pequeño, entonces $S \approx \frac{\pi d^2}{4}$.

## 8.9 SERIES DE FOURIER

En las últimas secciones hemos aprendido a representar funciones mediante series de potencias (series de Taylor), un avance extraordinario porque permite usar sumas parciales (polinomios de Taylor) para calcular valores aproximados de la función en puntos $x$ próximos al centro $c$ del desarrollo. Por primera vez disponemos de un método capaz de evaluar funciones trascendentes, como $e^x$, ln $x$ y sen $x$, que no se pueden calcular de otra manera. Pero, aun siendo ésa una buena razón para estudiar desarrollos en serie de funciones, no es la única.

Muchos fenómenos del mundo natural son de carácter periódico: la luz, el sonido, las ondas de radio y los rayos X, por mencionar sólo unos pocos. Para esta clase de fenómenos, las series de Taylor presentan algunas limitaciones evidentes. Mire cualquiera de las gráficas de polinomios de Taylor de una función periódica y verá que, al alejarnos del punto $c$ donde está centrado el desarrollo, la diferencia entre el polinomio y la función crece. Ese comportamiento, ilustrado por la figura 8.44a para $f(x) =$ sen $x$ con centro en $x = \frac{\pi}{2}$, es típico de las series de Taylor.

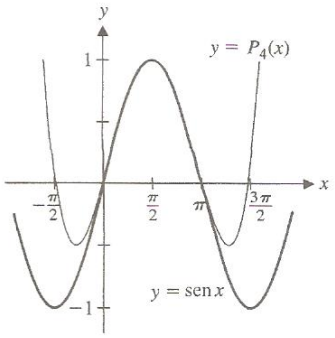



**Figura 8.44a**
$y = \operatorname{sen} x$ e $y = P_4(x)$.

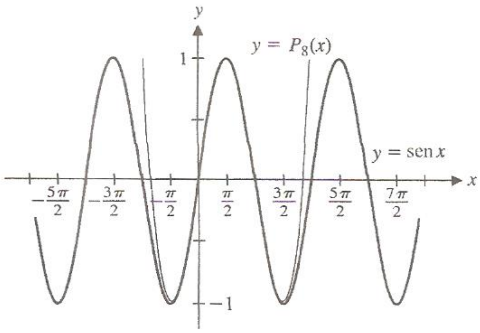



**Figura 8.44b**
$y = \operatorname{sen} x$ e $y = P_8(x)$.

Por eso se dice que los polinomios de Taylor sólo son fiables *localmente* en la vecindad de $c$. En general, por grande que sea $n$, la aproximación sigue siendo válida sólo localmente. En muchas situaciones, en especial en el mundo de las comunicaciones, necesitamos hallar una aproximación de una función que sea válida *globalmente* (es decir, para todo $x$). Considere el polinomio de Taylor de la figura 8.44b y convénzase de que los polinomios de Taylor no cumplirán ese requisito. Para subsanar eso, vamos a construir un nuevo tipo de desarrollo en serie para las funciones periódicas en el que cada término del desarrollo será una función periódica a su vez.

Recordemos que si $f$ es **periódica**, con **período** $T > 0$, $f(x + T) = f(x)$ para todo $x$ en el dominio de $f$. ¿Se le ocurren funciones así? Seguro que sí, al menos sen $x$ y cos $x$, ambas con período $2\pi$. Junto con ellas, $\operatorname{sen}(2x)$, $\cos(2x)$, $\operatorname{sen}(3x)$, $\cos(3x)$..., son todas periódicas con período $2\pi$. De hecho, las funciones (no constantes) periódicas más simples son

$$\operatorname{sen}(kx) \text{ y } \cos(kx), \quad \text{para } k = 1, 2, 3, \cdots.$$

Vamos a verificar que son periódicas con período $2\pi$. Para cualquier entero $k$, sea $f(x) = \operatorname{sen}(kx)$. Se tiene

$$f(x + 2\pi) = \operatorname{sen}[k(x + 2\pi)] = \operatorname{sen}(kx + 2k\pi) = \operatorname{sen}(kx) = f(x).$$

Análogamente, se demuestra que $\cos(kx)$ tiene período $2\pi$.

Así, pues, si queremos expresar una función periódica en serie, las funciones periódicas más simples que se pueden usar son ésas. Por tanto, consideraremos series de la forma

**Series de Fourier**

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx)],$$

que se llaman **series de Fourier**. Si la serie converge, convergerá a una función periódica de período $2\pi$, ya que cada término de esa serie tiene período $2\pi$. Los coeficientes de la serie, $a_0, a_1, a_2, \cdots$ y $b_1, b_2, \cdots$ se llaman **coeficientes de Fourier.** Se habrá percatado de la extraña manera en que hemos escrito el primer término de la serie $\left(\frac{a_0}{2}\right)$. Lo hemos escrito así con el fin de simplificar las fórmulas posteriores para el cálculo de esos coeficientes.

Hay varias cuestiones importantes que debemos plantearnos.

- ¿Qué funciones se pueden desarrollar como series de Fourier?
- ¿Cómo se calculan los coeficientes.
- ¿Convergen las series de Fourier? Y si convergen, ¿a qué función?

**Notas históricas**

**Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830).** Matemático francés, descubridor de las series que llevan su nombre, estuvo fuertemente involucrado en la política de su país como miembro del Comité de la Revolución, asesor científico de Napoleón e impulsor de infraestructuras educativas en Egipto. Entre otros cargos, fue secretario del Instituto de El Cairo y prefecto de Grenoble. Fourier introdujo sus series trigonométricas como método esencial para desarrollar su originalísima y revolucionaria teoría del calor.

Comenzamos la investigación del mismo modo que con las series de potencias. Supongamos que una serie de Fourier dada converge en el intervalo $[-\pi, \pi]$. En tal caso, representa una función $f$ en ese intervalo,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx)], \tag{9.1}$$

donde $f$ ha de ser periódica fuera de $[-\pi, \pi]$. Aunque algunos detalles de la demostración caen fuera del alcance de este libro, queremos mostrar cómo se calculan los coeficientes de Fourier. Si integramos los dos lados de (9.1) con respecto a $x$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$, obtenemos

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx)]\,dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\,dx + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\,dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(kx)\,dx \right], \end{aligned} \tag{9.2}$$

*supuesto* que sea lícito intercambiar el orden de integración y el de suma. En general, el orden de integración **no** se puede cambiar (es este matiz el que escapa al nivel de este curso), pero sí es lícito para muchas series de Fourier. Observemos que para todo $k = 1, 2, 3, \cdots$, se tiene

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\,dx = \frac{1}{k} \operatorname{sen}(kx)\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{k} [\operatorname{sen}(k\pi) - \operatorname{sen}(-k\pi)] = 0$$

y

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(kx)\,dx = -\frac{1}{k} \cos(kx)\Big|_{-\pi}^{\pi} = -\frac{1}{k} [\cos(k\pi) - \cos(-k\pi)] = 0.$$

Esto reduce la ecuación (9.2) a

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\,dx = a_0\pi,$$

de donde

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \tag{9.3}$$

Si multiplicamos (9.1) por $\cos(n\pi)$ (donde $n$ es un entero, $n \geq 1$) y después integramos respecto de $x$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$, obtenemos

$$\begin{aligned}&\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\,dx \\ &\quad = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos(nx)\,dx \\ &\qquad + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) \cos(nx) + b_k \operatorname{sen}(kx) \cos(nx)]\,dx \\ &\quad = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\,dx \\ &\qquad + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(nx)\,dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(kx) \cos(nx)\,dx \right], \end{aligned} \tag{9.4}$$

donde hemos supuesto, otra vez, que el cambio del orden de integración y de suma están permitidos. Ahora recordemos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\, dx = 0, \text{ para } n = 1, 2, \cdots.$$

Es un sencillo ejercicio verificar que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(kx) \cos(nx)\, dx = 0, \text{ para } n = 1, 2, \cdots \text{ y } k = 1, 2, \cdots$$

y que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(nx)\, dx = \begin{cases} 0, & \text{si } n \neq k \\ \pi, & \text{si } n = k \end{cases}.$$

Eso quiere decir que todos los términos de la serie en la ecuación (9.4), excepto uno (el que corresponde a $k = n$), son cero, de modo que (9.4) se reduce a

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx = a_n \pi.$$

Por tanto (tras sustituir $n = k$),

**Coeficientes de Fourier**

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx)\, dx, \text{ para } k = 1, 2, 3, \cdots. \tag{9.5}$$

Análogamente, multiplicando (9.1) por $\operatorname{sen}(nx)$ e integrando entre $-\pi$ y $\pi$, se obtiene

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(kx)\, dx, \text{ para } k = 1, 2, 3, \cdots. \tag{9.6}$$

Las ecuaciones (9.3), (9.5) y (9.6) se conocen como **fórmulas de Euler-Fourier**. Nótese que (9.3) es la misma que (9.5) con $k = 0$. (Por esta razón escribimos el primer término de la serie como $\frac{a_0}{2}$ en vez de $a_0$).

Resumamos lo hecho hasta ahora. Hemos observado que si una serie de Fourier es convergente en un intervalo, converge a una función $f$ tal que los coeficientes de Fourier satisfacen las fórmulas de Euler-Fourier (9.3), (9.5) y (9.6).

Igual que ocurría con las series de potencias, dada cualquier función integrable $f$, podemos calcular los coeficientes en (9.3), (9.5) y (9.6) y escribir una serie de Fourier. Pero ¿convergerá esa serie? Y si converge, ¿a qué función converge? Responderemos estas cuestiones muy pronto. De momento, intentemos calcular los términos de una serie de Fourier y veamos qué se observa.

### Ejemplo 9.1 Cálculo de un desarrollo en serie de Fourier

Hallar la serie de Fourier correspondiente a la función **onda cuadrada**

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -\pi < x \leq 0 \\ 1, & \text{si } 0 < x \leq \pi \end{cases},$$

donde $f$ se supone periódica fuera del intervalo $[-\pi, \pi]$ (figura 8.45).

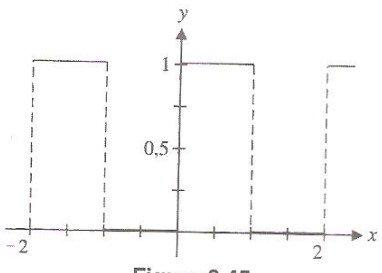



**Figura 8.45**
Función onda cuadrada.

**Solución** Aunque $a_0$ satisface la misma fórmula que $a_k$, para $k \geq 1$, siempre debemos calcular $a_0$ por separado. La ecuación (9.3) da

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 0\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1\,dx = 0 + \frac{\pi}{\pi} = 1.$$

De (9.5) se tiene, para $k \geq 1$,

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} (0)\cos(kx)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} (1)\cos(kx)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi k}\operatorname{sen}(kx)\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi k}[\operatorname{sen}(k\pi) - \operatorname{sen}(0)] = 0.$$

Y de (9.6) se sigue que

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} (0)\operatorname{sen}(kx)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} (1)\operatorname{sen}(kx)\,dx$$

$$= -\frac{1}{\pi k}\cos(kx)\Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{\pi k}[\cos(k\pi) - \cos(0)] = -\frac{1}{\pi k}[(-1)^k - 1]$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{si } k \text{ es par} \\ \dfrac{2}{\pi k}, & \text{si } k \text{ es impar} \end{cases}$$

Podemos escribir los coeficientes con índices pares e impares por separado como $b_{2k} = 0$, para $k = 1, 2, \cdots$ y $b_{2k-1} = \dfrac{2}{(2k-1)\pi}$, para $k = 1, 2, \cdots$. Así, la serie de Fourier queda

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k\cos(kx) + b_k\operatorname{sen}(kx)] = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k\operatorname{sen}(kx) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_{2k-1}\operatorname{sen}(2k-1)\,x$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{(2k-1)\pi}\operatorname{sen}[(2k-1)\,x]$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\operatorname{sen} x + \frac{2}{3\pi}\operatorname{sen}(3x) + \frac{2}{5\pi}\operatorname{sen}(5x) + \cdots$$

Ninguno de nuestros criterios de convergencia resulta apropiado para analizar las series de Fourier. Puesto que no podemos estudiar la convergencia mediante un criterio, consideramos las gráficas de sus sumas parciales, definidas por

$$F_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\frac{2}{(2k-1)\pi}\operatorname{sen}[(2k-1)\,x].$$

Las figuras 8.46a-d muestran varias de esas sumas parciales.

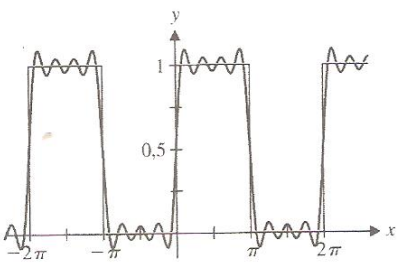



**Figura 8.46a**

$y = F_4(x)$ e $y = f(x)$.

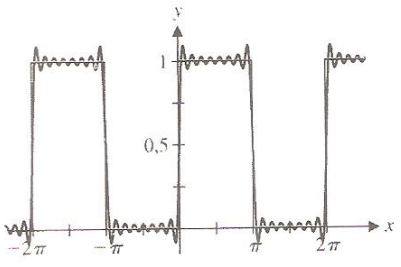



**Figura 8.46b**

$y = F_8(x)$ e $y = f(x)$.

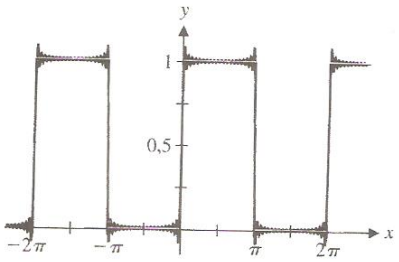



**Figura 8.46c**

$y = F_{20}(x)$ e $y = f(x)$.

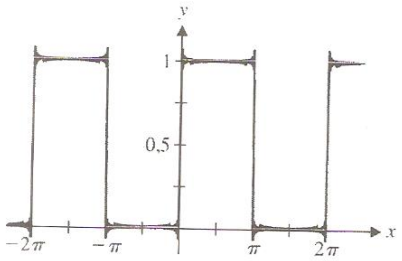



**Figura 8.46d**

$y = F_{50}(x)$ e $y = f(x)$.

Al crecer $n$, la gráfica de $F_n(x)$ parece aproximarse a la función onda cuadrada $f(x)$ de la figura 8.45. A la vista de eso, cabe conjeturar que la serie de Fourier converge a la función $f(x)$. Sin embargo, eso no es del todo cierto. Veremos que la serie converge a $f(x)$ en todos los puntos, *excepto* en los puntos de discontinuidad.

A continuación construimos la serie de Fourier para otra forma de onda común.

**Ejemplo 9.2** **Un desarrollo en serie de Fourier de una onda triangular**

Hallar el desarrollo en serie de Fourier de $f(x) = |x|$, para $-\pi \le x \le \pi$, donde $f$ se supone periódica, con período $2\pi$, fuera del intervalo $[-\pi, \pi]$.

**Solución** En este caso, $f$ es la función en forma de **onda triangular** (figura 8.47). Por las fórmulas de Euler-Fourier,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -x\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\,dx$$

$$= -\frac{1}{\pi}\,\frac{x^2}{2}\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\,\frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{\pi} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

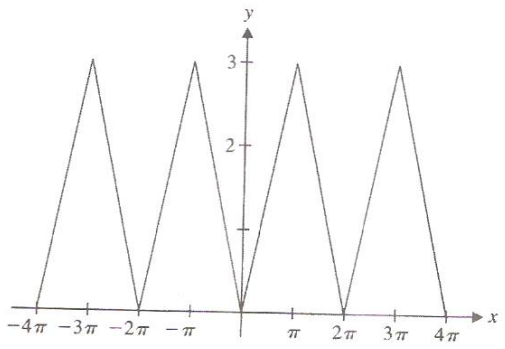



**Figura 8.47**

Onda triangular.

Análogamente, para cada $k \ge 1$, es

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\cos(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} (-x)\cos(kx)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos(kx)\,dx.$$

Ambas integrales requieren la misma integración por partes. Hacemos

$$u = x \qquad dv = \cos(kx)\,dx$$
$$du = dx \qquad v = \frac{1}{k}\operatorname{sen}(kx)$$

y, en consecuencia,

$$a_k = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\cos(kx)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos(kx)\,dx$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left[\frac{x}{k}\operatorname{sen}(kx)\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi k}\int_{-\pi}^{0}\operatorname{sen}(kx)\,dx + \frac{1}{\pi}\left[\frac{x}{k}\operatorname{sen}(kx)\right]_{0}^{\pi} - \frac{1}{\pi k}\int_{\pi}^{0}\operatorname{sen}(kx)\,dx$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left[0 + \frac{\pi}{k}\operatorname{sen}(-\pi k)\right] - \frac{1}{\pi k^2}\cos(kx)\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{k}\operatorname{sen}(\pi k) - 0\right] + \frac{1}{\pi k^2}\cos(kx)\Big|_{0}^{\pi}$$

$$= 0 - \frac{1}{\pi k^2}[\cos 0 - \cos(-k\pi)] + 0 + \frac{1}{\pi k^2}[\cos(k\pi) - \cos 0]$$

Usar $\operatorname{sen}\pi k = 0$ y $\operatorname{sen}(-\pi k) = 0$.

$$= \frac{2}{\pi k^2}[\cos(k\pi) - 1] = \begin{cases} 0, & \text{si } k \text{ es par} \\ \dfrac{-4}{\pi k^2}, & \text{si } k \text{ es impar} \end{cases}$$

Usar $\cos(k\pi) = 1$, cuando $k$ es par, y $\cos(k\pi) = -1$, cuando $k$ es impar

Escribiendo por separado los coeficientes de índices pares e impares, se tiene $a_{2k} = 0$, para $k = 1, 2, \cdots$ y $a_{2k-1} = \dfrac{-4}{\pi(2k-1)^2}$, para $k = 1, 2, \cdots$ Dejamos como ejercicio probar que $b_k = 0$, para todo $k$.

Eso produce la serie de Fourier

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k\cos(kx) + b_k\operatorname{sen}(kx)] = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(kx) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1}\cos(2k-1)\,x$$

$$= \frac{\pi}{2} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(2k-1)^2}\cos(2k-1)x$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\cos x - \frac{4}{9\pi}\cos(3x) - \frac{4}{25\pi}\cos(5x) - \cdots.$$

Por el criterio de comparación, esa serie converge absolutamente para todo $x$, ya que

$$|a_k| = \left|\frac{4}{\pi(2k-1)^2}\cos(2k-1)\,x\right| \le \frac{4}{\pi(2k-1)^2}$$

y la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(2k-1)^2}$ es convergente. (Ayuda: Comparar esta última serie con la $p$-serie convergente $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ usando el criterio de comparación asintótica). Para hacernos una idea de a qué función converge la serie, representamos varias sumas parciales

$$F_n(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n}\frac{4}{\pi(2k-1)^2}\cos(2k-1)\,x.$$

¿Se atreve a conjeturar la suma de la serie a la vista de las figuras 8.48a-d? Advierta que las sumas parciales parecen converger rápidamente a la onda triangular $f$. El aspecto de la gráfi-

ca de las sumas parciales cambia muy poco si se representan $F_n(x)$ con $n$ muy grande. (¡Inténtelo!). Más adelante veremos cómo estar seguros de que la serie de Fourier converge a $f(x)$ para todo $x$. Hay algo que añadir aquí todavía: la precisión de la aproximación es muy uniforme. Es decir, la diferencia entre una suma parcial y $f$ viene a ser la misma en todos los puntos.

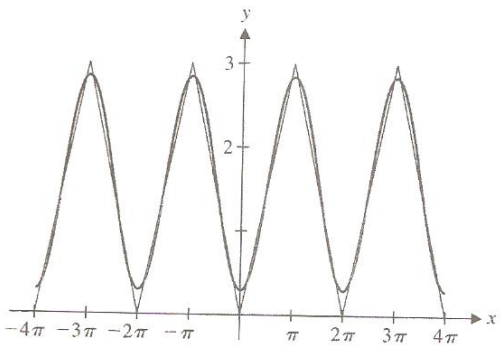



**Figura 8.48a**

$y = F_1(x)$ e $y = f(x)$.

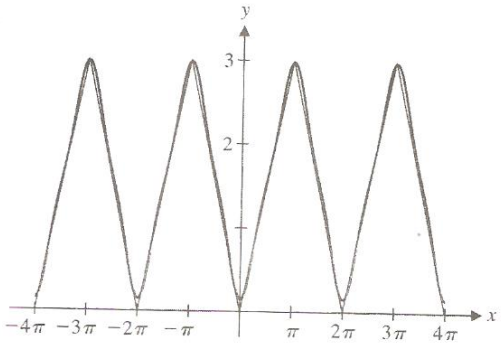



**Figura 8.48b**

$y = F_2(x)$ e $y = f(x)$.

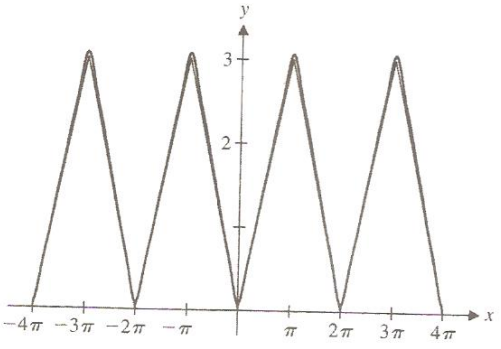



**Figura 8.48c**

$y = F_4(x)$ e $y = f(x)$.

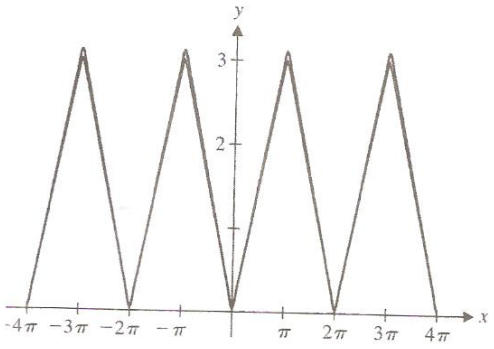



**Figura 8.48d**

$y = F_8(x)$ e $y = f(x)$.

Es importante distinguir este comportamiento uniforme con el de las aproximaciones por polinomios de Taylor. En éstos, al alejarnos del punto en el que estaba centrado el desarrollo, la aproximación iba empeorando progresivamente.

## Funciones con período distinto de $2\pi$

Dada una función periódica $f$, con período $T \neq 2\pi$, vamos a desarrollar $f$ en una serie de funciones simples de período $T$. En primer lugar, denotamos $l = \frac{T}{2}$ y observamos que las funciones

$$\cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{l}\right)$$

son todas periódicas con período $T = 2l$, para todo $k = 1, 2, \ldots$ [Ayuda: Para probarlo, tome $f(x) = \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right)$ y demuestre que $f(x + 2l) = f(x)$, para todo $x$ y todo $k = 1, 2, \cdots$. Análoga-

mente, con $g(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{l}\right)$ y demuestre que $g(x + 2l) = g(x)$, para todo $x$ y todo $k = 1, 2, \cdots$].

El desarrollo en serie de Fourier de $f$, periódica con período $2l$, es, pues,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) + b_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \right].$$

Dejamos como ejercicio probar que los coeficientes de Fourier vienen dados, en este caso, por las fórmulas de Euler-Fourier

$$a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) dx, \text{ para } k = 0, 1, 2, \cdots \tag{9.7}$$

y

$$b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{l}\right) dx, \text{ para } k = 1, 2, 3, \cdots \tag{9.8}$$

Nótese que (9.3), (9.5) y (9.6) son equivalentes a (9.7) y (9.8) cuando $l = \pi$.

### Ejemplo 9.3 Un desarrollo en serie de Fourier de una onda cuadrada

Hallar un desarrollo en serie de Fourier para la función

$$f(x) = \begin{cases} -2, & \text{si } -1 < x \leq 0 \\ 2, & \text{si } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

y con $f$ periódica, de período 2, fuera del intervalo $[-1, 1]$.

**Solución** La gráfica de $f$ es la onda cuadrada de la figura 8.49. Las fórmulas de Euler-Fourier (9.7) y (9.8), con $l = 1$, dan

$$a_0 = \frac{1}{1} \int_{-1}^{1} f(x)\, dx = \int_{-1}^{0} (-2)\, dx + \int_{0}^{1} 2\, dx = 0.$$

Análogamente,

$$a_k = \frac{1}{1} \int_{-1}^{1} f(x) \cos\left(\frac{k\pi x}{1}\right) dx = 0, \text{ para } k = 1, 2, 3, \cdots$$

(Esto lo dejamos como ejercicio.)

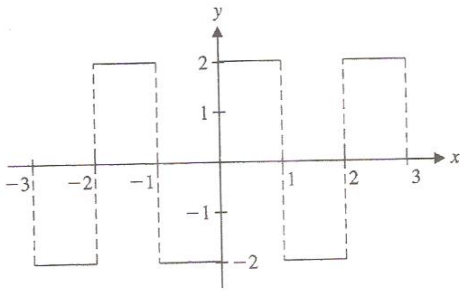



**Figura 8.49**
Onda cuadrada.

Finalmente,

$$b_k = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} f(x)\,\text{sen}\left(\frac{k\pi x}{1}\right)dx = \int_{-1}^{0}(-2)\,\text{sen}(k\pi x)\,dx + \int_{0}^{1} 2\,\text{sen}(k\pi x)\,dx$$

$$= \frac{2}{k\pi}\cos(k\pi x)\Big|_{-1}^{0} - \frac{2}{k\pi}\cos(k\pi x)\Big|_{0}^{1} = \frac{4}{k\pi}\,[\cos 0 - \cos(k\pi)]$$

$$= \frac{4}{k\pi}\,[1-\cos(k\pi)] = \begin{cases} 0, & \text{si } k \text{ es par} \\ \dfrac{8}{k\pi}, & \text{si } k \text{ es impar} \end{cases} \qquad \begin{array}{l}\cos(k\pi) = 1, \text{ si } k \text{ es par,} \\ \text{y } \cos(k\pi) = -1, \text{ si } k \text{ es impar.}\end{array}$$

Con todo ello, se obtiene la serie de Fourier

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k\cos(k\pi x) + b_k\,\text{sen}(k\pi x)] = \sum_{k=1}^{\infty} b_k\,\text{sen}(k\pi x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{2k-1}\,\text{sen}(2k-1)\,\pi x]$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{8}{(2k-1)\pi}\,\text{sen}[(2k-1)\,\pi x].$$

Porque $b_{2k} = 0$ y $b_{2k-1} = \dfrac{8}{(2k-1)\pi}$.

Aunque todavía no disponemos de instrumentos para decidir la convergencia o divergencia de esta serie, representamos algunas de sus sumas parciales

$$F_n(x) = \sum_{k=1}^{n}\frac{8}{(2k-1)\pi}\,\text{sen}[(2k-1)\,\pi x]$$

en las figuras 8.50a-d. Esas gráficas sugieren que la serie converge a la onda cuadrada $f$, excepto en los puntos de discontinuidad, $x = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \cdots$. En estos puntos, la serie parece converger a 0. Es fácil comprobarlo, porque los términos de la serie son

$$\frac{8}{(2k-1)\pi}\,\text{sen}[(2k-1)\,\pi x] = 0, \text{ para todo } x \text{ entero.}$$

Como todos sus términos son cero, la serie converge a 0 para todo valor entero de $x$. Este hecho admite la siguiente interpretación: en los puntos de discontinuidad, la serie converge

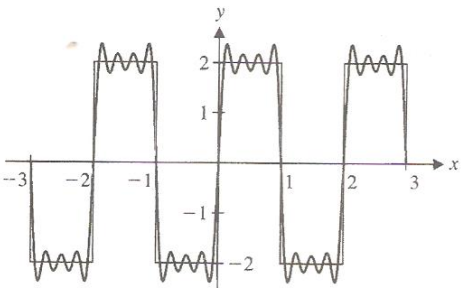



**Figura 8.50a**

$y = F_4(x)$ e $y = f(x)$.

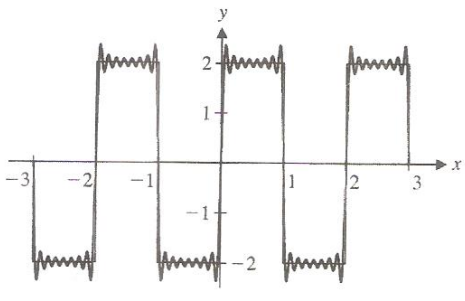



**Figura 8.50b**

$y = F_8(x)$ e $y = f(x)$.

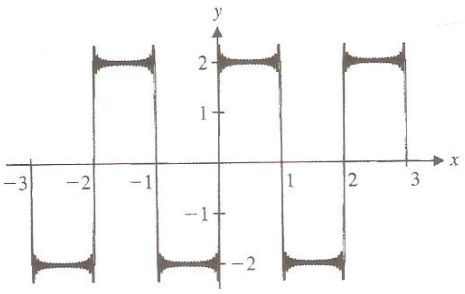



**Figura 8.50c**
$y = F_{20}(x)$ e $y = f(x)$.

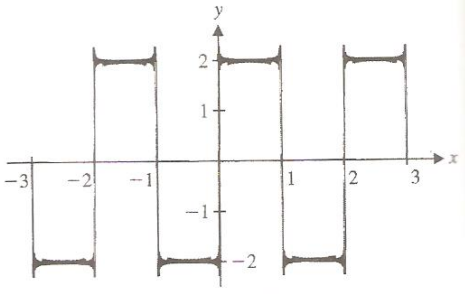



**Figura 8.50d**
$y = F_{50}(x)$ e $y = f(x)$.

al promedio de los valores de la función a ambos lados del salto. Veremos que este comportamiento es típico en la convergencia de las series de Fourier.

Enunciamos a continuación el resultado central sobre convergencia de series de Fourier.

**Teorema 9.1 (Teorema de convergencia de Fourier)**
Sea $f$ periódica, con período $2l$, con $f$ y $f'$ continuas en el intervalo $[-l, l]$, excepto a lo sumo en un número finito de discontinuidades de salto. Entonces $f$ tiene un desarrollo en serie de Fourier convergente. Además, la serie converge a $f(x)$ en todos los puntos $x$ donde $f$ es continua y a

$$\frac{1}{2}\left[\lim_{t \to x^+} f(t) + \lim_{t \to x^-} f(t)\right]$$

en todos los puntos $x$ donde $f$ es discontinua.

**Nota 9.1**

El teorema de convergencia de Fourier afirma que una serie de Fourier puede converger a una función discontinua a pesar de que todos sus términos sean funciones continuas (y derivables) en todo $x$.

**Demostración**
La demostración de este teorema está fuera del alcance de este libro. Podrá consultarse en textos más avanzados o específicos sobre series de Fourier.

**Ejemplo 9.4** **Demostración de la convergencia de una serie de Fourier**

Probar, usando el teorema de convergencia de Fourier, que el desarrollo en serie de Fourier de período $2\pi$,

$$\frac{\pi}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)^2 \pi} \cos(2k-1)\, x,$$

deducido en el ejemplo 9.2 para $f(x) = |x|$, para $-\pi \le x \le \pi$ y periódico fuera de $[-\pi, \pi]$, converge a $f(x)$ en todas partes.

**Solución** En primer lugar, $f$ es continua en todas partes (figura 8.47). Además, como

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & \text{si } -\pi \le x < 0 \\ x, & \text{si } 0 \le x < \pi \end{cases}$$

y es periódica fuera de $[-\pi, \pi]$, se tiene

$$f'(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 < x < \pi \end{cases}.$$

Así, pues, también $f'$ es continua en $[-\pi, \pi]$, salvo discontinuidades de salto en $x = 0$ y en $x = \pm\pi$. El teorema de convergencia de Fourier garantiza que la serie de Fourier converge a $f$ en todas partes. En consecuencia, podemos escribir

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)^2\pi} \cos(2k-1)\, x,$$

para todo $x$.

---

Como queda dicho en el teorema de convergencia de Fourier, la serie de Fourier no siempre converge a la función que se está desarrollando.

**Ejemplo 9.5** **Investigación de la convergencia de una serie de Fourier**

Usar el teorema de convergencia de Fourier para investigar la convergencia de la serie de Fourier

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{(2k-1)\pi} \operatorname{sen}[(2k-1)\pi x],$$

deducida como desarrollo de la función onda cuadrada

$$f(x) = \begin{cases} -2, & \text{si } -1 < x \le 0 \\ 2, & \text{si } 0 < x \le 1 \end{cases},$$

donde $f$ se toma periódica fuera de $[-1, 1]$ (véase ejemplo 9.3).

**Solución** La función $f$ es continua salvo discontinuidades de salto en $x = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$. Además,

$$f'(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -1 < x < 0 \\ 0, & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$$

y es periódica fuera de $[-1, 1]$. Así, pues, también $f'$ es continua, excepto discontinuidades de salto en los valores enteros de $x$. Por el teorema de convergencia de Fourier, la serie de Fourier converge a $f(x)$ en todo $x$ excepto en las discontinuidades, $x = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$, donde converge al promedio de los límites laterales, que es 0. (¿Por qué 0?). Como la serie no converge a $f$ en todas partes, no podemos decir que la función y la serie son *iguales*. En tales circunstancias, se suele escribir

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{(2k-1)\pi} \operatorname{sen}[(2k-1)\pi x]$$

para indicar que la serie *corresponde* a $f$ (pero no es necesariamente igual a $f$). En el caso de series de Fourier, eso significa que la serie converge a $f(x)$ en todo punto donde $f$ sea continua y al promedio de los límites laterales en los puntos de salto. Nótese que éste es el comportamiento que se aprecia en las gráficas de las sumas parciales en las figuras 8.50a-d.

---

## Series de Fourier y sintetizadores de música

Quizá se haya preguntado por qué tanto interés en estudiar las series de Fourier. Hay importantes aplicaciones detrás de ese interés. Mucha gente encuentra sorprendente que con sumas de senos y cosenos se puedan representar segmentos rectos, parábolas u otras formas en un intervalo finito. Por intrigante que resulte eso, no constituye el motivo principal de nuestro interés. Ocurre que las series de Fourier son de uso común en Física, Ingeniería, Química, etc. A título de ejemplo, nos limitaremos a comentar brevemente los sintetizadores de música y a indicar el uso de las series de Fourier en varios ejercicios.

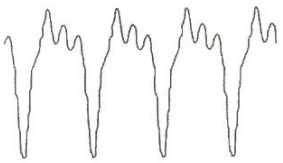


**Figura 8.51**
Ondas de un saxofón.

Suponga que tuviera un aparato musical capaz de emitir sonidos puros de varios tonos y volúmenes. ¿Qué tipos de sonidos podría sintetizar combinando tonos puros? Para responder esa cuestión, la traducimos al lenguaje matemático. Un tono puro admite el modelo $A \operatorname{sen} \omega t$, donde la amplitud $A$ determina el volumen y la frecuencia $\omega$ determina el tono. Por ejemplo, para imitar un saxofón, debe ajustar la forma de onda que emite ese instrumento (figura 8.51). La forma de la onda afecta al **timbre** del tono, una cualidad que la mayoría de los humanos distingue con facilidad (un saxofón *suena* diferente a una trompeta, ¿no?).

Consideremos el siguiente problema relativo a un sintetizador. Dada una forma de onda como la de la figura 8.51, ¿podemos unir varios tonos puros de la forma $A \operatorname{sen} \omega t$ para aproximar su forma de onda? Si los tonos puros son de la forma $b_1 \operatorname{sen} t$, $b_2 \operatorname{sen} 2t$, $b_3 \operatorname{sen} 3t$, ..., eso es esencialmente un problema de series de Fourier. En otras palabras, queremos aproximar una función de ondas $f(t)$ dada mediante una suma de tonos puros, es decir,

$$f(t) \approx b_1 \operatorname{sen} t + b_2 \operatorname{sen} 2t + b_3 \operatorname{sen} 3t + \cdots + b_n \operatorname{sen} nt.$$

Aunque los términos en cosenos están ausentes, esto no es sino la suma parcial de una serie de Fourier. (Tales series se llaman **series de Fourier de senos** y se estudian en los ejercicios). Para los sintetizadores de música, los coeficientes de Fourier son simplemente las amplitudes de los distintos armónicos de la forma de ondas dada. En este contexto, puede interpretar los controles de graves y agudos en un equipo estéreo como formas de manipular las amplitudes de diferentes términos en una serie de Fourier. Subiendo el nivel de bajos se realzan los términos de bajas frecuencias (o sea, se hacen más grandes los coeficientes de los primeros términos de la serie de Fourier), mientras que al subir el nivel de agudos se realzan los términos de frecuencias altas. Un ecualizador (figura 8.52) permite un control más directo de las frecuencias individuales.

**Figura 8.52**
Un ecualizador.

La idea de analizar un fenómeno ondulatorio descomponiendo la onda en componentes de frecuencias puras, conocida como **análisis espectral**, es esencial hoy día en muchas disciplinas científicas y técnicas.

## EJERCICIOS 8.9

1. Explicar por qué la serie de Fourier de $f(x) = 1 + 3\cos x - \operatorname{sen} 2x$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$ es simplemente $1 + 3\cos x - \operatorname{sen} 2x$. (Ayuda: Explicar cuál es el objetivo de un desarrollo en serie de Fourier y hacer ver que en este caso no es necesario trabajo adicional). ¿Cambiaría la situación si el intervalo fuera $[-1, 1]$?

2. Los polinomios se construyen a partir de las operaciones aritméticas básicas. A menudo usamos las series de Taylor para reescribir una función difícil, como $\operatorname{sen} x$, en forma aritmética. Muchos fenómenos naturales son ondulatorios y admiten modelos de senos y cosenos. Discutir en qué medida es cierto que las series de Fourier nos permiten reescribir funciones algebraicas (como $x^2$) en forma natural (como ondas).

3. El teorema 9.1 establece que una serie de Fourier puede converger a una función con discontinuidades de salto. En los ejemplos 9.1 y 9.3, localizar las discontinuidades de salto y los valores a los que la serie de Fourier converge en esos puntos. ¿En qué sentido son dichos valores un compromiso razonable?

4. Examinar con atención las figuras 8.46 y 8.50. ¿En qué $x$ parece converger rápidamente la serie de Fourier? ¿En cuáles lentamente? Nótese que todas las sumas parciales $F_n(x)$ pasan exactamente por el punto límite en las discontinuidades de salto. Describir el comportamiento de las sumas parciales *cerca* de las discontinuidades. Esos picos por exceso o por defecto se conocen como **fenómeno de Gibbs** (véase ejercicio 49).

**En los ejercicios 5-12, hallar la serie de Fourier de la función en el intervalo $[-\pi, \pi]$. Representar las gráficas de $f$ y de las sumas parciales $F_4(x)$ y $F_8(x)$ en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$.**

5. $f(x) = x$

6. $f(x) = x^2$

7. $f(x) = 2|x|$

8. $f(x) = 3x$

9. $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } -\pi < x < 0 \\ -1, & \text{si } 0 < x < \pi \end{cases}$

10. $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } -\pi < x < 0 \\ 0, & \text{si } 0 < x < \pi \end{cases}$

11. $f(x) = 3 \operatorname{sen} 2x$

12. $f(x) = 2 \operatorname{sen} 3x$

**En los ejercicios 13-18, hallar la serie de Fourier de la función en el intervalo que se especifica.**

13. $f(x) = -x, [-1, 1]$

14. $f(x) = |x|, [-1, 1]$

15. $f(x) = x^2, [-1, 1]$

16. $f(x) = 3x, [-2, 2]$

17. $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -1 < x < 0 \\ x, & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$

18. $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -1 < x < 0 \\ 1 - x, & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$

**En los ejercicios 19-24 no se pide calcular la serie de Fourier, sino representar la gráfica de la función a la que la serie converge, mostrando al menos tres períodos completos de esa función límite.**

19. $f(x) = x, [-2, 2]$

20. $f(x) = x^2, [-3, 3]$

21. $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{si } -1 < x < 0 \\ 0, & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$

22. $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } -2 < x < 0 \\ 3, & \text{si } 0 < x < 2 \end{cases}$

23. $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } -2 < x < -1 \\ 0, & \text{si } -1 < x < 1 \\ 1, & \text{si } 1 < x < 2 \end{cases}$

24. $f(x) = \begin{cases} 2, & \text{si } -2 < x < -1 \\ -2, & \text{si } -1 < x < 1 \\ 0, & \text{si } 1 < x < 2 \end{cases}$

25. Sustituir $x = 1$ en la fórmula de la serie de Fourier del ejercicio 15 para demostrar que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

26. Usar la serie de Fourier del ejemplo 9.1 para probar que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2k-1)}{(2k-1)} = \frac{\pi}{4}$.

27. Usar la serie de Fourier del ejemplo 9.2 para probar que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

28. Combinar los resultados de los ejercicios 25 y 27 para hallar $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2}$.

29. Se habrá dado cuenta de que muchas series de Fourier constan sólo de senos o sólo de cosenos. Es fácil de entender si pensamos en funciones pares e impares. Una función $f(x)$ es **par** si $f(-x) = f(x)$ para todo $x$. Una función es **impar** si $f(-x) = -f(x)$ para todo $x$. Probar que cos $x$ es par y sen $x$ impar.

30. Si $f(x)$ es par, probar que $g(x) = f(x) \cos x$ es par y que $h(x) = f(x) \operatorname{sen} x$ es impar.

31. Si $f(x)$ es impar, probar que $g(x) = f(x) \cos x$ es impar y que $h(x) = f(x) \operatorname{sen} x$ es par.

32. Si $f$ y $g$ son pares, ¿qué se puede decir de $fg$?

33. Si $f$ es par y $g$ impar, ¿qué se puede decir de $fg$?

34. Si $f$ y $g$ son impares, ¿qué se puede decir de $fg$?

35. Demostrar las fórmulas de Euler-Fourier generales (9.7) y (9.8).

36. Si $g(x)$ es una función impar (véase ejercicio 29), probar que $\int_{-l}^{l} g(x)\,dx = 0$ para todo $l > 0$. (Ayuda: Comparar $\int_{-l}^{0} g(x)\,dx$ y $\int_{0}^{l} g(x)\,dx$. Tendrá que hacer el cambio de variable $t = -x$ en una de las integrales). Usando los resultados del ejercicio 30, probar que si $f(x)$ es par, $b_k = 0$ para todo $k$ y la serie de Fourier de $f(x)$ contiene sólo términos en cosenos. Si $f(x)$ es impar, demostrar que $a_k = 0$ para todo $k$ y la serie de Fourier de $f(x)$ contiene sólo términos en senos.

**En los ejercicios 37-42, usar el carácter par o impar de $f(x)$ para predecir (sin calcularla) si la serie de Fourier contiene sólo términos seno, términos coseno o ambos tipos.**

37. $f(x) = x^3$

38. $f(x) = x^4$

39. $f(x) = e^x$

40. $f(x) = |x|$

41. $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -1 < x < 0 \\ x, & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$

42. $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } -2 < x < 0 \\ 3, & \text{si } 0 < x < 2 \end{cases}$

43. La función $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } -2 < x < 0 \\ 3, & \text{si } 0 < x < 2 \end{cases}$ no es par ni impar, pero se puede escribir como $f(x) = g(x) + 1$ con $g(x) = \begin{cases} -2, & \text{si } -2 < x < 0 \\ 2, & \text{si } 0 < x < 2 \end{cases}$. Explicar por qué la serie de Fourier de $f(x)$ no contendrá términos coseno.

44. Supongamos que desea encontrar la serie de Fourier de $f(x) = x + x^2$. Argumentar por qué para hallar $b_k$ basta integrar $x \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{l}\right)$ y para hallar $a_k$ basta integrar $x^2 \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right)$.

**Los ejercicios 45-48 están adaptados del manual de usuario de un sintetizador musical.**

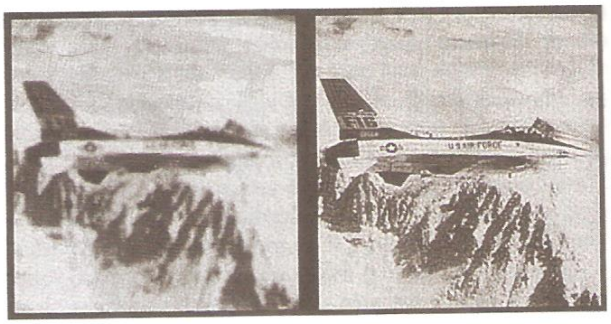
45. Al generar un nuevo tono en un sintetizador, la elección de la forma de onda es esencial. Las opciones son dentada, cuadrada y pulsante. En el ejercicio 13 hemos trabajado con la onda dentada. Dibuje la gráfica de la función límite en el ejercicio 13 sobre el intervalo [–4, 4]. Justifique el nombre de «dentada». La figura 8.49 muestra una onda cuadrada. Una onda pulsante de período 2 y anchura $1/n$ es generada por $f(x) = \begin{cases} -2, & \text{si } 1/n < |x| < 1 \\ 2, & \text{si } |x| \le 1/n \end{cases}$. Dibujar ondas pulsantes de anchuras 1/3 y 1/4 en el intervalo [–4, 4].

46. El **contenido armónico** de una onda es la razón entre las ondas armónicas enteras y la onda fundamental. Para entender lo que esto significa, escribamos la serie de Fourier del ejercicio 13 como $\frac{2}{\pi}(\operatorname{sen} \pi x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\pi x + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3\pi x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4\pi x + \cdots)$. El contenido armónico de la onda dentada es $\frac{1}{n}$. Explicar su relación con los tamaños relativos de los coeficientes de Fourier. El contenido armónico de la onda cuadrada es $\frac{1}{n}$ con los armónicos pares ausentes. Comparar esta descripción con la serie de Fourier del ejemplo 9.3. El contenido armónico de la onda pulsante de anchura $\frac{1}{3}$ es $\frac{1}{n}$ con todos los terceros armónicos ausentes. Sin calcular los coeficientes de Fourier, escribir la forma general de la serie de Fourier de $f(x) = \begin{cases} -2, & \text{si } 1/3 < |x| < 1 \\ 2, & \text{si } |x| \le 1/3 \end{cases}$.

47. La elección de la frecuencia de corte de un sintetizador tiene efectos dramáticos sobre el timbre del tono producido. En términos del contenido armónico (ejercicio 46), cuando la frecuencia de corte se sitúa en $n > 0$, todos los armónicos por encima del $n$-ésimo se hacen 0. En términos de series de Fourier, explicar que eso corresponde a tomar la suma parcial $F_n(x)$. Para las ondas dentada y cuadrada, dibujar las formas de onda para una frecuencia de corte 4. Compararlas con las formas de onda cuando la frecuencia de corte se sitúa en 2. Al bajarla, se oye más de un tono «puro». ¿Por qué?

48. La resonancia también cambia el timbre de manera notable en un sintetizador. Si es 1, se obtiene la forma de onda básica (dentada o cuadrada, por ejemplo). Si es 2, el contenido armónico de los cuatro primeros armónicos se divide entre 2, el quinto se multiplica por $\frac{3}{4}$, el sexto se deja intacto, el séptimo se divide entre 2 y los restantes se hacen 0. Dibujar las ondas dentada y cuadrada para una resonancia 2. ¿Cuál empieza a parecerse a la forma de onda del saxofón de la figura 8.51?

49. El fenómeno de Gibbs es la tendencia de las sumas parciales de las series de Fourier a aproximar por exceso o por defecto la función límite en sus puntos de discontinuidad (donde la función cambia bruscamente). Una fotografía en blanco y negro puede ser digitalizada dividiéndola en pequeños rectángulos y asignando a cada uno un número. Por ejemplo, a un rectángulo blanco se le asigna 1, a uno negro 10 y a los grises valores intermedios. La fotografía digitalizada se puede aproximar mediante una serie de Fourier. Un borde nítido en la fotografía



es un cambio brusco de blanco a negro, algo similar a una discontinuidad de salto. Ese cambio rápido requiere componentes de alta frecuencia en la serie de Fourier (o sea, términos con valores grandes de $k$). La fotografía de la izquierda está desenfocada, hasta tal punto que no se leen las letras del avión (es fácil imaginar que esto tiene cierta importancia en diversas situaciones). Aumentando el valor de los coeficientes de frecuencias altas en la serie de Fourier se puede obtener la fotografía de la derecha, mucho más nítida. Esta fotografía presenta también un «efecto halo» distinto en torno al avión. Explicar cómo está relacionado el halo con el fenómeno de Gibbs (fotos tomadas de *Visualization*, de Friedhoff y Benzon, con permiso de los autores).

50. La afinación de un piano es relativamente simple debido al fenómeno descrito en este ejercicio. Comparar las gráficas de $\operatorname{sen} 8t + \operatorname{sen} 8{,}2t$ y $2 \operatorname{sen} 8t$. Nótese sobre todo que la amplitud de $\operatorname{sen} 8t + \operatorname{sen} 8{,}2t$ parece aumentar y disminuir lentamente. En la identidad trigonométrica $\operatorname{sen} 8t + \operatorname{sen} 8{,}2t = [2\cos(0{,}2t)]\operatorname{sen}(8{,}1t)$, piense en $2\cos(0{,}2t)$ como la amplitud de $\operatorname{sen}(8{,}1t)$ y explique por qué esa lenta variación de la amplitud. Los afinadores de pianos suelen comenzar pulsando un diapasón de cierto tono (digamos $\operatorname{sen} 8t$) y a continuación la tecla del piano correspondiente. Si el piano está ligeramente desafinado (por ejemplo $\operatorname{sen} 8{,}2t$), la combinación de ambos produce un sonido en el que se aprecian claramente subidas y bajadas de volumen. Use su gráfica para explicar por qué ocurre eso.

51. La función $\operatorname{sen} 8\pi t$ representa una señal de 4 Hz (1 Hz = 1 ciclo por segundo) si $t$ se mide en segundos. Si recibe esta señal, una tarea posible sería tomar medidas de la señal y reconstruir la función. Por ejemplo, si mide tres muestras por segundo, tendrá los datos $f(0) = 0$, $f(1/3) = \sqrt{3}/2$, $f(2/3) = -\sqrt{3}/2$ y $f(1) = 0$. Sabiendo que la señal es del tipo $A \operatorname{sen} Bt$, debe usar esos datos para hallar $A$ y $B$. En este caso, no dispone de suficiente información para estar seguro de que obtiene los valores correctos de $A$ y $B$. Demuestre que eso es cierto hallando varios valores de $A$ y $B$ con $B \neq 8\pi$ que ajustan esos datos. Un famoso resultado de H. Nyquist (en 1928) establece que para reconstruir una señal de frecuencia $f$ se necesitan al menos $2f$ muestras.

52. Supongamos que quiere aproximar una forma de onda con funciones seno (sin cosenos), como en el problema del sintetizador. Vamos a encontrar esa **serie de Fourier de senos** en este ejercicio. Usaremos series de Fourier con un truco que garantice la aparición de senos únicamente. Partimos de la onda como una función $f(x)$ definida en el intervalo

$[0, l]$, para alguna longitud $l$. Entonces definimos una función $g(x)$ igual a $f(x)$ en $[0, l]$ y que además sea **impar**. Probar que $g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ -f(-x), & \text{si } -l < x < 0 \end{cases}$ sirve. Explicar por qué la serie de Fourier de $g(x)$ en $[-l, l]$ contiene sólo términos de tipo seno. Esta serie es el desarrollo en serie de senos de $f(x)$. Probar que los coeficientes de esa serie de senos son

$$b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} g(x)\,\text{sen}\left(\frac{k\pi}{l}\right)dx = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\,\text{sen}\left(\frac{k\pi}{l}\right)dx.$$

A continuación, calcular el desarrollo en serie de senos de $f(x) = x^2$ en $[0, 1]$ y representar la función límite en $[-3, 3]$.

53. Por analogía con el ejercicio 52, desarrollar una **serie de Fourier de cosenos** y hallar la que corresponde a $f(x) = x$ en $[0, 1]$.

# EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO

**En los ejercicios 1-8, determinar si la sucesión converge o diverge. Si converge, hallar su límite.**

1. $a_n = \dfrac{4}{3+n}$
2. $a_n = \dfrac{3n}{1+n}$
3. $a_n = (-1)^n \dfrac{n}{n^2+4}$
4. $a_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+4}$
5. $a_n = \dfrac{4^n}{n!}$
6. $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$
7. $a_n = \cos \pi n$
8. $a_n = \dfrac{\cos \pi n}{n}$

**En los ejercicios 9-18, responder «converge», «diverge» o «no se puede decidir».**

9. Si $\lim_{k\to\infty} a_k = 1$, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ _____
10. Si $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ _____
11. Si $\lim_{k\to\infty} \left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right| = 1$, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ _____
12. Si $\lim_{k\to\infty} \left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right| = 0$, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ _____
13. Si $\lim_{k\to\infty} a_k = \dfrac{1}{2}$, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ _____.
14. Si $\lim_{k\to\infty} \left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \dfrac{1}{2}$, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ _____.
15. Si $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \dfrac{1}{2}$, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ _____.
16. Si $\lim_{k\to\infty} k^2 a_k = 0$, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ _____.
17. Si $p > 1$, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{8}{k^p}$ _____.
18. Si $r > 1$, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} ar^k$ _____.

**En los ejercicios 19-22, calcular la suma de la serie convergente.**

19. $\sum_{k=0}^{\infty} 4\left(\dfrac{1}{2}\right)^k$
20. $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{4}{k(k+2)}$
21. $\sum_{k=0}^{\infty} 4^{-k}$
22. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \dfrac{3}{4^k}$

**En los ejercicios 23 y 24, estimar la suma de la serie con error menor que 0,01.**

23. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \dfrac{k}{k^4+1}$
24. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \dfrac{3}{k!}$

**En los ejercicios 25-44, investigar si la serie es convergente o divergente.**

25. $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{2k}{k+3}$
26. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \dfrac{2k}{k+3}$
27. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \dfrac{4}{\sqrt{k+1}}$
28. $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{4}{\sqrt{k+1}}$
29. $\sum_{k=1}^{\infty} 3k^{-7/8}$
30. $\sum_{k=1}^{\infty} 2k^{-8/7}$
31. $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{k}}{k^3+1}$
32. $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{k}{\sqrt{k^3+1}}$
33. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \dfrac{4^k}{k!}$
34. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \dfrac{2^k}{k}$
35. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right)$
36. $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{\cos k\pi}{\sqrt{k}}$
37. $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{2}{(k+3)^2}$
38. $\sum_{k=2}^{\infty} \dfrac{4}{k \ln k}$
39. $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{k!}{3^k}$
40. $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{k}{3^k}$
41. $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{e^{1/k}}{k^2}$
42. $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k\sqrt{\ln k + 1}}$
43. $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{4^k}{(k!)^2}$
44. $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{k^2+4}{k^3+3k+1}$

**En los ejercicios 45-48, determinar si la serie converge absolutamente, converge condicionalmente o diverge.**

45. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{k^2+1}$

46. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{3}{k+1}$

47. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} k}{k^{3/2}}$

48. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{3}{\ln k + 1}$

**En los ejercicios 49 y 50, hallar todos los valores de $p$ para los que la serie es convergente.**

49. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(3+k)^p}$

50. $\sum_{k=1}^{\infty} e^{kp}$

**En los ejercicios 51 y 52, calcular cuántos términos hay que sumar para aproximar la suma de la serie con error menor que $10^{-6}$.**

51. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{3}{k^2}$

52. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^k}{k!}$

**En los ejercicios 53-56, hallar una representación en serie de potencias para la función. Calcular el radio de convergencia.**

53. $\frac{1}{4+x}$

54. $\frac{2}{6-x}$

55. $\frac{3}{3+x^2}$

56. $\frac{2}{1+4x^2}$

**En los ejercicios 57 y 58, usar las series de los ejercicios 53 y 54 para expresar la función como serie de potencias y calcular su radio de convergencia.**

57. $\ln(4+x)$

58. $\ln(6-x)$

**En los ejercicios 59-66, hallar el intervalo de convergencia.**

59. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 2x^k$

60. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2x)^k$

61. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2}{k} x^k$

62. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{-3}{\sqrt{k}} \left(\frac{x}{2}\right)^k$

63. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{k!} (x-2)^k$

64. $\sum_{k=0}^{\infty} k^2 (x+3)^k$

65. $\sum_{k=0}^{\infty} 3^k (x-2)^k$

66. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{4^k} (x+1)^k$

**En los ejercicios 67 y 68, deducir el desarrollo en serie de Taylor de $f(x)$ centrado en $x = c$.**

67. $f(x) = \operatorname{sen} x, c = 0$

68. $f(x) = \frac{1}{x}, c = 1$

**En los ejercicios 69 y 70, hallar el polinomio de Taylor $P_4(x)$. Representar las gráficas de $f(x)$ y $P_4(x)$.**

69. $f(x) = \ln x, c = 1$

70. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, c = 1$

**En los ejercicios 71 y 72, usar los polinomios de Taylor de los ejercicios 69 y 70 para estimar los valores indicados. Determinar el orden del polinomio de Taylor necesario para garantizar que el error sea menor que $10^{-8}$.**

71. $\ln 1{,}2$

72.. $\frac{1}{\sqrt{1{,}1}}$

**En los ejercicios 73 y 74, usar una serie de Taylor conocida para hallar la serie de Taylor de la función. Calcular el radio de convergencia.**

73. $e^{-3x^2}$

74. $\operatorname{sen} 4x$

**En los ejercicios 75 y 76, usar los cinco primeros términos de una serie de Taylor conocida para estimar el valor de la integral.**

75. $\int_0^1 \operatorname{tg}^{-1} x \, dx$

76. $\int_0^2 e^{-3x^2} \, dx$

**En los ejercicios 77 y 78, deducir la serie de Fourier de la función.**

77. $f(x) = x, -2 \le x \le 2$

78. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi < x \le 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x \le \pi \end{cases}$

**En los ejercicios 79-82, representar al menos tres períodos de la función a la que converge la serie de Fourier.**

79. $f(x) = x^2, -1 \le x \le 1$

80. $f(x) = 2x, -2 \le x \le 2$

81. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 < x \le 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x \le 1 \end{cases}$

82. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -2 < x \le 0 \\ x & \text{si } 0 < x \le 2 \end{cases}$

83. Dos amigos, $A$ y $B$, tiran una moneda por turno. Ganará el primero que saque cara. Obviamente, el que tira primero tiene ventaja, pero ¿cuánta? Supongamos que sale $A$. La probabilidad de que $A$ gane en su primera tirada es $\frac{1}{2}$, la probabilidad de que $A$ gane en su segunda tirada es $\frac{1}{8}$, en la tercera $\frac{1}{32}$, y así sucesivamente. Sumar una serie geométrica para calcular la probabilidad total de que $A$ gane el juego.

84. En un juego similar al del ejercicio 83, ganará el primero en sacar un 4 al lanzar un dado. ¿Este juego es más justo que el anterior? Las probabilidades de que $A$ (que lanza primero) gane en las tres primeras tiradas son $\frac{1}{6}$, $\frac{25}{216}$ y $\frac{625}{7.776}$, respectivamente. Sumar una serie geométrica para hallar la probabilidad total de que $A$ gane el juego.

85. Para la sucesión de Fibonacci, definida por $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ y $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$. Probar que $\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. (Este número, descubierto en la Grecia clásica, se conoce como **razón áurea**). (Ayuda: Tomar $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ y dividir entre $a_n$. Llamando $r = \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, argumentar que $\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{1}{r}$ y resolver entonces la ecuación $r = 1 + \frac{1}{r}$).

86. La siguiente construcción permite visualizar la sucesión de Fibonacci. Partimos de dos cuadrados de lado 1 (figura A). Sobre ellos colocamos un cuadrado de lado 2 (figura B). Les adosamos a la izquierda un cuadrado de lado 3 (figura C). Continuamos así adosando en espiral cuadrados cuyos lados coinciden con los números de la sucesión de Fibonacci. En las figuras A-C, calcular la razón entre los lados del rectángulo total. (Ayuda: La primera es $\frac{2}{1}$, la segunda $\frac{3}{2}$). Calcular el límite de esas razones. Los griegos opinaban que esa razón produce el rectángulo más bello y, de hecho, construyeron el Partenón y otros edificios emblemáticos con esa proporción. (Véase *Divine Proportion*, de H. E. Huntley).

Figura A Figura B Figura C

87. Otro tipo de sucesión estudiada por los matemáticos lo constituyen las **fracciones continuas**. Explorar numéricamente la sucesión $1 + \frac{1}{1}, 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}, 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}, \cdots$. Aquí está de nuevo presente la razón áurea. El vizconde Brouncker, un matemático inglés del siglo XVII, demostró que la sucesión $1 + \frac{1^2}{2}, 1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2}}, 1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{2}}}, \cdots$ converge a $\frac{4}{\pi}$. (Véase *A History of Pi*, de Petr Beckmann). Explorar esta sucesión numéricamente.

88. Para la serie de potencias $\frac{1}{1 - x - x^2} = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \cdots$, demostrar que las constantes $c_i$ son los números de Fibonacci. Hacer $x = \frac{1}{1.000}$ para deducir la interesante representación decimal $\frac{1.000.000}{998.999}$.

# APÉNDICE A

# DEMOSTRACIONES DE ALGUNOS TEOREMAS

En este apéndice demostraremos algunos teoremas especialmente significativos en el desarrollo teórico del libro y que, por una u otra razón, no han sido probados en el texto.

Los primeros, porque requieren la definición rigurosa ($\varepsilon$-$\delta$) de límite, que no se introdujo hasta la sección 1.5. Con lo expuesto en la sección 1.5 ya estamos en condiciones de demostrarlos. Empezamos por un resultado relativo a nuestras reglas habituales para calcular límites (es el teorema 2.3 en la sección 1.2).

---

**Teorema A.1**

Si $\lim_{x \to a} f(x)$ y $\lim_{x \to a} g(x)$ existen y $c$ es una constante, entonces

(i) $\lim_{x \to a} [cf(x)] = c \lim_{x \to a} f(x)$,

(ii) $\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$,

(iii) $\lim_{x \to a} [f(x)g(x)] = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]\left[\lim_{x \to a} g(x)\right]$ y

(iv) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$ $\left(\text{si } \lim_{x \to a} g(x) \neq 0\right)$.

---

**Demostración**

(i) Puesto que $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$, la definición rigurosa de límite asegura que, dado cualquier $\varepsilon_1 > 0$, existe un $\delta_1 > 0$ tal que

$$|f(x) - L_1| < \varepsilon_1, \text{ siempre que } 0 < |x - a| < \delta_1. \tag{A.1}$$

Para demostrar que $\lim_{x \to a} [cf(x)] = c \lim_{x \to a} f(x)$ hemos de ser capaces de hacer $cf(x)$ tan cercano a $cL_1$ como se desee. Se tiene

$$|cf(x) - cL_1| = |c|\,|f(x) - L_1|.$$

Y sabemos que podemos hacer $|f(x) - L_1|$ tan pequeño como queramos. Más específicamente, dado cualquier $\varepsilon_1 > 0$, existe un $\delta_1 > 0$ para el cual

$$|cf(x) - cL_1| = |c|\,|f(x) - L_1| < |c| < \varepsilon_1, \text{ siempre que } 0 < |x - a| < \delta_1.$$

Tomando $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{|c|}$ y $\delta = \delta_1$, obtenemos

$$|cf(x) - cL_1| < |c|\,\varepsilon_1 = |c|\frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon, \text{ siempre que } 0 < |x - a| < \delta.$$

Eso significa que $\lim_{x \to a} [cf(x)] = cL_1$, como queríamos demostrar.

(ii) Análogamente, puesto que $\lim_{x \to a} g(x) = L_2$, dado cualquier $\varepsilon_2 > 0$, existe un $\delta_2 > 0$ tal que

$$|g(x) - L_2| < \varepsilon_2, \text{ siempre que } 0 < |x - a| < \delta_2. \tag{A.2}$$

Para verificar que

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = (L_1 + L_2)$$

debemos probar que, dado cualquier $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$|[f(x) + g(x)] - (L_1 + L_2)| < \varepsilon, \text{ siempre que } 0 < |x - a| < \delta.$$

Nótese que

$$\begin{aligned} |[f(x) + g(x)] - (L_1 + L_2)| &= |[f(x) - L_1] + [g(x) - L_2]| \\ &\leq |f(x) - L_1| + |g(x) - L_2|, \end{aligned} \tag{A.3}$$

por la desigualdad triangular. Naturalmente, los dos términos de la derecha de (A.3) se pueden hacer arbitrariamente pequeños, por (A.1) y (A.2). En particular, si tomamos $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2}$, en tanto en cuanto

$$0 < |x - a| < \delta_1 \quad \textbf{y} \quad 0 < |x - a| < \delta_2,$$

se deduce de (A.1), (A.2) y (A.3) que

$$\begin{aligned} |[f(x) + g(x)] - (L_1 + L_2)| &\leq |f(x) - L_1| + |g(x) - L_2| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

como deseábamos. Eso ocurre siempre que

$$0 < |x - a| < \delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\},$$

donde tomar $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$ significa simplemente elegir como $\delta$ el menor de $\delta_1$ y $\delta_2$. (Observe que si $0 < |x - a| < \delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$, entonces $0 < |x - a| < \delta_1$ **y** $0 < |x - a| < \delta_2$).

(iii) En este caso, hemos de probar que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$|f(x)g(x) - L_1L_2| < \varepsilon, \text{ siempre que } 0 < |x - a| < \delta.$$

Así, pues, el objetivo es hacer $|f(x)g(x) - L_1L_2|$ tan pequeño como sea necesario. Ahora bien, se tiene

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - L_1L_2| &= |f(x)g(x) - g(x)L_1 + g(x)L_1 - L_1L_2| \\ &= |[f(x) - L_1]g(x) + L_1[g(x) - L_2]| \\ &\leq |f(x) - L_1|\,|g(x)| + |L_1|\,|g(x) - L_2|, \end{aligned} \tag{A.4}$$

por la desigualdad triangular. Recordemos que podemos hacer $|f(x) - L_1|$ y $|g(x) - L_2|$ arbitrariamente pequeños. Si hacemos los dos sumandos de (A.4) menores que $\frac{\varepsilon}{2}$, la suma será menor que $\varepsilon$, como deseamos. En particular, sabemos que existe un número $\delta_2 > 0$ tal que

$$|g(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2|L_1|}, \text{ siempre que } 0 < |x - a| < \delta_2,$$

supuesto $L_1 \neq 0$, así que

$$|L_1|\,|g(x) - L_2| < |L_1|\,\frac{\varepsilon}{2|L_1|} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si $L_1 = 0$, entonces

$$|L_1|\,|g(x) - L_2| = 0 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por tanto, sea cual sea el valor de $L_1$, tenemos

$$|L_1|\,|g(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ siempre que } 0 < |x - a| < \delta_2. \tag{A.5}$$

El primer término de (A.4) plantea un reto algo más difícil. Debemos estimar el tamaño de $|g(x)|$. Ahora bien,

$$|g(x)| = |g(x) - L_2 + L_2| \leq |g(x) - L_2| + |L_2|. \tag{A.6}$$

Como $\lim_{x \to a} g(x) = L_2$, existe un $\delta_3 > 0$ tal que

$$|g(x) - L_2| < 1, \text{ siempre que } 0 < |x - a| < \delta_3.$$

De (A.6) se sigue ahora

$$|g(x)| \leq |g(x) - L_2| + |L_2| < 1 + |L_2|.$$

En cuanto al primer término de (A.4), se tiene que cuando $0 < |x - a| < \delta_3$,

$$|f(x) - L_1|\,|g(x)| < |f(x) - L_1|(1 + |L_2|). \tag{A.7}$$

Ahora bien, como $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$, dado cualquier $\varepsilon > 0$, existe un $\delta_1 > 0$ tal que para $0 < |x - a| < \delta_1$,

$$|f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2(1 + |L_2|)}.$$

De (A.7) se sigue que

$$\begin{aligned} |f(x) - L_1|\,|g(x)| &< |f(x) - L_1|(1 + |L_2|) \\ &< \frac{\varepsilon}{2(1 + |L_2|)}\,(1 + |L_2|) \\ &= \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

siempre que $0 < |x - a| < \delta_1$ **y** $0 < |x - a| < \delta_3$. Junto con (A.4) y (A.5), esto nos dice que tomando $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, si $0 < |x - a| < \delta$, entonces

$$|f(x)g(x) - L_1L_2| \leq |f(x) - L_1|\,|g(x)| + |L_1|\,|g(x) - L_2|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

lo que demuestra finalmente (iii).

(iv) En primer lugar demostramos que

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{L_2},$$

con $L_2 \neq 0$. En este caso hemos de probar que podemos hacer $\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{L_2} \right|$ arbitrariamente pequeño. Se tiene

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{L_2} \right| = \left| \frac{L_2 - g(x)}{L_2 g(x)} \right|. \tag{A.8}$$

Naturalmente, como $\lim_{x \to a} g(x) = L_2$, podemos hacer el numerador de la fracción de la derecha tan pequeña como queramos. Pero falta saber qué hacemos con el denominador. Recordemos que, dado cualquier $\varepsilon_2 > 0$, existe un $\delta_2 > 0$ tal que

$$|g(x) - L_2| < \varepsilon_2, \text{ siempre que } 0 < |x - a| < \delta_2.$$

En particular, para $\varepsilon_2 = \frac{|L_2|}{2}$, eso dice que

$$|g(x) - L_2| < \frac{|L_2|}{2}.$$

Asimismo, es cierto que

$$|L_2| = |L_2 - g(x) + g(x)| \leq |L_2 - g(x)| + |g(x)| < \frac{|L_2|}{2} + |g(x)|.$$

Restando $\frac{|L_2|}{2}$ de ambos lados, queda

$$\frac{|L_2|}{2} < |g(x)|,$$

así que

$$\frac{2}{|L_2|} > \frac{1}{|g(x)|}.$$

Por (A.8),

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{L_2} \right| = \left| \frac{L_2 - g(x)}{L_2 g(x)} \right| < \frac{2|L_2 - g(x)|}{L_2^2}. \tag{A.9}$$

Además, dado cualquier $\varepsilon > 0$, existe un $\delta_3 > 0$ tal que

$$|L_2 - g(x)| < \frac{\varepsilon L_2^2}{2}, \text{ siempre que } 0 < |x - a| < \delta_3.$$

Según (A.9), se tiene, con $\delta = \text{mín}\{\delta_2, \delta_3\}$,

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{L_2}\right| < \frac{2|L_2 - g(x)|}{L_2^2} < \varepsilon,$$

siempre que $0 < |x - a| < \delta$, como queríamos. Hemos probado que

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{L_2}.$$

De (iii) se deduce ahora que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \left[f(x) \frac{1}{g(x)}\right] = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]\left[\lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)}\right],$$

$$= L_1\left(\frac{1}{L_2}\right) = \frac{L_1}{L_2},$$

que demuestra la última parte del teorema.

---

El siguiente resultado es el teorema 2.5 de la sección 1.2.

---

**Teorema A.2**

Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $n$ es cualquier entero positivo,

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{L},$$

donde si $n$ es par se supone que $L > 0$.

---

---

**Demostración**

Como $\lim_{x \to a} f(x) = L$, sabemos que dado cualquier $\varepsilon_1 > 0$ existe un $\delta_1 > 0$ tal que

$$|f(x) - L| < \varepsilon_1, \text{ siempre que } 0 < |x - a| < \delta_1.$$

Para demostrar que $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$ necesitamos probar que dado cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$|\sqrt[n]{f(x)} - \sqrt[n]{L}| < \varepsilon, \text{ siempre que } 0 < |x - a| < \delta.$$

Eso es equivalente a

$$\sqrt[n]{L} - \varepsilon < \sqrt[n]{f(x)} < \sqrt[n]{L} + \varepsilon.$$

Elevando a la potencia $n$, se tiene

$$(\sqrt[n]{L} - \varepsilon)^n < f(x) < (\sqrt[n]{L} + \varepsilon)^n.$$

Restando $L$, se obtiene

$$(\sqrt[n]{L} - \varepsilon)^n - L < f(x) - L < (\sqrt[n]{L} + \varepsilon)^n - L.$$

Puesto que $\varepsilon$ ha de ser pequeño, suponemos $\varepsilon < \sqrt[n]{L}$. En tal caso, $0 < \sqrt[n]{L} - \varepsilon < \sqrt[n]{L}$. Sea $\varepsilon_1 = \text{mín}\{(\sqrt[n]{L} + \varepsilon)^n - L, L - (\sqrt[n]{L} - \varepsilon)^n\} > 0$. Por tanto, al ser $\lim_{x \to a} f(x) = L$, sabemos que existe un $\delta > 0$ tal que

$$-\varepsilon_1 < f(x) - L < \varepsilon_1, \text{ siempre que } 0 < |x - a| < \delta.$$

De ahí se sigue que

$$(\sqrt[n]{L} - \varepsilon)^n - L \leq -\varepsilon_1 < f(x) - L < \varepsilon_1 \leq (\sqrt[n]{L} + \varepsilon)^n - L,$$

siempre que $0 < |x - a| < \delta$. Invirtiendo la secuencia anterior de pasos, se ve que $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$, que es lo que queríamos demostrar.

---

El próximo resultado apareció como teorema 2.7 en la sección 1.2.

---

**Teorema A.3 (Teorema del encaje)**

Supongamos que

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \tag{A.10}$$

para todo $x$ en algún intervalo $(c, d)$, excepto posiblemente en el punto $a \in (c, d)$, y que

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L,$$

para algún número $L$. Entonces, también

$$\lim_{x \to a} g(x) = L.$$

---

**Demostración**

Para demostrar que $\lim_{x \to a} g(x) = L$ hay que probar que para cualquier $\varepsilon > 0$ dado, existe un $\delta > 0$ tal que

$$|g(x) - L| < \varepsilon, \text{ siempre que } 0 < |x - a| < \delta.$$

Como $\lim_{x \to a} f(x) = L$, para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta_1 > 0$ tal que

$$|f(x) - L| < \varepsilon, \text{ siempre que } 0 < |x - a| < \delta_1.$$

Análogamente, al ser $\lim_{x \to a} h(x) = L$, dado cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta_2 > 0$ tal que

$$|h(x) - L| < \varepsilon, \text{ siempre que } 0 < |x - a| < \delta_2.$$

Sea $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$. Entonces, si $0 < |x - a| < \delta$, se cumplen $0 < |x - a| < \delta_1$ y $0 < |x - a| < \delta_2$, así que

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{y} \quad |h(x) - L| < \varepsilon.$$

O lo que es equivalente,

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon \quad \text{y} \quad L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon. \tag{A.11}$$

Ahora, de (A.10) y (A.11) se sigue que si $0 < |x - a| < \delta$, entonces

$$L - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \varepsilon,$$

es decir,

$$L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon,$$

o sea, $|g(x) - L| < \varepsilon$ y, en consecuencia, $\lim_{x \to a} g(x) = L$, que es lo que queríamos probar.

---

El próximo resultado es el teorema 3.3 de la sección 1.3.

---

**Teorema A.4**

Si $\lim_{x \to a} g(x) = L$ y $f$ es continua en $L$, entonces

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right) = f(L).$$

---

**Demostración**

Tenemos que demostrar que, dado cualquier $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ para el cual

$$|f(g(x)) - f(L)| < \varepsilon, \text{ siempre que } 0 < |x - a| < \delta.$$

Como $f$ es continua en $L$, $\lim_{t \to L} f(t) = f(L)$. En consecuencia, dado cualquier $\varepsilon > 0$, existe un $\delta_1 > 0$ para el cual

$$|f(t) - f(L)| < \varepsilon, \text{ siempre que } 0 < |t - L| < \delta_1.$$

Además, como $\lim_{x \to a} g(x) = L$, podemos hacer $g(x)$ tan próximo a $L$ como deseemos, tomando $x$ suficientemente cerca de $a$. En particular, debe existir un $\delta > 0$ para el cual $|g(x) - L| < \delta_1$, siempre que $0 < |x - a| < \delta$. Ahora se deduce que si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|g(x) - L| < \delta_1$, de modo que

$$|f(g(x)) - f(L)| < \varepsilon,$$

como queríamos demostrar.

---

El siguiente teorema aparecía en la sección 1.4 como teorema 4.1.

---

**Teorema A.5**

Para cualquier número racional $t > 0$,

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^t} = 0,$$

donde, en el caso $x \to -\infty$, suponemos que se puede escribir $t = \frac{p}{q}$, con $q$ impar.

---

**Demostración**

En primer lugar, demostraremos que $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^t} = 0$. A tal fin, debemos probar que, dado cualquier $\varepsilon > 0$, existe un $M > 0$ para el cual $\left| \frac{1}{x^t} - 0 \right| < \varepsilon$, siempre que $x > M$. Como $x \to \infty$, podemos tomar $x$ positivo, así que

$$\left| \frac{1}{x^t} - 0 \right| = \frac{1}{x^t} < \varepsilon,$$

que equivale a

$$\frac{1}{x} < \varepsilon^{1/t},$$

o sea,

$$\frac{1}{\varepsilon^{1/t}} < x.$$

Nótese que tomando como $M$ cualquier número mayor que $\frac{1}{\varepsilon^{1/t}}$, se tendrá $\left| \frac{1}{x^t} - 0 \right| < \varepsilon$, siempre que $x > M$, como deseábamos.

Para el caso $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^t} = 0$ hay que demostrar que, dado cualquier $\varepsilon > 0$, existe un $N < 0$ para el cual $\left| \frac{1}{x^t} - 0 \right| < \varepsilon$, siempre que $x < N$. Como $x \to -\infty$, podemos tomar $x$ negativo, así que

$$\left| \frac{1}{x^t} - 0 \right| = \frac{1}{|x^t|} < \varepsilon,$$

que es equivalente a

$$\frac{1}{|x|} < \varepsilon^{1/t},$$

o sea,

$$\frac{1}{\varepsilon^{1/t}} < |x| = -x,$$

ya que $x < 0$. Multiplicando ambos lados por $-1$, resulta

$$-\frac{1}{\varepsilon^{1/t}} > x.$$

Nótese que tomando como $N$ cualquier número menor que $-\frac{1}{\varepsilon^{1/t}}$, se tendrá $\left| \frac{1}{x^t} - 0 \right| < \varepsilon$, siempre que $x < N$, como queríamos demostrar.

En el Capítulo 3 probamos la regla de L'Hôpital sólo en un caso especial. Ahora vamos a demostrarla en general para el caso $\frac{0}{0}$. Antes necesitamos la siguiente generalización del teorema del valor medio.

**Teorema A.6 (Teorema del valor medio generalizado)**

Sean $f$ y $g$ continuas en el intervalo $[a, b]$, derivables en $(a, b)$ y con $g'(x) \neq 0$ para todo $x$ en $(a, b)$. Entonces, existe un número $z \in (a, b)$ en el que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

Cuando $g(x) = x$, se reduce al teorema del valor medio.

---

**Demostración**

Puesto que $g'(x) \neq 0$ en todo $x \in (a, b)$, ha de ser $g(b) - g(a) \neq 0$. Eso es consecuencia del teorema de Rolle, ya que si fuera $g(a) = g(b)$, en algún punto $c \in (a, b)$ sería $g'(c) = 0$. Pues bien, definamos la función auxiliar

$$h(x) = [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x).$$

La función $h$ es continua en $[a, b]$ y derivable en $(a, b)$, por serlo $f$ y $g$. Además,

$$\begin{aligned} h(a) &= [f(b) - f(a)]g(a) - [g(b) - g(a)]f(a) \\ &= f(b)g(a) - g(b)f(a) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} h(b) &= [f(b) - f(a)]g(b) - [g(b) - g(a)]f(b) \\ &= g(a)f(b) - f(a)g(b), \end{aligned}$$

así que $h(a) = h(b)$. Por tanto, el teorema de Rolle asegura que existe un $z \in (a, b)$ en el cual

$$0 = h'(z) = [f(b) - f(a)]g'(z) - [g(b) - g(a)]f'(z),$$

es decir,

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(z)}{g'(z)},$$

como deseábamos probar.

---

Ahora daremos la demostración general de la regla de L'Hôpital para el caso $\frac{0}{0}$. La del caso $\frac{\infty}{\infty}$ puede encontrase en textos más avanzados.

---

**Teorema A.7 (La regla de L'Hôpital)**

Supongamos que $f$ y $g$ son derivables en el intervalo $(a, b)$, excepto posiblemente en un punto $c \in (a, b)$ y que $g'(x) \neq 0$ en $(a, b)$, excepto posiblemente en $x = c$. Supongamos además que $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ tiene la forma indeterminada $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ y que $\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ (o $\pm\infty$). Entonces,

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

---

**Demostración**

(Caso $\frac{0}{0}$). En este caso, $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = 0$. Definamos

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq c \\ 0 & \text{si } x = c \end{cases} \quad \text{y} \quad G(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \neq c \\ 0 & \text{si } x = c \end{cases}.$$

Observemos que

$$\lim_{x \to c} F(x) = \lim_{x \to c} f(x) = 0 = F(c)$$

y

$$\lim_{x \to c} G(x) = \lim_{x \to c} g(x) = 0 = G(c),$$

de modo que $F$ y $G$ son continuas en todos los puntos de $(a, b)$. Para $x \neq c$, $F'(x) = f'(x)$ y $G'(x) = g'(x)$, luego $F$ y $G$ son derivables en cada uno de los intervalos $(a, c)$ y $(c, b)$. Consideramos en primer lugar el intervalo $(c, b)$. Puesto que $F$ y $G$ son continuas en $[c, b]$ y derivables en $(c, b)$, el teorema del valor medio generalizado garantiza que para cada $x \in (c, b)$ existe algún $z$, con $c < z < x$, tal que

$$\frac{F'(z)}{G'(z)} = \frac{F(x) - F(c)}{G(x) - G(c)} = \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{f(x)}{g(x)},$$

donde hemos usado el hecho de que $F(c) = G(c) = 0$. Nótese que cuando $x \to c^+$, $z \to c^+$, también, porque $c < z < x$. Tomando el límite para $x \to c^+$, se obtiene

$$\lim_{x \to c^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{z \to c^+} \frac{F'(z)}{G'(z)} = \lim_{z \to c^+} \frac{f'(z)}{g'(z)} = L.$$

Análogamente, centrando la atención en el intervalo $(a, c)$ se puede probar que $\lim_{x \to c^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L$, lo cual demuestra que $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ (ya que los dos límites laterales coinciden).

---

El próximo teorema corresponde al teorema 6.1 de la sección 8.6.

---

**Teorema A.8**

Dada cualquier serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - c)^k$, hay exactamente tres posibilidades:

(i) La serie converge **para todo** $x \in (-\infty, \infty)$. El radio de convergencia es $r = \infty$.

(ii) La serie converge **sólo** en $x = c$ (diverge para todos los demás valores de $x$). El radio de convergencia es $r = 0$.

(iii) La serie converge para $x \in (c - r, c + r)$ y diverge para $x < c - r$ y para $x > c + r$, donde $r$ (el radio de convergencia) es algún número con $0 < r < \infty$.

---

La demostración se basa en dos resultados previos, más simples, que pasamos a demostrar.

---

**Teorema A.9**

(i) Si la serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ converge para $x = a \neq 0$, converge también para todo $x$ con $|x| < |a|$.

(ii) Si la serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ diverge para $x = d$, diverge también para todo $x$ con $|x| > |d|$.

---

**Demostración**

(i) Supongamos que $\sum_{k=0}^{\infty} b_k a^k$ converge. Entonces, por el teorema 2.2 de la sección 8.2, $\lim_{k \to \infty} b_k a^k = 0$. Para que eso ocurra, debe poder hacerse $|b_k a^k|$ arbitrariamente pequeño, sin

más que tomar $k$ suficientemente grande. En particular, ha de existir un $N > 0$ tal que $|b_k a^k| < 1$, para todo $k > N$. Así, pues, si $k > N$,

$$|b_k x^k| = \left| b_k a^k \left( \frac{x^k}{a^k} \right) \right| = |b_k a^k| \left| \frac{x}{a} \right|^k < \left| \frac{x}{a} \right|^k.$$

Si $|x| < |a|$, entonces $\left| \frac{x}{a} \right| < 1$, luego $\sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{x}{a} \right|^k$ es una serie geométrica convergente. Por consiguiente, el criterio de comparación permite concluir que $\sum_{k=0}^{\infty} |b_k x^k|$ converge y, por tanto, $\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ es absolutamente convergente.

(ii) Supongamos que $\sum_{k=0}^{\infty} b_k d^k$ diverge. Si $x$ es cualquier número con $|x| > |d|$, $\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ debe ser divergente, ya que si fuera convergente por el apartado (i) tendría que ser convergente $\sum_{k=0}^{\infty} b_k d^k$ también, lo que contradice nuestra hipótesis.

---

A continuación enunciamos y demostramos una versión algo simplificada del teorema A.8.

---

### Teorema A.10

Dada una serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$, hay exactamente tres posibilidades:

(i) La serie converge **para todo** $x \in (-\infty, \infty)$. El radio de convergencia es $r = \infty$.

(ii) La serie converge **sólo** en $x = 0$ (diverge para todos los demás valores de $x$). El radio de convergencia es $r = 0$.

(iii) La serie converge para todo $x \in (-r, r)$ y diverge para $x < -r$ y para $x > r$, para cierto número $r$ (el radio de convergencia) con $0 < r < \infty$.

---

### Demostración

Si (i) y (ii) son ambos falsos, debe haber dos números $a$ y $d$ tales que la serie converge en $x = a$ y diverge en $x = d$. Según el teorema A.9, $\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ diverge para todo $x$ con $|x| > |d|$. Sea $S$ el conjunto de valores de $x$ para los que la serie converge. No es vacío, ya que la serie converge en $x = a$. Además, $|d|$ es una cota superior de $S$, ya que la serie diverge para todo $x$ con $|x| > |d|$. Por el axioma de completitud (sección 8.1), $S$ tiene una cota superior mínima, digamos $r$. Así, pues, si $|x| > r$, $\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ diverge. Por otra parte, si $|x| < r$, entonces $|x|$ no es una cota superior de $S$, luego debe existir un número $t$ en $S$ con $|x| < t$. Como $t \in S$, $\sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k$ converge y, por el teorema A.9, $\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ converge para $|x| < t \leq |t|$. Eso demuestra el teorema.

---

Ya podemos demostrar el resultado original (teorema A.8).

---

### Demostración

Denotando $t = x - c$, la serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - c)^k$ se expresa como $\sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k$. Por el teorema A.10, esta serie bien converge para todo $t$ (es decir, para todo $x$) o converge sólo en $t = 0$ (es decir, sólo en $x = c$) o bien existe un número $r > 0$ tal que la serie converge cuando $|t| < r$ (o sea, para $|x - c| < r$) y diverge cuando $|t| > r$ (o sea, para $|x - c| > r$). Eso demuestra el teorema.

---

# APÉNDICE B

# SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS IMPARES

## CAPÍTULO 0

### Ejercicios de la sección 0.1

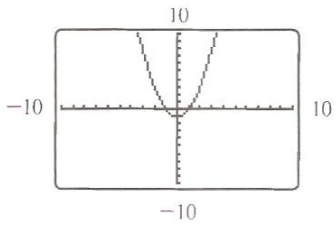
**5.** $x < 3$ **7.** $x < -2$ **9.** $x > -\frac{2}{3}$ **11.** $3 \le x < 6$
**13.** $-\frac{1}{2} < x < 2$ **15.** $x < 4$ o $x > 1$
**17.** $-2 < x < 3$ **19.** todos los reales **21.** $-1 < x < 7$
**23.** $2 < x < 4$ **25.** $x < -\frac{3}{2}$ o $x > \frac{1}{2}$
**27.** $x < -2$ o $x > 2$
**29.** $x < -4$ o $-4 < x < -1$ o $x > 2$
**31.** $x < -1$ o $x > 0$ **33.** $\sqrt{13}$ **35.** 4
**37.** $\sqrt{20}$ **39.** sí **41.** sí
**43.** Crece 550, 650, 750; predice 3.200 + 850 = 4.050
**45.** Decrece en 10, 30, 50; predice 3.910 – 70 = 3.840
**47.** Un número finito de dígitos termina
**49.** $\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^7 - \left(\frac{2}{3}\right)^{12}}{\left(\frac{1}{2}\right)^7} \approx 0{,}013$

### Ejercicios de la sección 0.2

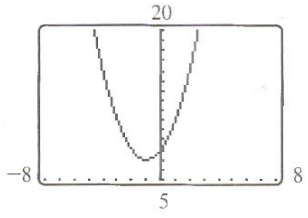
**5.** sí **7.** sí **9.** no **11.** no **13.** 2
**15.** $\frac{1}{2}$ **17.** $-\frac{5}{2}$ **19.** $-\frac{5}{7}$
**21.** (2, 5), $y = 2(x - 1) + 3$ **23.** (2, 2), $y = -2(x - 1) + 4$
**25.** (0,1), $y = 1$ **27.** (4, 2), $y = \frac{1}{2}(x - 2) + 1$
**29.** (3,3, 2,3), $y = 1{,}2(x - 2{,}3) + 1{,}1$
**31.** paralelas **33.** perpendiculares
**35.** ninguna de ambas cosas **37.** ninguna de ambas cosas
**39.** paralelas **41.** (a) $y = 2(x - 2) + 1$ (b) $y = -\frac{1}{2}(x - 2) + 1$
**43.** (a) $y = -1$ (b) $x = 0$
**45.** (a) $y = 2(x - 3) + 1$ (b) $y = -\frac{1}{2}(x - 3) + 1$
**47.** $y = 2(x - 1) + 1$; 7 **49.** $y = -2(x - 1) + 3$; –3
**51.** $y = \frac{1}{2}(x + 2) + 1$; 4 **53.** sí **55.** no **57.** sí
**59.** ambas **61.** racional **63.** ninguna **65.** ambas
**67.** $x \ge -2$ **69.** todos los reales **71.** $x \ne \pm 1$
**73.** todos los reales **75.** $-1, 1, 11, -\frac{5}{4}$
**77.** $1, 2, 0, \sqrt{\frac{3}{2}}$ **79.** $0 < x$
**81.** $0 \le x \le$ número de unidades fabricadas
**83.** no; más de una $y$ para cada $x$
**85.** no; más de una $y$ para cada $x$ **87.** los días 1 y 9
**89.** constante, creciente, decreciente; la gráfica baja, la gráfica sube
**95.** 63.000 pies **97.** 9.550 rpm

### Ejercicios de la sección 0.3

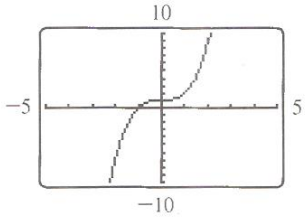
**5.**



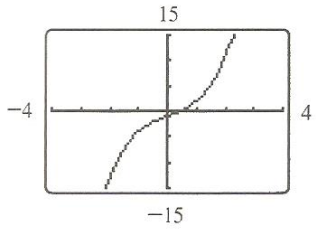

**7.**



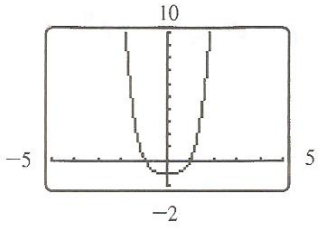

**9.**



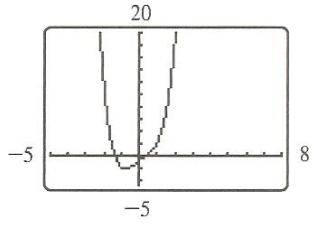
**11.**



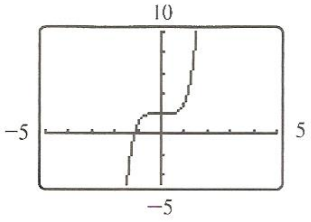

**13.**



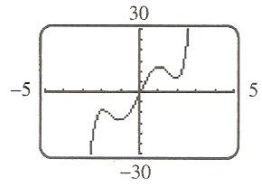

**15.**



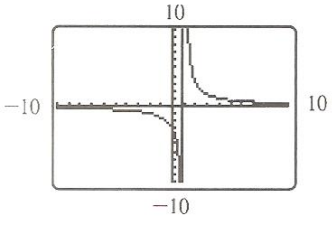

**17.**



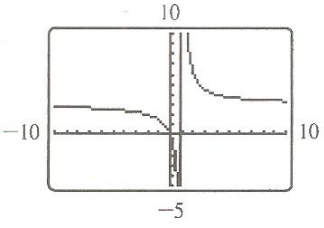

**19.**



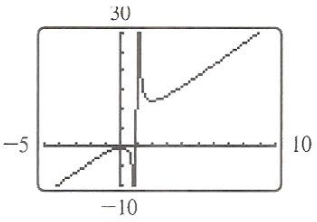

**21.**



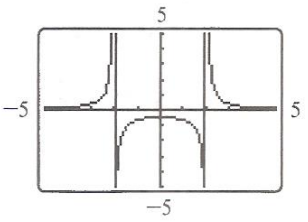

**23.**



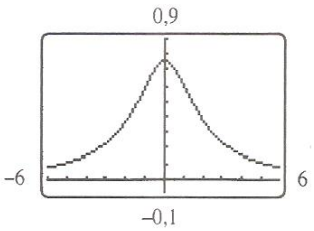

**25.**



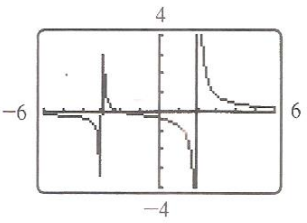

**27.**



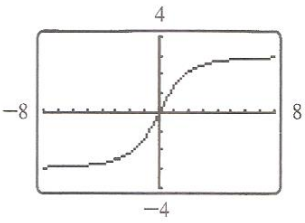

**29.**




**31.**




**33.**




**35.** $x = -2, x = 2, y = -4$ **37.** $y = 4$

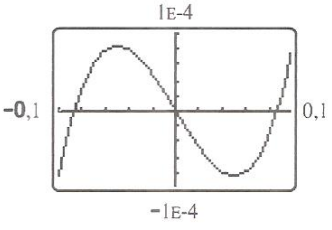
**39.** $x = -1, x = 4, y = -4$ **41.** $x = -1, x = 1, x = 2, y = 2$

**43.** $x = -1, y = -\frac{1}{4}$ **45.** $x = -2, x = 2$

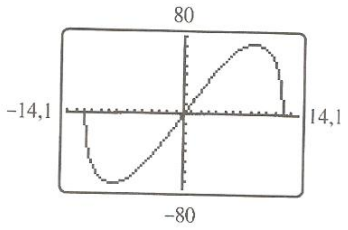
**47.** $x = -5, x = 2$ **49.** no hay

**51.** $x = -2, x = -1, x = 0$ **53.** $x = -3, x = 3$

**55.**



**57.**




**59.** $y = 0$ **61.** $y = 3$ **63.** $y = 1$

**65.** por ejemplo: $-9 \le x \le 11, -17 \le x \le 23$

**67.** parábola $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$ **69.** $v_T$ (metal) $= \sqrt{2}\, v_T$ (madera)

## Ejercicios de la sección 0.4

**5.** 1, 3 **7.** −3, 5 **9.** $\sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}$

**11.** $-1 + \frac{\sqrt{6}}{2}, -1 - \frac{\sqrt{6}}{2}$ **13.** 0, 1, 2 **15.** −2, −1, 2

**17.** −1, 1 **19.** $-\sqrt[3]{2}$, 1 **21.** −1,879, 0,347, 1,532

**23.** −1,325 **25.** −2,831, −1 **27.** 0,125

**29.** −5,248, 10,006 **31.** 2; $x = 1, x \approx 1{,}206$

**33.** 1, $x = 1$ **35.** 2; $x = 0, x \approx 9{,}534$ **37.** 1; $x = 0$

**39.** 2; $x \approx -1{,}18, x \approx 1{,}18$; **45.** 3 (verdadera); −1(espúrea)

**47.** $-1 - 2i, -1 + 2i$ **49.** $-1 - \sqrt{6}, -1 + \sqrt{6}$

**51.** $1, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ **53.** $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$

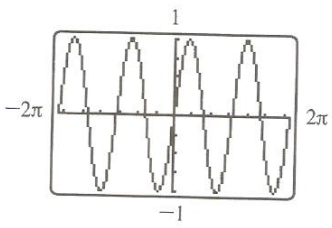
**55.** −1, 0, 1 **59.** 81 pies

## Ejercicios de la sección 0.5

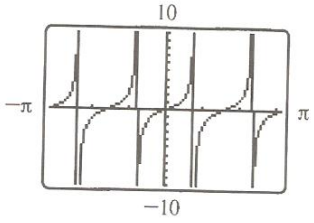
**5.** (a) 45° (b) 60° (c) 30° (d) 240°

**7.** (a) $\pi$ (b) $\frac{3\pi}{2}$ (c) $\frac{2\pi}{3}$ (d) $\frac{\pi}{6}$

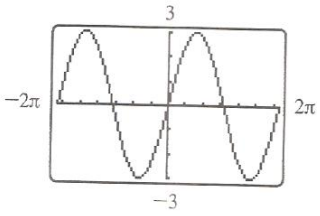
**9.**



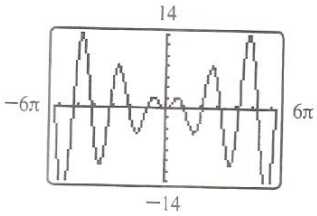

**11.**



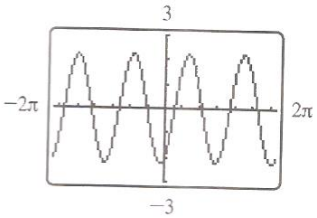

**13.**



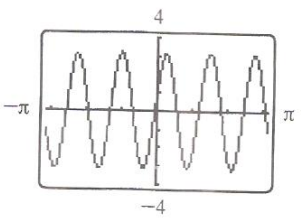

**15.**



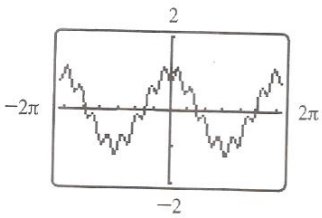

**17.**



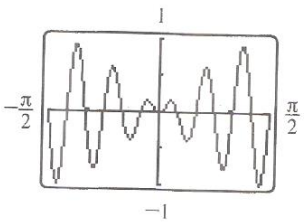

**19.**



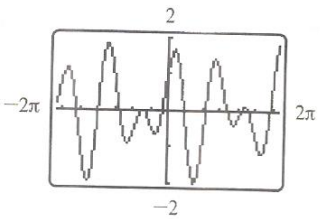

**21.**




**23.**




**25.**



**27.** Dominio: todos los números reales excepto los múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$. Recorrido: todos los números reales.

**29.** Dominio: todos los números reales excepto los múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$. Recorrido: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

**31.** $A = 3$, período $= \pi$, frecuencia $= \frac{1}{\pi}$

**33.** $A = 5$, período $= \frac{2\pi}{3}$, $f = \frac{3}{2\pi}$

**35.** $A = 3$, período $= \pi$, $f = \frac{1}{\pi}$

**37.** $A = 4$, período $= 2\pi$, $f = \frac{1}{2\pi}$

**43.** $\beta \approx 0{,}6435$ **45.** no **47.** sí, $2\pi$

**49.** $-\frac{\pi}{3} + 2n\pi;\ \frac{\pi}{3} + 2n\pi$ **51.** $\pi + 2n\pi;\ \frac{\pi}{2} + n\pi$

**53.** $\frac{\pi}{2} + 2n\pi$ **55.** $-\frac{\pi}{2} + 2n\pi;\ \frac{\pi}{2} + 2n\pi;\ 2n\pi$

**57.** $\frac{\sqrt{8}}{3}$ **59.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **61.** 3; $x = 0$, $x \approx 1{,}109$, $x \approx 3{,}698$

**63.** 2; $x \approx -1{,}455$, $x \approx 1{,}455$ **65.** 1; $x \approx 1{,}249$

**67.** 2; $x = 0$, $x \approx 0{,}877$ **69.** 2 tg $20° \approx 0{,}73$ millas

**71.** $f = \frac{30}{\pi}, \frac{170}{\sqrt{2}} \approx 120{,}2$ voltios **73.** 24.000 euros al año

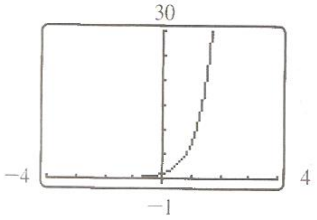
## Ejercicios de la sección 0.6

**5.** $\frac{1}{8}$ **7.** $\sqrt{3}$ **9.** $\sqrt[3]{25}$ **11.** $\frac{1}{\sqrt[3]{16}}$ **13.** $x^{-2}$

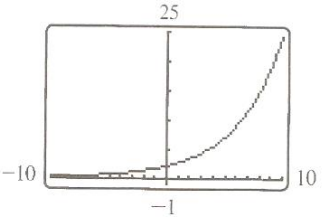
**15.** $x^{1/2}$ **17.** $2x^{-3}$ **19.** $\frac{1}{2}x^{-1/2}$ **21.** 8 **23.** 2

**25.** 7,389 **27.** 1,213 **29.** 4,415 **31.** 9,900

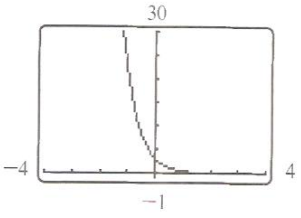
**33.**



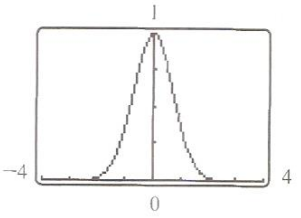

**35.**



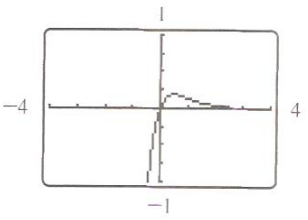

**37.**



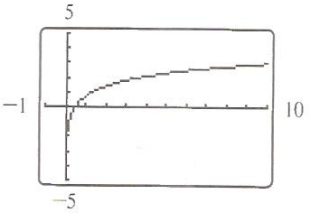

**39.**



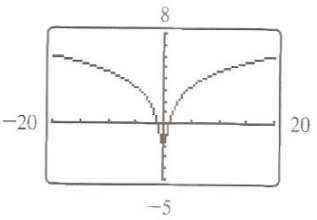

**41.**



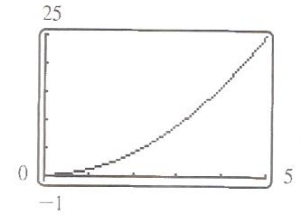

**43.**



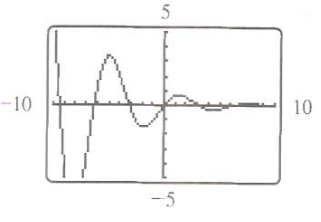

**45.**




**47.**




**49.**



**51.** $\frac{1}{2}\ln 2$ **53.** $-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}$ **55.** $\frac{1}{2}e^4$ 57. $\frac{1}{4}e^{7/2}$

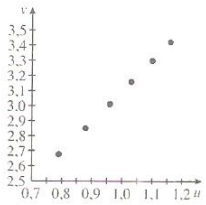
**59.** 2 **61.** (a) 2 (b) 3 (c) $-3$

**63.** (a) 1,771 (b) 2,953 (c) $-2,893$ **65.** $\ln\frac{3}{4}$

**67.** 0 **69.** $\ln 12$ **71.** $2e^{(1/2\ln 3)x}$ **73.** $4e^{(1/2\ln 1/2)x}$

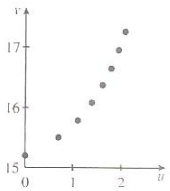
**75.** $-2e^{(\ln 3/2)x}$ **77.** 0,651 **79.** $1-e^{-1}\approx 0,632$

**81.**




$m = 2$, $b \approx 1,0986$,
$a = e^b = 3$

**83.**




no, exponencial

**85.** $10^{-7}$, $10^{-8}$, $10^{-9}$, $\frac{1}{10}$

**87.** $10^{10,4}$, $10^{11,9}$, $10^{13,4}$, $10^{1,5}\approx 31,6$

**89.** $10^{-4}$, $10^{-3}$, $10^{-2}$, 10 **91.** $x = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{k}$

## Ejercicios de la sección 0.7

**5.** $(f\circ g)(x) = \sqrt{x-3}+1,\ x\geq 3$
$(g\circ f)(x) = \sqrt{x-2},\ x\geq 2$

**7.** $(f\circ g)(x) = x,\ x>0$
$(g\circ f)(x) = x$, todos los reales

**9.** $(f\circ g)(x) = \text{sen}^2 x + 1$, todos los reales
$(g\circ f)(x) = \text{sen}(x^2+1)$, todos los reales

**11.** respuesta posible: $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^4 + 1$

**13.** respuesta posible: $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = x^2 + 1$

**15.** respuesta posible: $f(x) = x^2 + 3$, $g(x) = 4x + 1$

**17.** respuesta posible: $f(x) = x^3$, $g(x) = \text{sen } x$

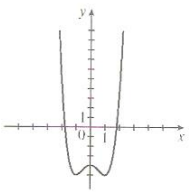
**19.** respuesta posible: $f(x) = \cos x$, $g(x) = 4x$

**21.** respuesta posible: $f(x) = e^x$, $g(x) = x^2 + 1$

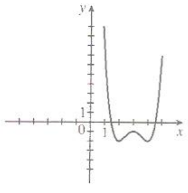
**23.** respuesta posible: $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = e^x + 1$

**25.** respuesta posible: $f(x) = \ln x$, $g(x) = 3x - 5$

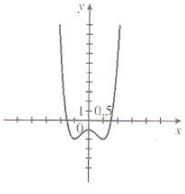
**27.**



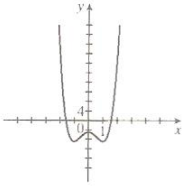

**29.**



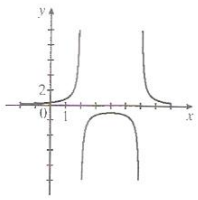

**31.**



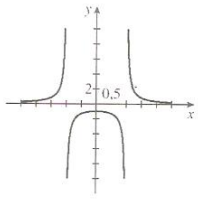

**33.**



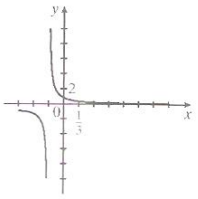

**35.**



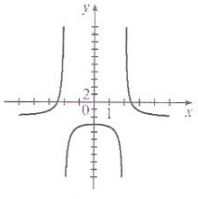

**37.**




**39.**




**41.**




**43.** $y = (x+1)^2$, una unidad hacia la izquierda

**45.** $y = (x+1)^2 + 3$, una a la izquierda, tres hacia arriba

**47.** $y = 2[(x+1)^2 + 1]$, una a la izquierda, una arriba y escala vertical doble

**49.** imagen reflejada en el eje $x$, escala vertical doble

**51.** imagen reflejada en el eje $x$, escala vertical triple y dos unidades hacia arriba

**53.** imagen reflejada en el eje $y$

**55.** imagen reflejada en el eje $y$, una unidad hacia arriba

**57.** imagen reflejada en el eje $x$, escala vertical multiplicada por $|c|$

**59.** las oscilaciones se amortiguan **63.** tiende a 0

**65.** 0,739085

## Ejercicios de la sección 0.8

**3.** 2 **5.** 0 **7.** 0 **9.** $\frac{1}{2}$ **11.** 1 **13.** 1

**15.** 4,6267, 4,6417, 4,64678 **17.** 1,90626, 1,90913, 1,91010

**19.** 3,16732, 3,16770, 3,16784

**21.** 9,15298, 9,25344, 9,29357 **23.** $1, \frac{4}{3}, \frac{7}{5}, \frac{10}{7}; \frac{3}{2}$

**25.** $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}; 1$ **27.** $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{5}, \frac{5}{10}; 0$ **29.** $0, \frac{2}{5}, \frac{8}{8}, \frac{18}{13}; 2$

**31.** $2, 1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}; 0$ **33.** $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}; 1$

**35.** $e^{-1}, e^{-2}, e^{-3}, e^{-4}; 0$ **37.** $\cos(1), \cos\left(\frac{1}{2}\right), \cos\left(\frac{1}{3}\right), \cos\left(\frac{1}{4}\right); 1$

**39.** $0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{2}{\sqrt{5}}, \dfrac{3}{\sqrt{10}}; 1$ **41.** $3, 4, 4\frac{1}{9}, 4\frac{1}{8}; 4$

**43.** $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

## Ejercicios de repaso del capítulo 0

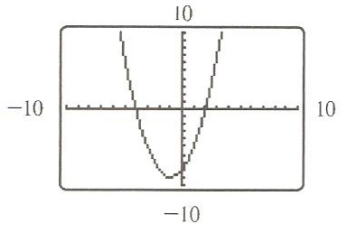
**1.** $x > 1$ **3.** $x < -2$ o $x > 4$ **5.** $-1 < x < 2$

**7.** $\sqrt{20}$ **9.** $-2$ **11.** paralelas **13.** no

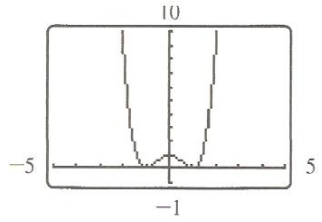
**15.** $y = \frac{1}{2}(x-1) + 1$, $y = \frac{5}{2}$ **17.** $y = -\frac{1}{3}(x+1) - 1$

**19.** sí **21.** $-2 \leq x \leq 2$

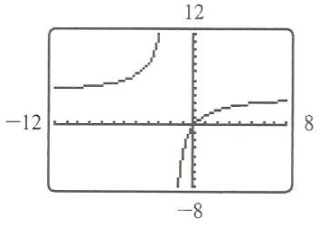
**23.**



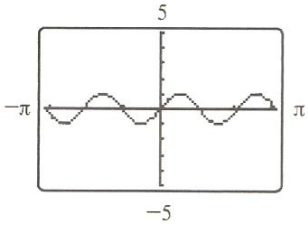

**25.**



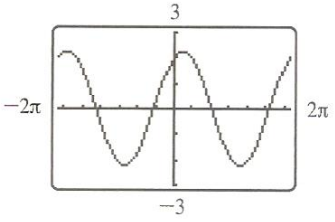

**27.**



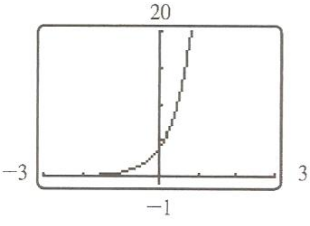

**29.**



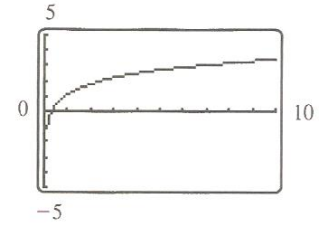

**31.**




**33.**




**35.**




**37.** $x = -4, x = 2, y = -8$

**39.** vertical $x = -2$, horizontal $y = 4$ **41.** $-2, 5$

**43.** $1, 1 + \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3}$ **45.** 3. **47.** sí

**49.** $50 \text{ tg}34° = 33{,}7$ pies **51.** (a) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (b) $\frac{1}{9}$

**53.** $\ln 2$ **55.** $\frac{1}{2} \ln \frac{8}{3}$

**57.** $(f \circ g)(x) = x - 1, x \geq 1$

$(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 - 1}, x \leq -1 \text{ o } x \geq 1$

**59.** $f(x) = e^x, g(x) = 3x^2 + 2$

**61.** $(x - 2)^2 - 3$, dos unidades a la derecha y tres hacia abajo

**63.** 2 **65.** (a) 1,05799 (b) 1,05806

**67.** $3, \frac{1}{2}, \frac{3}{13}, \frac{3}{22}; 0$

## CAPÍTULO 1

### Ejercicios de la sección 1.1

**5.** (a) $-2$ (b) 2 (c) no existe (d) 1 (e) $\frac{1}{2}$ (f) $-1$ (g) 3 (h) no existe (i) 1,5 (j) 2,5

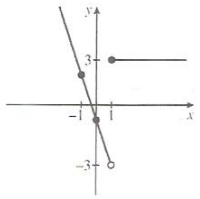
**7.** 2,2247, 2,0488, 2,0049, 2,0004 → 2;
1,7071, 1,9486, 1,9949, 1,9994 → 2

**9.** $-2$ **11.** $\frac{1}{3}$ **13.** 1 **15.** 1 **17.** no; salto

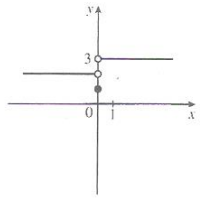
**19.** sí **21.** no; asíntota vertical **23.** sí

**25.** no; asíntota vertical **27.** no existe

**29.**




**31.**




**33.** El primer argumento no depende de los valores específicos de $x$

**35.** 2,7182818 **37.** 0

### Ejercicios de la sección 1.2

**5.** 1 **7.** $\sqrt{7}$ **9.** $-\frac{3}{8}$ **11.** 5 **13.** $\frac{3}{4}$

**15.** $\frac{3}{4}$ **17.** 1 **19.** 0 **21.** 2 **23.** 2 **25.** 9

**27.** 4 **29.** 1 **31.** no existe

**33.** $0, f(x) = -x^2, h(x) = x^2$ **35.** $f(x) = 0, h(x) = \sqrt{x}$

**37.** no existe–no definida en $x > 4$

**39.** no existe (véase ejercicio 37) **41.** $\sqrt{\frac{1}{2}}$ **43.** $h(a)$

**45.** (a) $-1$ (b) $-2$ **47.** 4 **49.** 0 **51.** $m = \frac{1}{2}$

**53.** 2,7182818 **55.** 1 **61.** $f(x) = \frac{1}{x}, g(x) = -\frac{1}{x}$

**63.** sí **65.** 0, no existe

**67.** para $2 \leq x < 3$, $[x] = 2$ y para $3 \leq x < 4$, $[x] = 3$, así que $\lim_{x \to 3^-} [x] \neq \lim_{x \to 3^+} [x]$.

## Ejercicios de la sección 1.3

**5.** $x = -2, x = 2$ **7.** $x = -2, x = 1, x = 4$

**9.** $x = -2, x = 2, x = 4$

**11.** $f(1)$ no está definido y $\lim_{x \to 1} f(x)$ no existe

**13.** $f(0)$ no está definido y $\lim_{x \to 0} f(x)$ no existe

**15.** $\lim_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$

**17.** $x = 1$ (evitable), $g(x) = \dfrac{1}{x + 1}$; $x = -1$ (no evitable)

**19.** no hay **21.** $\dfrac{n\pi}{2}$ para todo entero impar $n$

**23.** $x = n\pi$ para todo entero $n \neq 0$, $x = 0$ es evitable;

$$g(x) = \begin{cases} \cos x, & x = 0 \\ \dfrac{x \cos x}{\operatorname{sen} x}, & x \neq 0 \end{cases}$$

**25.** $x = 1$ **27.** $x = 1$ **29.** $[-3, \infty)$

**31.** $(-\infty, \infty)$ **33.** $(-\infty, \infty)$ **35.** $(-1, \infty)$

**37.** $-700$

**39.** (a) $34.573{,}5 + 0{,}36(x - 128.100)$

(b) $88.699{,}5 + 0{,}396(x - 278.450)$

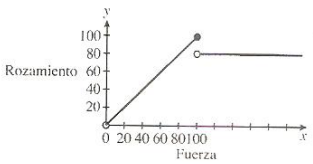
**41.** $f(2) < 0, f(3) > 0, \left[2\frac{20}{32}, 2\frac{21}{32}\right]$

**43.** $f(-1) > 0, f(0) < 0, \left[-\frac{18}{32}, -\frac{17}{32}\right]$

**45.** $f(0) > 0, f(1) < 0, \left[\frac{23}{32}, \frac{24}{32}\right]$ **47.** sí **49.** no

**51.** Ejercicio 49 es **53.** $g(T) = 100 - 25(T - 30)$

**55.**



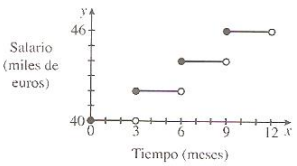

$x = 100$
fuerza que mueve la caja

**57.** $L(t)$ = distancia a la casa el lunes en el instante $t$

$M(t)$ = distancia a la casa el martes en el instante $t$

$L(1{:}59 \text{ PM}) - M(1{:}59 \text{ PM}) > 0$ y $L(7{:}13 \text{ AM}) - M(7{:}13 \text{ AM}) < 0$

**59.** Da un salto cada tres meses, $f(t) = s(t)$ cuando $t$ es múltiplo de 3




**61.** Si $f(d) < 0$, entonces $f(x) = 0$ para algún $x$ entre $c$ y $d$.

## Ejercicios de la sección 1.4

**5.** $\infty$ **7.** no existe **9.** $-\infty$ **11.** $\infty$

**13.** $\infty$ **15.** $-\infty$ **17.** $\infty$ **19.** 1 **21.** $\frac{1}{3}$

**23.** $\infty$ **25.** 1 **27.** $\frac{3}{4}$ **29.** 0 **31.** $\infty$

**33.** no existe **35.** 0 **37.** $\infty$ **39.** 0

**41.** $y = -1, y = 1$ **43.** $x = -2, x = 2, y = 0$

**45.** $x = -2, x = 2, y = -x$ **47.** $y = x$

**49.** $y = 2x + 2$ **51.** $y = 0$ cuando $x \to \infty$. La cruza infinitas veces

**55.** 30 mm, 300 mm

**57.** sin luz, 80/9 = 8,888...; con infinita intensidad luminosa, 12.

**59.** $f(x) = \dfrac{80x^{-0,3} + 60}{10x^{-0,3} + 30}$ **61.** $\infty, c$

**63.** $t = 4{,}6$ para A, $t = 17{,}8$ para B **67.** $g(x) = \operatorname{sen} x, h(x) = x$

**69.** 2,7183 **71.** 0,3679 **73.** 1

## Ejercicios de la sección 1.5

**5.** $\sqrt{0{,}1} \approx 0{,}32$ **7.** 0,45 **9.** 0,39 **11.** 0,02

**13.** $\dfrac{\varepsilon}{3}$ **15.** $\dfrac{\varepsilon}{3}$ **17.** $\dfrac{\varepsilon}{4}$ **19.** $2\varepsilon$ **21.** $\text{mín}\left\{1, \dfrac{\varepsilon}{3}\right\}$

**23.** $\text{mín}\left\{1, \dfrac{\varepsilon}{5}\right\}$ **25.** $\dfrac{\varepsilon}{|m|}$, no **29.** 0,02 **31.** 0,0095

**33.** 0,0001 **35.** 12 **37.** $-10$ **39.** 1,15

**41.** $M = \sqrt[3]{\dfrac{2}{\varepsilon}}$ **43.** $M = \sqrt[k]{\dfrac{1}{\varepsilon}}$

**45.** $N = -\sqrt{\dfrac{1}{\varepsilon} - 2}$, para $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$

**47.** $\delta = \sqrt[4]{-\dfrac{2}{N}}$ **49.** $\delta = \dfrac{2}{\sqrt{M}}$ **51.** 1 **53.** 1

**55.** $\text{mín}\left\{1, \dfrac{\varepsilon}{10}\right\}$

## Ejercicios de la sección 1.6

**3.** $\frac{1}{4}$; $\dfrac{x}{\sqrt{4x^2 + 1} + 2x}$ **5.** 1; $\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x + 4} + \sqrt{x + 2}}$

**7.** 1; $\dfrac{2x}{\sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{x^2 + 2}}$ **9.** $\frac{1}{6}$; $\dfrac{\operatorname{sen}^2 2x}{12x^2(1 + \cos 2x)}$

**11.** 3, no existe

**13.** $f(x) = 0, g(x) = 0{,}0016, -0{,}0159, -0{,}1586, -0{,}9998$ **15.** 20, 0

## Ejercicios de repaso del capítulo 1

**1.** no existe **3.** 7,39 (exacto: $e^2$)

**5.** (a) 1 (b) $-2$ (c) no existe (d) 0

**7.** $x = -1, x = 1$ **9.** $\frac{1}{4}$ **11.** no existe

**13.** 0 **15.** no existe **17.** $\sqrt{2}$ **19.** $\infty$

**21.** $\frac{1}{3}$ **23.** 0 **25.** $\infty$ **27.** 0

**31.** $x = -3, x = 1$ (evitable) **33.** $x = 2$

**35.** $(-\infty, -2) \cup (-2, 3) \cup (3, \infty)$ **37.** $(-\infty, \infty)$

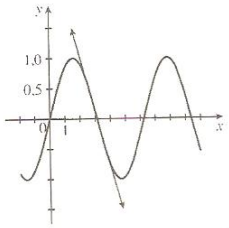
**39.** $x = 1, x = 2, y = 0$ **41.** $x = -1, x = 1, y = 1$

**43.** 0,4 **45.** $\dfrac{\varepsilon}{2}$ **47.** 3

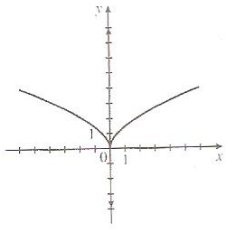
## CAPÍTULO 2

### Ejercicios de la sección 2.1

**5.**




**7.**

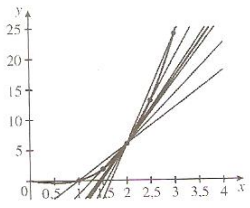



**9.** $-1$ **11.** C, B, A, D

**13.** (a) 6 (b) 18 (c) 8,25 (d) 14,25 (e) 10,41 (f) 11,61 (g) 11

**15.** (a) $-1{,}19$ (b) $-0{,}26$ (c) $-0{,}05$ (d) 3,3 (e) 2,4 (f) 3,5 (g) 3

**17.**




**21.** $y = 2(x-1) - 1$ **23.** $y = -7(x+2) + 10$

**25.** $y = -\frac{1}{2}(x-1) + 1$ **27.** $y = \frac{1}{2}(x+2) + 1$

**29.** no; punto anguloso **31.** sí; 0

**33.** no; discontinuidad de salto

**35.** (a) 32 (b) 48 (c) 62,4 (d) 63,84 (e) 64

**37.** (a) 2,236 (b) 1,472 (c) 1,351 (d) 1,343 (e) 1,342

**39.** $-32$ **41.** $\frac{1}{8}$

**43.** aproximadamente 1,75 horas; 1,5 horas; 4 horas; en reposo

**47.** 15 rad/s **51.** 0,359 millones al año **55.** sí

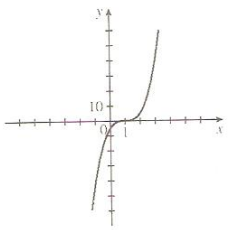
### Ejercicios de la sección 2.2

**5.** 3 **7.** $\frac{3}{4}$ **9.** 2 **11.** 3 **13.** $6x$

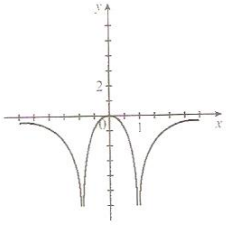
**15.** $\dfrac{-3}{(x+1)^2}$ **17.** $\dfrac{3}{2\sqrt{3x+1}}$ **19.** $3x^2 + 2$ **21.** $c$

**23.** a **25.** b

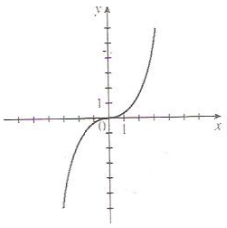
**27**




**29.**




**31.**




**33.** $x = -3, x = -1, x = 3$ **35.** 5 **37.** 10 **41.** 1

**43.** $D_+f(0) = 3, D_-f(0) = 2$ **45.** $D_-f(0) \neq g'(0)$.

**51.** $f(x) = -1 - x^2$ **53.** metros por segundo

**55.** unidades por euro **57.** 0,016 s; 0,008 s

### Ejercicios de la sección 2.3

**3.** $3x^2 - 2$ **5.** $6x$ **7.** 0 **9.** $9t^2 - \dfrac{1}{\sqrt{t}}$

**11.** $-\dfrac{3}{x^2} - 8$ **13.** $-5x^{-3/2} - 2$

**15.** $3s^{1/2} + s^{-4/3}$ **17.** $\frac{2}{3}x^{-2/3}$ **19.** $9x^2 - \frac{3}{2}x^{1/2}$

**21.** $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}x^{-2}$ **23.** $12x^2 + 6$ **25.** $30x^4 + \frac{1}{4}x^{-3/2}$

**27.** $-96t^{-5}$ **29.** 24 **31.** $-\frac{3}{8}x^{-3/2} - \frac{3}{8}x^{-5/2} - \frac{15}{8}x^{-7/2}$

**33.** $v(t) = -32t + 40, a(t) = -32$

**35.** $v(t) = \frac{1}{2}t^{-1/2} + 2, a(t) = -\frac{1}{4}t^{-3/2}$

**37.** $v(1) = 8$ (sube); $a(1) = -32$ (baja)

**39.** $v(2) = 16$ (sube); $a(2) = 20$ (crece)

**41.** $y = -x + 4$ **43.** $y = 4(x-2) + 2$

**45.** $x = -1$ (máx) $x = 1$ (mín) **47.** $x = 0$ (mínimo)

**49.** (a) $f(x)$ (b) $f''(x)$ (c) $f'(x)$

**51.** $(-1)^{(n-1)}\dfrac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{2^n}x^{-(2n-1)/2}$ **53.** $\frac{3}{2}x^2 + 2x - 2$

**57.** la segunda; no mucho **59.** $b > \dfrac{4}{9c^2}$ **61.** $x^4$

**63.** $\frac{1}{5}x^5$ **65.** $\frac{3}{2}x^2 - x$ **67.** $\frac{2}{3}x^{3/2}$

### Ejercicios de la sección 2.4

**3.** $2x(x^3 - 3x + 1) + (x^2 + 3)(3x^2 - 3)$

**5.** $3(x^3 - 2x^2 + x) + (3x^2 + 4)(3x^2 - 4x + 1)$

**7.** $\left(\dfrac{1}{2}x^{-1/2} + 3\right)\left(5x^2 - \dfrac{3}{x}\right) + (\sqrt{x} + 3x)(10x + 3x^{-2})$

**9.** $\dfrac{3(5x+1) - (3x-2)5}{(5x+1)^2} = \dfrac{13}{(5x+1)^2}$

**11.** $\dfrac{1(x^2+x+1) - (x-2)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \dfrac{-x^2+4x+3}{(x^2+x+1)^2}$

**13.** $\dfrac{(3 - 3x^{-1/2})(5x^2 - 2) - (3x - 6\sqrt{x})10x}{(5x^2-2)^2}$

**15.** $\dfrac{(2x-1)(x^2-5x+1)-(x^2-x-2)(2x-5)}{(x^2-5x+1)^2} =$

$= \dfrac{-4x^2+6x-11}{(x^2-5x+1)^2}$

**17.** $\frac{3}{2}x^{1/2}+\frac{3}{2}x^{-1/2}+x^{-3/2}$ **19.** $\frac{4}{3}x^{1/3}+3$

**21.** $2x\,\dfrac{x^3+3x^2}{x^2+2}+(x^2-1)\,\dfrac{(3x^2+6x)(x^2+2)-(x^3+3x^2)(2x)}{(x^2+2)^2}$

**23.** $f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x)$

**31.** $\frac{2}{3}x^{-1/3}(x^2-2)(x^3-x+1)+x^{2/3}(2x)(x^3-x+1)$

**33.** $(x^3+4x)(x^5-3x^2+1)+(x+1)(3x^2+4)(x^5-3x^2+1)+$
$+(x+1)(x^3+4x)(5x^4-6x)$

**35.** $P'(t)=0{,}03P(t)$; $3-4=-1$ **37.** 65.000 euros al año

**39.** $\dfrac{-14{,}11}{(m+0{,}05)^2}$

**41.** $F'''(x)=f'''(x)g(x)+3f''(x)g'(x)+3f'(x)g''(x)+f(x)g'''(x)$

**45.** $T_c=\dfrac{8a}{27Rb}$, $V_c=3nb$, $P_c=\dfrac{a}{27b^2}$; 647° K

## Ejercicios de la sección 2.5

**5.** $4\cos x-1$ **7.** $\sec^2 x+\operatorname{cosec} x\cot x$

**9.** $\cos x-x\operatorname{sen} x$ **11.** $2x^{-1/2}-2\cos x$

**13.** $\dfrac{x\cos x-\operatorname{sen} x}{x^2}$ **15.** $\sec^2 t$

**17.** $\dfrac{-x^2\operatorname{sen} x-(\cos x-1)2x}{x^4}$ **19.** $2\cos^2 x-2\operatorname{sen}^2 x$

**21.** $8x\operatorname{tg} x+4x^2\sec^2 x$ **23.** 0 **29.** $y=1$

**31.** $y=-x+\dfrac{\pi}{2}$ **33.** $-1$ **35.** $\dfrac{1}{\pi^2}$

**37.** $y(t)=\operatorname{sen} t$; $x(t)=3\cos t$, $y(t)=3\operatorname{sen} t$;
$x(t)=\cos 2t$, $y(t)=\operatorname{sen} 2t$; $x(t)=\cos \pi t$, $y(t)=\operatorname{sen} \pi t$;
$x(t)=\cos t$, $y=-\operatorname{sen} t$;

$x(t)=\cos\left(t+\dfrac{\pi}{2}\right)$, $y(t)=\operatorname{sen}\left(t+\dfrac{\pi}{2}\right)$

**39.** $4\cos t$ **41.** 4 amps, 2,62 amps **45.** $-\cos x$; $-\operatorname{sen} x$

**51.** (a) 3 (b) $\frac{1}{4}$ (c) 0 (d) 1

## Ejercicios de la sección 2.6

**5.** $4e^x-1$ **7.** $e^x+xe^x$ **9.** $1+(\ln 2)2^x$

**11.** $2e^{x+1}$ **13.** $\left(\ln\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^x$ **15.** $-(\ln 4)4^{-x+1}$

**17.** $\dfrac{xe^x-e^x}{x^2}$ **19.** $\dfrac{1}{x}$ **21.** $\dfrac{3}{x}$ **23.** $2e^{2x}$

**25.** $2xe^{-x}-x^2e^{-x}$ **27.** $\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

**29.** $y=3e(x-1)+3e$ **31.** $y=(3\ln 3)(x-1)+3$

**33.** $y=2e(x-1)+e$ **35.** $y=x-1$

**37.** $100\ln 3=109{,}86\%$ **39.** 100 %

**41.** $p(t)=200\cdot 3^t$; 110 %

**43.** (a) $e^{0{,}5}-1\to 5{,}1\%$ (b) 10,5 % (c) 22,1 % (d) 100 %

**45.** $-e^{-t}\cos t-e^{-t}\operatorname{sen} t$; vel. es 0 en $t=\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}, \ldots$

**47.** La velocidad máxima se alcanza en $t=\pi$, con el muelle en la posición $f(\pi)=-e^{-\pi}$.

**53.** $\ln 3\approx 1{,}098612$ **55.** $\frac{1}{4}=0{,}25$

**57.** $a=1$, $b=\frac{1}{2}$, $c=-\frac{1}{2}$

## Ejercicios de la sección 2.7

**5.** $6x^2(x^3-1)$ **7.** $-2e^{-2x}$ **9.** $x(x^2+4)^{-1/2}$

**11.** $3(3x^2+1)(x^3+x-1)^2$ **13.** $4x\cos(2x^2+3)$

**15.** $4\operatorname{sen}^3 x\cos x$ **17.** $2\operatorname{tg} x\sec^2 x$ **19.** $2xe^{x^2}$

**21.** $-\dfrac{1}{3x^2}e^{\frac{1}{3x}}$ **23.** $\dfrac{3x^2+3}{x^3+3x}$ **25.** $2x\operatorname{sen} 4x+4x^2\cos 4x$

**27.** $12\sec^3 4x\operatorname{tg} 4x$ **29.** $\dfrac{2x^3\cos x^2-2x\operatorname{sen} x^2}{x^4}$

**31.** $-3x^2\cos(\ln(\cos x^3))\operatorname{tg} x^3$ **33.** $x\cos x^2(\operatorname{sen} x^2)^{-1/2}$

**35.** $f'(x)=8[\ln(x^2+1)]^7\,\dfrac{1}{x^2+1}(2x)$

**37.** $\operatorname{sen}\dfrac{4x}{x^2+1}\left[\dfrac{4x^2-4}{(x^2+1)^2}\right]$

**39.** $\sec x$ **41.** $y=\frac{3}{5}(x-3)+5$

**43.** $e^{-8}(3\cos 6-4\operatorname{sen} 6)\approx 0{,}00134$

**45.** $-0{,}0353$ **47.** $-(2x+1)^{-3/2}$, $3(2x+1)^{-5/2}$,
$-15(2x+1)^{-7/2}$, $(-1)^{n+1}3\cdot 5\ldots(2n-3)(2x+1)^{-(2n-1)/2}$

**49.** $4e^{2x}$, $8e^{2x}$, $16e^{2x}$, $2^ne^{2x}$ **51.** $\frac{1}{3}(x^2+3)^3$

**53.** $-\frac{3}{2}\cos 2x$ **55.** máx. en $x=0$ **57.** $a^x\ln a$

**59.** $\pm 1$ **61.** $m\pm c$

## Ejercicios de la sección 2.8

**3.** $-\frac{1}{2}$ **5.** 0 **7.** $\dfrac{4-2xy^2}{3+2x^2y}$ **9.** $\dfrac{y}{16y\sqrt{xy}-x}$

**11.** $\dfrac{y-4y^2}{x+3+2y^3}$ **13.** $\dfrac{1-2xye^{x^2y}}{x^2e^{x^2y}-e^y}$

**15.** $\dfrac{16x\sqrt{x+y}-1}{1-2\sqrt{x+y}}$ **17.** $\dfrac{2y}{4ye^{4y}-1}$

**19.** $y=\frac{1}{2}(x-2)+1$ **21.** $y=\frac{1}{3}(x-2)+1$

**23.** $y=-(x-2)+1$ **25.** $y=-\frac{9}{2}(x-1)+3$

**27.** $-65$ rad/s **29.** 0,03 rad/s **31.** $6\pi$ mm$^2$/h

**33.** $24\sqrt{101}\approx 241$ mph

**35.** $-\frac{100}{\sqrt{5}}$, 44,7 mph es más preciso

**39.** −2 euros al año

**41.** $s'(20) = 1{,}47152$ miles de euros al año

**43.** 1 pie/s **49.** 2,088 para $x = 20$, 2,332 para $x = 10$

**51.** horizontal: (0, 2,2) vertical: $(\pm\sqrt{6}, 1), (\pm\sqrt{2}, -1)$

**53.** $\frac{-4}{y^3}$ **55.** $x = 1{,}9$, $y \approx 1 - 4(-0{,}1) = 1{,}4$
$x = 2{,}1$, $y \approx 1 - 4(0{,}1) = 0{,}6$

**57.** (4, 7)

**59.** $y' = \frac{2xy}{2 - x^2}$, asíntota vertical en $x = \pm\sqrt{2}$, asíntota horizontal en $y = 0$

### Ejercicios de la sección 2.9

**5.** discontinua en $x = 0$ **7.** discontinua en $x = \frac{\pi}{2}$

**9.** $c = 0$ **11.** $c = \frac{\sqrt{7} - 1}{3}$ **13.** $c = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\pi}\right)$

**17.** creciente **19.** decreciente **21.** creciente

**23.** creciente **25.** $3x^2 + 5 > 0$

**27.** $f'(x) = 4x^3 + 6x$ tiene un cero **29.** $3x^2 + a > 0$

**31.** $5x^4 + 3ax^2 + b > 0$ **35.** $\frac{1}{3}x^3 + c$ **37.** $\frac{1}{5}x^5 + c$

**39.** $-\frac{1}{x} + c$ **41.** $-\cos x + c$

**43.** $f(x) > 0$ en un intervalo $(b, 0)$ para algún $b < 0$.

**45.** discontinua en $x = 0$

### Ejercicios de repaso del capítulo 2

**1.** 0,8 **3.** 2 **5.** $\frac{1}{2}$ **7.** $3x^2 + 1$

**9.** $y = 2x - 2$ **11.** $y = 6x + 3$ **13.** $y = -3(x - 1) + 1$

**15.** $v(t) = -32t + 40$; $a(t) = -32$

**17.** $v(t) = 10e^{-2t}(4\cos 4t - 2\operatorname{sen} 4t)$;
$a(t) = -40e^{-2t}(4\cos 4t + 3\operatorname{sen} 4t)$

**19.** 8 pies/s subiendo, −24 pies/s bajando

**21.** (a) 0,3178 (b) 0,3338 (c) 0,3492 (d) 0,35

**23.** $4x^3 - 9x^2 + 2$ **25.** $-\frac{3}{2}x^{-3/2} - 10x^{-3}$

**27.** $2t(t + 2)^3 + 3t^2(t + 2)^2$ **29.** $\frac{(3x^2 - 1) - x(6x)}{(3x^2 - 1)^2}$

**31.** $2x\operatorname{sen} x + x^2\cos x$ **33.** $\frac{1}{2}x^{-1/2}\sec^2\sqrt{x}$

**35.** $\operatorname{cosec} t - t\operatorname{cosec} t\operatorname{cotg} t$ **37.** $-4xe^{-x^2}$ **39.** $\ln x^2 + 2$

**41.** $2\cos 4x(\operatorname{sen} 4x)^{-1/2}$ **43.** $2\left(\frac{x + 1}{x - 1}\right)\frac{-2}{(x - 1)^2}$

**45.** $e^{4t} + 4te^{4t}$ **49.** $12x^2 - 18x + 4$

**51.** $(12 + 8x)e^{2x}$ **53.** $2\sec^2 x\operatorname{tg} x$

**55.** $-3^{26}\operatorname{sen} 3x$ **57.** −2.400 euros al año

**59.** (a) $f(t) = \pm 4$ (b) $f(t) = 0$ (c) $f(t) = 0$

**61.** $\frac{2x - 2xy}{x^2 - 9y^2}$ **63.** $\frac{\sec^2 x + \frac{y}{(x + 1)^2}}{\frac{1}{(x + 1)} - 3}$

**65.** $\frac{170}{\sqrt{5}} \approx 76$ mph **67.** (a) (0, 1) y (4, −31) (b) no hay

**69.** (a) (0, 0) (b) no hay **71.** $3x^2 + 7 > 0$ **73.** $c = 1$

**75.** $x^3 - \operatorname{sen} x + c$

## CAPÍTULO 3

### Ejercicios de la sección 3.1

**5.** $1 + \frac{1}{2}(x - 1)$ **7.** $3 + \frac{1}{3}x$ **9.** $3x$ **11.** $1 + 2x$

**13.** 0,01 y 0,0100003; 0,1 y 0,1003; 1 y 1,557

**15.** 2,0025 y 2,002498; 2,025 y 2,0248; 2,25 y 2,2361

**17.** $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\pi}{3}\right)$ **19.** $2 + \frac{1}{32}(0{,}04) = 2{,}00125$

**21.** $2 + \frac{1}{32}(0{,}16) = 2{,}005$

**23.** 0,00000117; 0,00000467; 0,0000186

**25.** $-0{,}307 < x < 0{,}307$ **27.** (a) 16,4 gal (b) 12,8 gal

**29.** (a) 133,6 (b) 138,4 **31.** $\frac{1}{4}$ **33.** −6 **35.** 1

**37.** indefinido **39.** 0 **41.** indefinido **43.** 1

**45.** $\frac{1}{2}$ **51.** $c$

### Ejercicios de la sección 3.2

**7.** $\frac{2}{3}, \frac{79}{144}$, 0,53209 **9.** $\frac{1}{2}, \frac{5}{8}$, 0,61803

**11.** −4,685780 **13.** 0,525261 **15.** 0,739085

**17.** −0,636733, 1,409624 **19.** −0,567143

**21.** $f'(0) = 0$; −0,3454, 0,4362, 1,6591

**23.** $f'(0) = 0$; no hay raíces

**25.** $f'(-1)$ no existe; 0,1339, 1,8660

**29.** 3,316625 **31.** 2,223980 **33.** 2,213364

**35.** 2,059133 **39.** 0,6407

**41.** $P(1 - 2x/R)$; 104.500 pies

**43.** $L \approx 20{,}19$;
$y = 4{,}493 - 4{,}493x - 4{,}493\cos 4{,}493x + \operatorname{sen} 4{,}493x$

### Ejercicios de la sección 3.3

**5.** $-\frac{5}{2}$, mínimo local

**7.** −1, máximo local; 1, mínimo local

**9.** 1, ni uno ni otro **11.** 0, ni uno ni otro; $\frac{9}{4}$, mínimo local

**13.** 0, ni uno ni otro; $\frac{16}{9}$, mínimo local

**15.** 2, mínimo local; $-\frac{2}{3}$, máximo local

**17.** $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$, máximos locales; $\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$, mínimos locales

**19.** no hay **21.** $-1$, mínimo local; 1, máximo local

**23.** 0, mínimo **25.** $-2$, 1, mínimo local

**27.** $-\frac{2}{3}$, mínimo local; $-1$, ni uno ni otro

**29.** 0, máximo

**31.** $\sqrt{\frac{3\pi}{2}}$, mínimo local; $\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{5\pi}{2}}$, máximos locales

**33.** máx $= 3$ en $x = 2$, mín $= -1$ en $x = 1$

**35.** máx $= 11$ en $x = -3$, mín $= -14$ en $x = -2$

**37.** máx $= \sqrt[3]{16}$ en $x = -4$, mín $= \sqrt[3]{4}$ en $x = -2$

**39.** máx $= \sqrt{2}$ en $x = \frac{\pi}{4}$, mín $= -\sqrt{2}$ en $x = \frac{5\pi}{4}$

**41.** máx $= 4{,}8197$ en $x = 2{,}0287$, mín $= -1{,}8144$ en $x = 4{,}9131$

**43.** (a) mínimo absoluto en $(-1, -3)$;
máximo absoluto en $(0{,}3660, 1{,}3481)$

(b) mínimo absoluto en $(-1{,}3660, -3{,}8481)$;
máximo absoluto en $(-3, 49)$

**45.** (a) mínimo absoluto en $(0{,}6371, -1{,}1305)$;
máximo absoluto en $(-1{,}2269, 2{,}7463)$

(b) mínimo absoluto en $(-2{,}805, -0{,}0747)$;
máximo absoluto en $(-5, 29{,}2549)$

**47.** (ej. 33) no hay máximo, mínimo $= -1$ en $x = 1$
(ej. 35) no hay máximo, mínimo $= -14$ en $x = -2$
(ej. 37) no hay extremos

**53.** $x = \sqrt{\frac{1}{3}}$ **55.** $x = \sqrt{\frac{1}{2}}$ **57.** $f(x) = \sec^2 x$

**59.** $x = -1{,}575$, arriba;
$x = 1{,}575$, abajo; más pendiente en $x = \pm\sqrt{\frac{6}{5}}$

**61.** $W'(t) = abe^{-be^{-t}}$; máximo $W' = ae^{-1}$ en $t = \ln b$

## Ejercicios de la sección 3.4

**5.** creciente: $x < -1$, $x > 1$; decreciente: $-1 < x < 1$

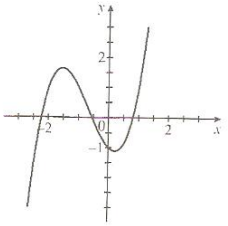
**7.** creciente: $-2 < x < 0$, $x > 2$; decreciente: $x < -2$, $0 < x < 2$

**9.** creciente: $x > -1$; decreciente: $x < -1$

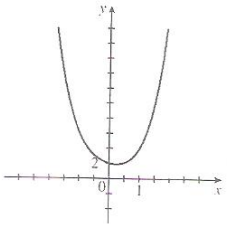
**11.** creciente: $-\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$, etc.;
decreciente: $\frac{\pi}{6} < x < \frac{3\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} < x < \frac{7\pi}{6}$, etc.

**13.** creciente: $x > 0$; decreciente: $x < 0$

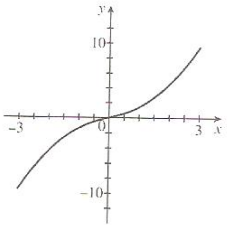
**15.** máx. local en $x = -\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{7}}{3}$; mín. local en $x = -\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{7}}{3}$



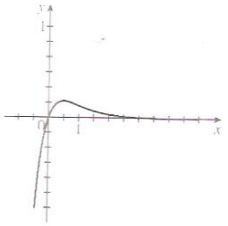
**17.** mín. en $x = 0{,}2367$



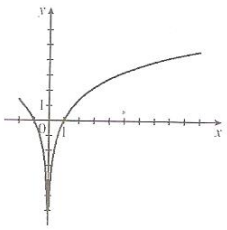
**19.** no hay extremos



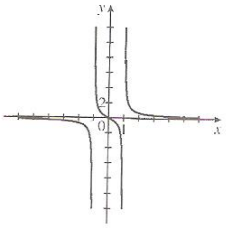
**21.** máx. en $x = \frac{1}{2}$



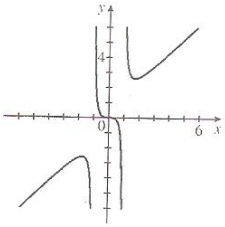
**23.** no hay extremos



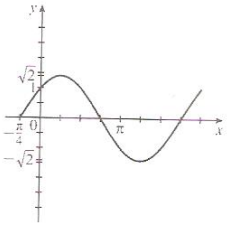
**25.** no hay extremos



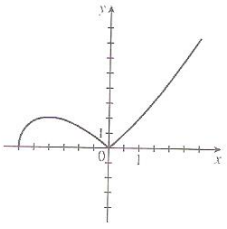
**27.** máximo local en $x = -\sqrt{3}$,
mínimo local en $x = \sqrt{3}$



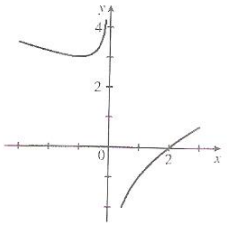
**29.** máximo en $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$,
mínimo en $x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$



**31.** máximo local en $x = -2$,
mínimo en $x = 0$



**33.** mínimo local en $x = -1$



**35.** máx. local: $x = -0{,}3689$; mín local: $x = 9{,}0356$

**37.** máx. local: $x = 0{,}9374$;
mín. local: $x = -0{,}9474$, $x = 11{,}2599$

**39.** máx. local: $x = -10{,}9079$, $x = 1{,}0084$;
mín. local: $x = -1{,}0084$, $x = 10{,}9079$

**41.** máx. local: $x = 0{,}2236$; mín. local: $x = -0{,}2236$

**51.** si $f(x) = 2\sqrt{x}$ y $g(x) = 3 - \dfrac{1}{x}$, $f(1) = g(1) = 2$

y para $x > 1$ $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} > \dfrac{1}{x^2} = g'(x)$

**53.** si $f(x) = e^x$ y $g(x) = x + 1$, $f(0) = g(0) = 1$

y para $x > 1$ $f'(x) = e^x > 1 = g'(x)$

**55.** $f(x) = 3 + e^{-x}$ no tiene ceros

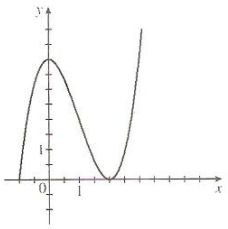
**57.** $s'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t+4}}$ = ritmo de crecimiento de la función de ventas

## Ejercicios de la sección 3.5

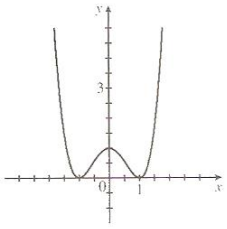
**3.** hacia arriba: $x < -\frac{1}{2}$, $x > \frac{1}{2}$; hacia abajo: $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$

**5.** hacia arriba: $x > 1$; hacia abajo: $x < 1$

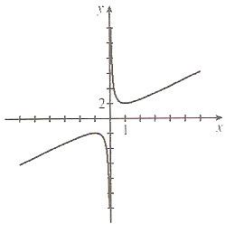
**7.** máx. local en $x = 0$, punto de inflexión en $x = 1$,
mín. local en $x = 2$



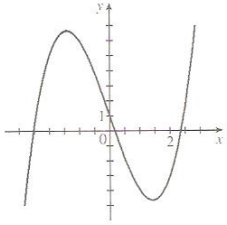

**9.** mín. local en $x = -1$ y en $x = 1$, máx local en $x = 0$,
puntos de inflexión en $x = -\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}$



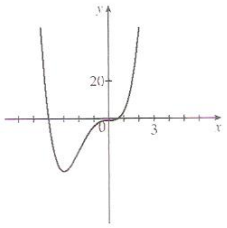

**11.** máx. local en $x = -1$,
mín. local en $x = 1$,
no hay puntos de inflexión



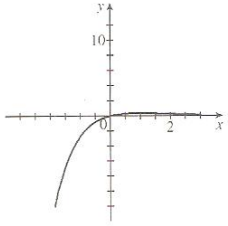

**13.** máx. local en $x = -\sqrt{2}$,
puntos de inflexión en
$x = 0$, mín. local en $x = \sqrt{2}$



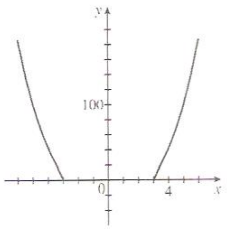

**15.** mín. en $x = -3$,
puntos de inflexión en
$x = -2$, $x = 0$



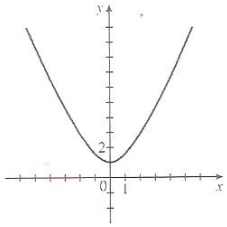

**17.** máx. en $x = 1$,
puntos de inflexión en
$x = 2$



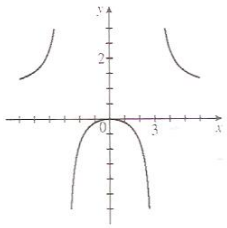

**19.** puntos de inflexión en
$x^2 = \frac{1}{4}(27 + \sqrt{297})$;
$x = \pm 3{,}325$



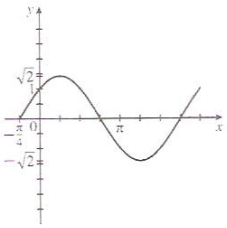

**21.** mín. en $x = 0$, no hay
puntos de inflexión



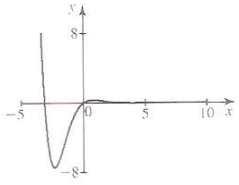

**23.** máx. local en $x = 0$



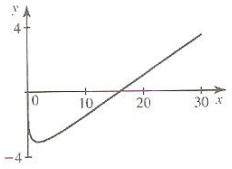

**25.** máx. en $x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n$, mín. en $x = \dfrac{5\pi}{4} + 2\pi n$,
puntos de inflexión en $x = \dfrac{3\pi}{4} + \pi n$ ($n$ entero)



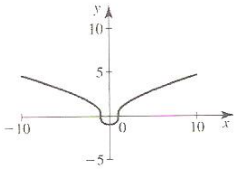

**27.** máx. locales en $\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n$; mín locales en $\dfrac{5\pi}{4} + 2\pi n$,
puntos de inflexión en $\dfrac{\pi}{2} + \pi n$ ($n$ entero)



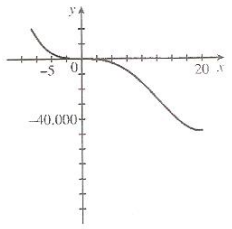
**29.** mín. local en $x = \frac{16}{9}$; puntos de inflexión en $x = 16$



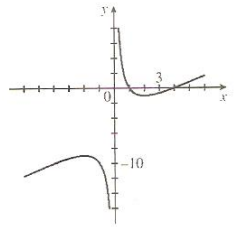

**31.** mínimo en $x = 0$; puntos de inflexión en $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$



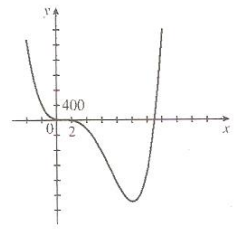

**33.** mín. local en $x = -0{,}1129$ y $x = 19{,}4993$,
máx. local en $x = 0{,}1135$, puntos de inflexión en $x = 0$, $x = 13$




**35.** máx. local en $x = -2$, mín. local en $x = 2$




**37.** mín. local en $x = 0{,}8952$ y $x = 9{,}9987$,
máx. local en $x = 1{,}106$, puntos de inflexión en $x = 1$, $x = 7$




**45.** mín. en $x = 0$

**47.** máx. local en $x = -1$, puntos de inflexión en $x = 0$,
mín. local en $x = 1$

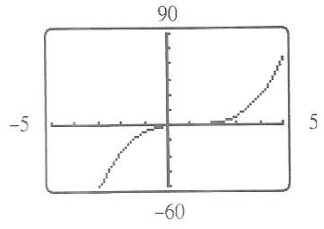
**49.** es necesario conocer $w'(0)$ **51.** $x = 30$ **53.** $x = 600$

**55.** mín. en $x = -\frac{3}{4}c$, segundo punto de inflexión en $x = -\frac{c}{2}$

**57.** $f(x) = -1 - x^2$ **59.** la recta tangente apunta más arriba del Sol

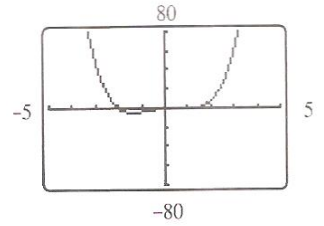
## Ejercicios de la sección 3.6

**5.** puntos de inflexión en $x = 1$



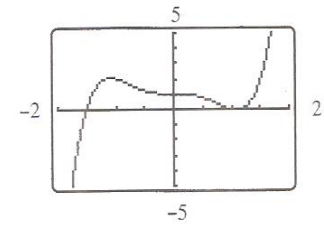

**7.** mín. local en $x = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $x = 1$

máx. local en $x = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$, puntos de inflexión en $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$

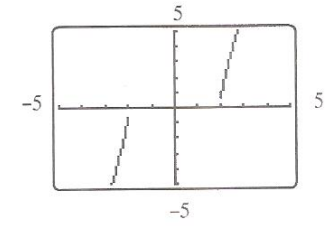



**9.** máx. local en $x = -\sqrt{\frac{6}{5}}$, mín. local en $x = \sqrt{\frac{6}{5}}$,

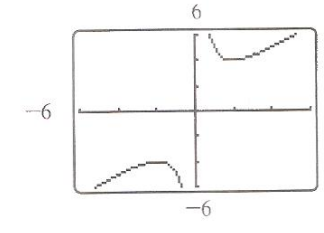
puntos de inflexión en $x = -\sqrt{\frac{3}{5}}$, $x = 0$, $x = \sqrt{\frac{3}{5}}$



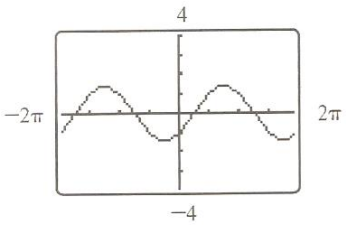

**11.** puntos de inflexión en $x = -\sqrt{6}$, $x = \sqrt{6}$



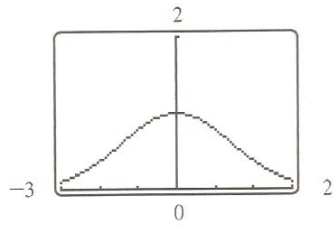

**13.** máx. local en $x = -2$, mín. local en $x = 2$



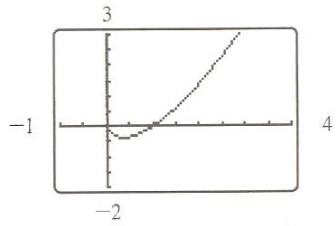
**15.** puntos de inflexión en $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$, máx. en $x = \frac{3\pi}{4} + 2n\pi$, mín. en $x = \frac{7\pi}{4} + 2n\pi$ ($n$ entero)



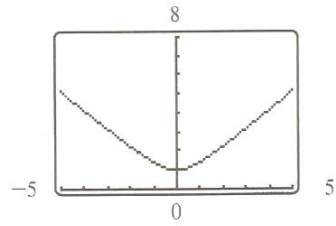

**17.** máx. en $x = 0$, puntos de inflexión en $x = -\sqrt{2}$ y $x = \sqrt{2}$



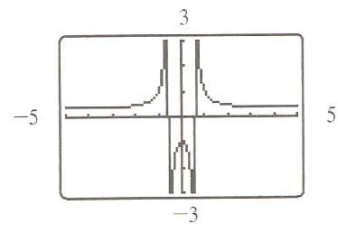

**19.** mín. en $x = e^{-1}$



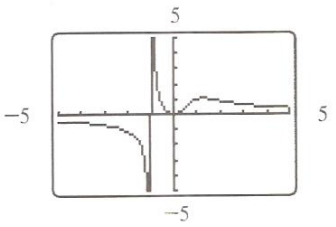

**21.** mín. en $x = 0$



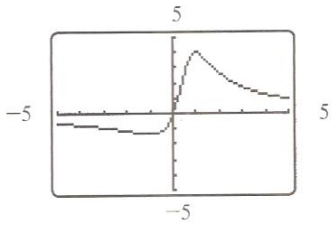

**23.** máx. local en $x = 0$, asíntotas verticales en $x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$, asíntota horizontal en $y = \frac{1}{3}$



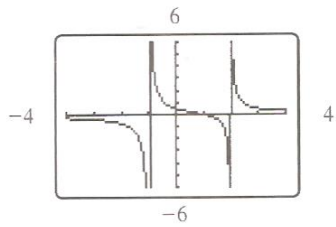

**25.** mín. local en $x = 0$, máx. local en $x = \sqrt[3]{2}$, puntos de inflexión en $x = 0{,}5264$, $x = 1{,}8995$, asíntota vertical en $x = -1$, asíntota horizontal en $y = 0$



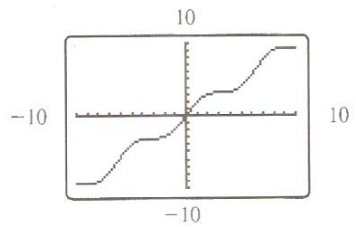

**27.** mín. local en $x = -1$, máx. local en $x = 1$, puntos de inflexión en $x = 1{,}879$, $x = 0{,}347$, $x = 1{,}532$ asíntota horizontal en $y = 0$



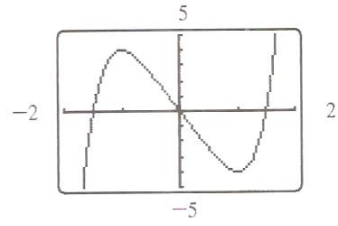

**29.** punto de inflexión en $x = 0{,}67252$, asíntota horizontal en $y = 0$, asíntotas verticales en $x = -1$ y $x = 2$



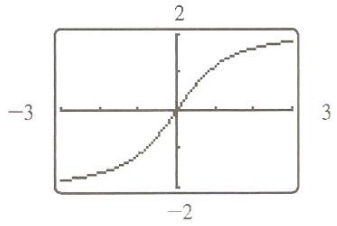

**31.** puntos de inflexión en $n\pi$



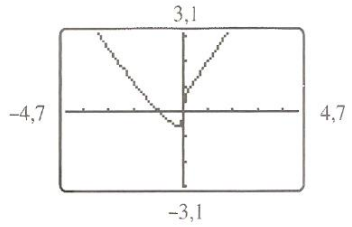

**33.** máx. local en $x = -1$, punto de inflexión en $x = 0$, mín. local en $x = 1$



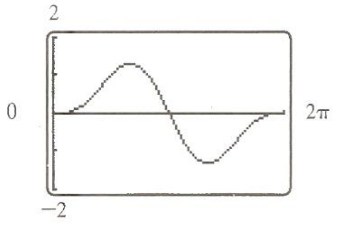
**35.** punto de inflexión en $x = 0$, asíntotas horizontales $y = -2$, $y = 2$



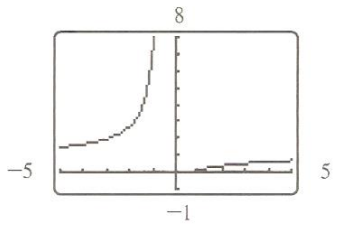

**37.** mín. en $x = -\frac{1}{6}$, puntos de inflexión en $x = 0$ y $x = \frac{2}{3}$



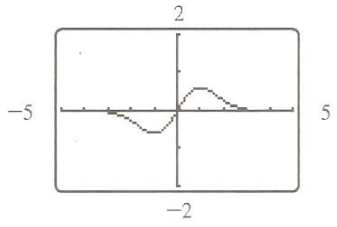

**39.** máx. en $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, mín. en $x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi n$,
puntos de inflexión en $x = n\pi$, $x = 1{,}318 + 2\pi n$,
y $x = -1{,}318 + 2\pi n$




**41.** punto de inflexión en $x = 1$, asíntota vertical en $x = 0$,
asíntota horizontal en $y = 1$




**43.** mín. en $x = -1$, máx. en $x = 1$,
puntos de inflexión en $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$, $x = 0$,
asíntota horizontal en $y = 0$




**45.** $c < 0$: 3 extremos, 2 puntos de inflexión;
$c \geq 0$: 1 extremo, 0 puntos de inflexión;
cuando $c \to -\infty$, la gráfica se hace más ancha y más baja;
cuando $c \to +\infty$, la gráfica se estrecha

**47.** puntos de inflexión en $x = \pm \frac{c}{\sqrt{3}}$; la gráfica se ensancha
cuando $c^2 \to \infty$; $y = 1$ para $c = 0$ (no definida en $x = 0$)

**49.** $|c|$ = frecuencia de oscilación

**51.** máx. en $x = \frac{1}{b}$; el tiempo más común de gestación;
la duración más común de la vida

**53.** no; no **55.** $y = 3x$

**57.** $y = x - 2$ **59.** $y = x$

**61.** $f(x) = \dfrac{3x^2}{(x-1)(x-2)}$

**63.** $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{(x-1)(x+1)}}$

## Ejercicios de la sección 3.7

**3.** $f(x) = x^2 + 1$ **5.** $30 \times 60$ pies; el perímetro es 120 pies

**7.** $20 \times 30$ pies **11.** $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2}\right)$ o $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2}\right)$

**13.** (0, 1) **17.** $1{,}2137 = \frac{8}{3} - \frac{\sqrt{19}}{3}$

**19.** $\frac{15}{7} \approx 2{,}143$ millas al este de la primera urbanización

**21.** 1,2529 millas al este del puente; 1,963 millones de euros

**23.** 1,894 millas al este del puente; 234.800 euros

**27.** $r = 1{,}1989$ pulgadas, $h = 4{,}7957$ pulgadas

**29.** $r = \frac{2}{3} r_0$, se contrae **31.** $x = R$ **33.** $2 \times 2$ pies

**35.** plantar 2 acres **37.** (a) 50° (b) 45° (c) 40°

**39.** 2,744 seg; $x = 150$; no; el lanzamiento tarda más tiempo

**41.** $x = 25$; el tiempo es igual si tarda en relanzarla 0,007 seg

## Ejercicios de la sección 3.8

**5.** $e^{-2t}(-8 \cos 3t + \operatorname{sen} 3t)$ amps

**7.** $Q(t) \to 4 \operatorname{sen} 3t$; transitorio $e^{-3t}(-3 \cos 2t - 2 \operatorname{sen} 2t)$;
permanente $12 \cos 3t$

**9.** $x(t) = 2$

**11.** si $0 < x(t) < 4$, entonces $x'(t) > 0$
y si $x(t) > 4$, entonces $x'(t) < 0$; $x(t) = 4$ es máximo

**13.** $r = cK$ **15.** 0; la misma **17.** 0; $a$; crece desde 0 hasta $a$

**19.** $4 - \cos x$; menos densa en los extremos

**21.** 4; homogénea **23.** a salvo **25.** en peligro

**27.** $3x^2 + 40x + 90$; 9.590 vs. 9.421

**29.** $3x^2 + 42x + 110$; 34.310 vs. 33.990

**31.** $x = 10$; el coste crece más rápidamente

**33.** $f'(t) = \left( \dfrac{96e^{-0,4t}}{(1 + 3e^{-0,4t})^2} \right) > 0$

**35.** 43; 4,49, aprox. 4,5 puntos; 3,017, aprox. 3 puntos

**37.** 23; 3,105 = porcentaje que ha oído el rumor en la tercera hora; 70 = porcentaje que acabará por oír el rumor

**39.** $f'(x) = \dfrac{-816x^{-1,4}}{(4x^{-0,4} + 15)^2} < 0$

**41.** $C'(100) = 42$, $\overline{C}(100) = 77$; $\overline{C}(101) = 76,65 < \overline{C}(100)$

**43.** mín. en $x = 600$; $C'(600) = \overline{C}(600) = 52$

**45.** $P'(x) = 0$ si $R'(x) = C'(x)$ 47. $f = \frac{1}{2}$, pH $\to \infty$

## Ejercicios de repaso del capítulo 3

**1.** $1 + 3x$ **3.** $2 + \frac{1}{12}(7,96 - 8) \approx 1,99666$

**5.** 0,198437 **7.** $f'(1) = 0$

**9.** (a) $x = -3, 1$

(b) crece: $x < -3, x > 1$; decrece: $-3 < x < 1$

(c) máx. local en $x = -3$, mín. local en $x = 1$

(d) hacia arriba: $x > -1$, hacia abajo: $x < -1$ (e) $x = -1$

**11.** (a) $x = 0, 3$

(b) crece: $x > 3$; decrece: $x < 3$

(c) mín. en $x = 3$

(d) hacia arriba: $x < 0, x > 2$; hacia abajo: $0 < x < 2$

(e) $x = 0, x = 2$

**13.** (a) $x = \frac{1}{4}$

(b) crece: $x < \frac{1}{4}$; decrece: $x > \frac{1}{4}$

(c) máx. local en $x = \frac{1}{4}$

(d) hacia arriba: $x > \frac{1}{2}$; hacia abajo: $x < \frac{1}{2}$ (e) $x = \frac{1}{2}$

**15.** (a) no hay

(b) crece: $x < -2$; decrece: $x > 2$

(c) no hay

(d) hacia arriba: $-\sqrt{6} < x < -2, x > \sqrt{6}$; hacia abajo: $x < -\sqrt{6}, 2 < x < \sqrt{6}$

(e) $x = -\sqrt{6}, x = \sqrt{6}$

**17.** (a) $x = -2, 2$

(b) crece: $-2 < x < 2$; decrece: $x < -2, x > 2$

(c) mín. en $x = -2$, máx. en $x = 2$

(d) hacia arriba: $-\sqrt{12} < x < 0, x > \sqrt{12}$; hacia abajo: $x < -\sqrt{12}, 0 < x < \sqrt{12}$

(e) $x = -\sqrt{12}, x = 0, x = \sqrt{12}$

**19.** mín. $= -5$ en $x = 1$, máx. $= 76$ en $x = 4$

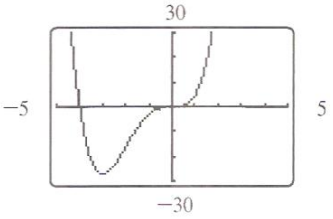
**21.** mín. $= 0$ en $x = 0$, máx. $= 3^{4/5}$ en $x = 3$

**23.** máx. local en $x = -\dfrac{4}{3} - \dfrac{\sqrt{10}}{3}$,

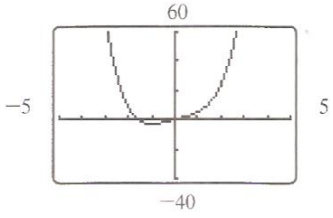
mín. local en $x = -\dfrac{4}{3} + \dfrac{\sqrt{10}}{3}$

**25.** máx. local en $x \approx 0,2553$, mín. local en $x \approx 0,8227$

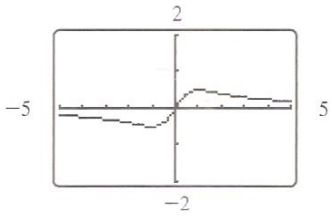
**29.** mín. en $x = -3$, puntos de inflexión en $x = -2$ y en $x = 0$



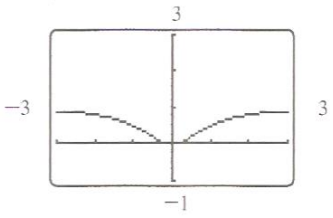

**31.** mín. en $x = -1$



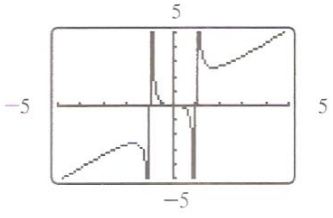

**33.** mín. en $x = -1$, máx. en $x = 1$, puntos de inflexión en $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$ y $x = \sqrt{3}$, asíntota horizontal en $y = 0$




**35.** mín. en $x = 0$, puntos de inflexión en $x = -\sqrt{\frac{1}{3}}$, $x = \sqrt{\frac{1}{3}}$ asíntota horizontal en $y = 1$




**37.** máx. local en $x = -\sqrt{3}$, mín. local en $x = \sqrt{3}$, punto de inflexión en $x = 0$, asíntotas verticales en $x = -1$ y $x = 1$



**39.** (0,8237, 1,3570) **41.** 1,136 millas al este del punto $A$

**43.** $r = 1{,}663$, $h = 3{,}325$

**45.** $e^{-3t}(2\cos 2t - 3\operatorname{sen} 2t)$ amps

**47.** $2x$, más densa a la derecha

**49.** $0{,}04x + 20$, 20,8 vs. 20,78

## CAPÍTULO 4

### Ejercicios de la sección 4.1

**5.** $\frac{3}{5}x^5 + c$ **7.** $\frac{3}{5}x^5 - \frac{3}{2}x^2 + c$ **9.** $2x^{3/2} + c$

**11.** $3x + \frac{1}{3}x^{-3} + c$ **13.** $\frac{3}{2}x^{2/3} - 9x^{1/3} + c$

**15.** $-2\cos x + \operatorname{sen} x + c$ **17.** $2\sec x + c$

**19.** $5\operatorname{tg} x + c$ **21.** $3e^x - 2x + c$

**23.** $3\operatorname{sen} x - \ln|x| + c$ **25.** $2\ln|x^2 + 4| + c$

**27.** $\frac{5}{2}x^2 + 3e^{-x} + c$ **29.** $-\frac{5}{2}\cos 2x + c$

**31.** $\frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{2}x^2 + c$ **33.** $\frac{3}{2}\sec 2x + c$

**35.** $\ln|e^x + 3| + c$ **37.** $x - 3e^{-x} + c$

**39.** $\frac{2}{5}x^{5/2} - \frac{16}{5}x^{5/4} + c$ **41.** N/A

**43.** $3x + 4x^{-1} + c$ **45.** N/A

**47.** $-\frac{1}{2}\cos 4x + c$

**49.** N/A **51.** $-x^{-1} - x + c$

**53.** $\ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + c$; $\frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{2}x\cos 2x + c$

**55.** $\frac{4}{3}x^3 - x + 2$ **57.** $3e^x + \frac{1}{2}x^2 + 1$

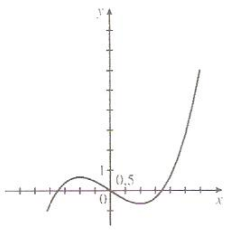
**59.** $6x^2 + 2x + 3$ **61.** $-3\operatorname{sen} x + \frac{1}{3}x^4 + c_1x + c_2$

**63.** $\frac{2}{3}x^3 - \ln|x| + \frac{c_1}{2}x^2 + c_2x + c_3$

**65.** $3t - 6t^2 + 3$ **67.** $-3\operatorname{sen} t + \frac{1}{2}t^2 + 3t + 4$

**69.** $a = \frac{1}{720}$, $s = \frac{2}{45}$ millas

**71.**




**73.** traslaciones de la respuesta al ejercicio 71

**75.** $t \approx 76$ seg; $v \approx -2.532$ pies/s

### Ejercicios de la sección 4.2

**3.** $\sum_{i=1}^{50} i^2 = 42.925$ **5.** $\sum_{i=1}^{10} \sqrt{i} \approx 22{,}47$

**7.** $3 + 12 + 27 + 48 + 75 + 108 = 273$

**9.** $12 + 20 + 30 + 42 + 56 = 160$

**11.** $-1 + 2 + 5 + 8 + 11 + 14 + 17 + 20 = 76$

**13.** $\sqrt{2} + 2 + \sqrt{3} + 3 + \sqrt{4} + 4 + \sqrt{5} + 5 =$
$= 16 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} \approx 21{,}38$

**15.** 7.385 **17.** −21.980 **19.** 323.400

**21.** −2.746.200 **23.** $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 3n$

**25.** $\frac{4n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}$

**27.** $\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} + \frac{n+1}{n} \to \frac{4}{3}$

**29.** $\frac{8}{3}\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} + \frac{n+1}{n} \to \frac{13}{3}$ **31.** $\frac{71}{5}$

**33.** $\frac{1.217}{5}$ **35.** 375 millas **37.** $\frac{74}{3}$ millas

**41.** 2.870 **43.** 171.707.655.800

### Ejercicios de la sección 4.3

**3.** 0,125, 0,375, 0.625, 0,875; 1,328125

**5.** 1,125, 1,375, 1,625, 1,875; 2,7265625

**7.** $\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}$; 2,05234

**9.** −0,75, −0,25, 0,25, 0,75; 7,375

**11.** 0,3320 **13.** 0,6875 **15.** 6,3343

**17.** 4,0991 **19.** 1,00004 **21.** 16,5

**23.** 17,9996 **25.** −2,02 **31.** $\frac{7}{3}$ **33.** $\frac{58}{3}$

**35.** izquierda: 1,81, derecha: 1,67

**37.** izquierda: 3,8, derecha: 4,32

**39.** izquierda: 1,18, derecha: 1,26

**41.** (a) menor (b) menor (c) mayor

**43.** (a) mayor (b) menor (c) menor

**45.** por ejemplo, $x = \frac{1}{\sqrt{6}}$ en $[0, 0{,}5]$ y $\frac{1}{\sqrt{2}}$ en $[0{,}5, 1]$

**49.** $a - \frac{1}{2}\Delta x + i\Delta x \quad i = 1, \cdots, n$

### Ejercicios de la sección 4.4

**5.** 24,75 **7.** 0,25 **9.** 0,77 **11.** 1 **13.** $\frac{8}{3}$

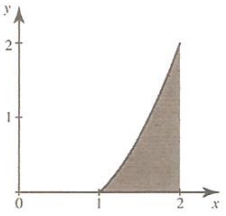
**15.** 6 **17.** $\int_{-2}^{2}(4 - x^2)\,dx$ **19.** $-\int_{-2}^{2}(x^2 - 4)\,dx$

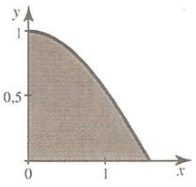
**21.** $\int_0^2 x^2\,dx$ **23.** $\int_0^{\pi}\operatorname{sen} x\,dx$

**25.** $\int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)\,dx - \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x)\,dx$

**27.** 90 **29.** 140,01 **31.** $\int_0^3 f(x)\,dx$

**33.** $\int_0^1 f(x)\,dx$

**35.** 


**37.** 


**39.** entre −1,23 y 0,72 **41.** entre 2 y 6

**43.** $\frac{2}{\sqrt{3}}$ **49.** positivo **51.** negativo

**53.** $x = 1$ no es un punto de evaluación

**55.** 13 **57.** 16,5 **59.** $t < 40$; $t < 40$; $t > 40$; $t = 40$

**61.** 6,93 **63.** 5 **65.** 3,33 **67.** 0,64

**69.** 9.000 lb; 360 pies/s

## Ejercicios de la sección 4.5

**5.** $-2$ **7.** 0 **9.** $\frac{88}{3}$ **11.** $\frac{12}{5}$ **13.** 2

**15.** $\sqrt{2} - 1$ **17.** 3 **19.** $e + e^{-1} - 2$ **21.** $\frac{3}{2}e^6 - \frac{21}{2}$

**23.** $e^2 + 4 - e^{-2}$ **25.** $3 - 3 \ln 4$ **27.** $\frac{16}{3}$

**29.** $\frac{77}{4} + \cos 3$ **31.** 2,96 **33.** $\frac{1}{2}e^2 + 2e - \frac{3}{2}$

**35.** 1,71 **37.** 0,772 **39.** $\sqrt{2} - 1$ **41.** $x^2 - 3x + 2$

**43.** $(e^{-x^4} + 1)2x$ **45.** $-\ln(x^2 + 1)$ **47.** $\frac{32}{3}$

**49.** $\frac{32}{3}$ **51.** $\frac{8}{3}$ **53.** 2 **55.** $y = 0$

**57.** $y = x - 2$

**59.** máx. local en $x = 1$, mín. local en $x = 2$

**61.** (a) $\frac{1}{x^2} > 0$ (b) $\frac{1}{x^2}$ es discontinua en $x = 0$

**63.** $40t + \cos t + 1$ **65.** $25\left(t + \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}\right)$

**67.** $2t^2 - \frac{1}{6}t^3 + 8t$ **69.** $12t^2 + e^{-t} + t - 1$

**71.** 8 rad/s; 24 pies/s; 3,2 rad **73.** 14,4 millones de barriles

**75.** 236,36 hp **77.** $\frac{10}{3}$ **79.** $\frac{1}{3}$ **81.** $\frac{2}{\pi}$

**83.** $\int_0^3 f(x)\,dx$, $\int_0^2 f(x)\,dx$, $\int_0^1 f(x)\,dx$

## Ejercicios de la sección 4.6

**5.** $\frac{2}{9}(x^3 + 2)^{3/2} + c$ **7.** $\frac{1}{2}(\sqrt{x} + 2)^4 + c$

**9.** $\frac{1}{10}(x^2 - 3)^5 + c$ **11.** $\frac{1}{4}(x^2 + x)^4 + c$

**13.** $\frac{2}{3}(\operatorname{sen} x + 1)^{3/2} + c$ **15.** $-2\sqrt{\cos x} + c$

**17.** $\frac{1}{3}\operatorname{sen} x^3 + c$ **19.** $-\frac{4}{7}(\cos x + 3)^{7/4} + c$

**21.** $\frac{1}{2}e^{x^2+1} + c$ **23.** $2e^{\sqrt{x}} + c$ **25.** $\frac{2}{3}\sqrt{x^3 - 2} + c$

**27.** $\frac{1}{3}(\ln x + 2)^3 + c$ **29.** $\ln|x^2 + x - 1| + c$

**31.** $-2(\sqrt{x} + 1)^{-1} + c$ **33.** $e^{\operatorname{sen} x} + c$

**35.** $-\frac{1}{4}(\cos x - 1)^4 + c$ **37.** $-4(\ln x + 1)^{-1} + c$

**39.** $\ln(e^x + e^{-x}) + c$ **41.** $2\ln|\ln x| + c$ o $2\ln|\ln\sqrt{x}| + c$

**43.** $2(x + 7) - 11\ln|x + 7| + c$

**45.** $\frac{3}{8}(x + 3)^{8/3} - \frac{18}{5}(x + 3)^{5/3} + \frac{27}{2}(x + 3)^{2/3} + c$

**47.** $\frac{5}{3}\sqrt{5} - \frac{1}{3}$ **49.** 0 **51.** $-2$

**53.** $-\ln\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\ln 2$ **55.** $\frac{8}{3}$ **57.** 0,77 **59.** 0

**61.** 3,0 **63.** 1,414 **65.** 0,881

**67.** $\frac{1}{2}\int_0^4 f(u)\,du$ **69.** $\int_0^1 f(u)\,du$

**71.** $\cos(x) = \cos(-x)$, $(-x)\operatorname{sen}(-x) = x\operatorname{sen} x$
$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$, $(-x)\cos(-x) = -x\cos x$

**73.** impar, 0 **75.** par, $\frac{16}{15}$ **77.** ninguna de ambas cosas, $\frac{2}{3}$

**79.** $x\sqrt{4 - x^2}$ es impar, $4 - x^2$ es par, $\bar{y} = \frac{8}{3\pi}$

## Ejercicios de la sección 4.7

**5.** punto medio $\frac{85}{64}$, trapecios $\frac{43}{32}$, Simpson $\frac{4}{3}$

**7.** punto medio $\frac{3.776}{3.465}$, trapecios $\frac{67}{60}$, Simpson $\frac{11}{10}$

**9.** (a) 0,75 (b) 0,8 (c) 0,75

**11.**

| $n$ | punto medio | trapecios | Simpson |
|---|---|---|---|
| 10 | 0,5538 | 0,5889 | 0,5660 |
| 20 | 0,5629 | 0,5713 | 0,5655 |
| 50 | 0,5652 | 0,5666 | 0,5657 |

**13.**

| $n$ | punto medio | trapecios | Simpson |
|---|---|---|---|
| 10 | 0,88220 | 0,88184 | 0,88207 |
| 20 | 0,88211 | 0,88202 | 0,88208 |
| 50 | 0,88209 | 0,88207 | 0,88208 |

**15.**

| $n$ | punto medio | trapecios | Simpson |
|---|---|---|---|
| 10 | 3,9775 | 3,9775 | 3,9775 |
| 20 | 3,9775 | 3,9775 | 3,9775 |
| 50 | 3,9775 | 3,9775 | 3,9775 |

**17.**

| $n$ | punto medio error | trapecios error | Simpson error |
|---|---|---|---|
| 10 | 0,00832 | −0,01665 | −0,00007 |
| 20 | 0,00208 | −0,00417 | $-4{,}2 \times 10^{-6}$ |
| 40 | 0,00052 | −0,00104 | $-2{,}6 \times 10^{-7}$ |
| 80 | 0,00013 | −0,00026 | $-1{,}6 \times 10^{-8}$ |

**19.**

| $n$ | punto medio error | trapecios error | Simpson error |
|---|---|---|---|
| 10 | $-5{,}5 \times 10^{-17}$ | 0 | 0 |
| 20 | $-2{,}7 \times 10^{-17}$ | $1{,}6 \times 10^{-16}$ | $1{,}1 \times 10^{-16}$ |
| 40 | $-2{,}9 \times 10^{-16}$ | $-6{,}9 \times 10^{-17}$ | $-1{,}3 \times 10^{-16}$ |
| 80 | $-1{,}7 \times 10^{-16}$ | $-3{,}1 \times 10^{-16}$ | $1{,}5 \times 10^{-16}$ |

**21.** 4, 4, 16 **23.** (a) 1,3662 (b) 1,4281 (c) 1,3916

**25.** (a) 0,8437 (b) 0,8371 (c) 0,8415

**27.** 4.744, 6.709, 135

**29.** respuestas para $n = 80$:
punto medio: cota 0,000391, error 0,00013
trapecios: cota 0,000781, error 0,00026,
Simpson: cota $1{,}63 \times 10^{-8}$, error $1{,}63 \times 10^{-8}$

**31.** (a) 9,1 (b) 9,033 **33.** (a) 6,96 (b) 6,96

**35.** 6.193 pies$^2$ **37.** 529 pies **39.** 2,6 litros

**41.** (a) por defecto (b) por exceso (c) no se puede decidir

**43.** (a) por exceso (b) por defecto (c) no se puede decidir

**45.** (a) por defecto (b) por exceso (c) exacto

**49.** las parábolas se curvan

**51.** si $T_n - I \approx -2(M_n - I)$ entonces $\frac{1}{3}T_n + \frac{2}{3}M_n \approx I$

### Ejercicios de repaso del capítulo 4

**1.** $\frac{4}{3}x^3 - 3x + c$ **3.** $4\ln|x| + c$ **5.** $-\frac{1}{2}\cos 4x + c$

**7.** $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}e^{4x} + c$ **9.** $\frac{1}{2}x^2 + 4\ln|x| + c$

**11.** $e^x - x + c$ **13.** $\frac{1}{3}(x^2+4)^{3/2} + c$

**15.** $2\operatorname{sen} x^3 + c$ **17.** $-e^{1/x} + c$ **19.** $-\ln|\cos x| + c$

**21.** $x^3 + x + 2$ **23.** $-16t^2 + 10t + 2$

**25.** $4 + 10 + 18 + 28 + 40 + 54 = 154$ **27.** 338.250

**29.** $\dfrac{n(n+1)(2n-1)}{6n^3} - \dfrac{n(n+1)}{2n^3} \to \dfrac{1}{3}$ **31.** 2,65625

**33.** 4,668 **35.** (a) 2,84 (b) 2,92 (c) 2,88 (d) 2,907

**37.** Simpson **39.** $\frac{2}{3}$ **41.** $\int_0^3 (3x - x^2)\,dx = \frac{9}{2}$

**43.** 25 **45.** $\frac{1}{2}(e^2 - 1) \approx 3{,}19$ **47.** $-\frac{4}{3}$ **49.** 1

**51.** $6 + 4e^{-5/2}$ **53.** $\frac{1}{2}\ln 5$ **55.** $\frac{1}{3}(8^{3/2} - 8)$

**57.** $\frac{15}{2} + \frac{1}{2}e^2 - 4e$ **59.** $\operatorname{sen} x^2 - 2$

**61.** (a) 2,079 (b) 2,083 (c) 2,080

**63.** (a) 2,08041, 2,08045 (b) 2,08055, 2,08048
(c) 2,08046, 2,08046

## CAPÍTULO 5

### Ejercicios de la sección 5.1

**5.** $\frac{40}{3}$ **7.** $5 - e^{-2}$ **9.** 3 **11.** $\frac{29}{2}$ **13.** $\frac{64}{3}$

**15.** $\frac{1}{6}$ **17.** $\frac{27}{4}$ **19.** $\frac{1}{12}$ **21.** 0,08235

**23.** 0,135697 **25.** 4,01449 **27.** $\int_0^1 (2 - 2y)\,dy = 1$

**29.** $\int_1^2 (3y - 2 - y^2)\,dy = \dfrac{1}{6}$ **31.** $\int_0^1 2x\,dx = 1$

**33.** $\int_0^2 (6 - 2y)\,dy = 8$

**35.** 3: $\int_0^{\sqrt{3}} (3 - x^2)\,dx = \int_{\sqrt{3}}^3 (x^2 - 3)\,dx = 2\sqrt{3}$

**37.** 14,4 millones de barriles

**39.** 2,45 millones de personas **41.** 93,02 %

**43.** 100; los objetos distan 100 pies

**45.** (a) 6,48 millas (b) $t = 2{,}56$ horas

### Ejercicios de la sección 5.2

**5.** 12 **7.** $\dfrac{56\pi}{3}$ **9.** 123,8 pies$^3$

**11.** 93.750.000 pies$^3$ **13.** $\frac{215}{2}$ pies$^3$

**15.** $33\pi^2 + 32\pi$ pulgadas$^3$ **17.** 0,2467 cm$^3$

**19.** 2,5 pies$^3$ **21.** (a) $\dfrac{8\pi}{3}$ (b) $\dfrac{28\pi}{3}$

**23.** (a) $\dfrac{32\pi}{5}$ (b) $\dfrac{224\pi}{15}$

**25.** (a) $2\pi e^2 + 2\pi$ (b) $\pi\left(\dfrac{e^4}{2} + 4e^2 - \dfrac{9}{2}\right)$

**27.** (a) $\dfrac{2\pi}{5}$ (b) $\dfrac{\pi}{7}$

**29.** (a) $9\pi$ (a) $9\pi$ (c) $18\pi$ (d) $36\pi$ (e) $18\pi$ (f) $36\pi$

**31.** (a) $\dfrac{\pi}{2}$ (b) $\dfrac{\pi}{5}$ (c) $\dfrac{\pi}{6}$ (d) $\dfrac{7\pi}{15}$ (e) $\dfrac{7\pi}{6}$ (f) $\dfrac{13\pi}{15}$

**33.** $\dfrac{\pi h^2}{2a} = \dfrac{1}{2}\pi h\left(\sqrt{\dfrac{h}{a}}\right)^2$ **35.** $\int_{-1}^1 \pi(1)^2\,dy = 2\pi$

**37.** $\int_{-1}^1 \pi\left(\dfrac{1-y}{2}\right)^2 dy = \dfrac{2\pi}{3}$ **41.** igual volumen

### Ejercicios de la sección 5.3

**5.** $r = 2 - x$, $h = x^2$, $V = \dfrac{8\pi}{3}$

**7.** $r = x$, $h = 2x$, $V = \dfrac{4\pi}{3}$

**9.** $r = 2 - y$, $h = 2y$, $V = \dfrac{8\pi}{3}$

**11.** $r = y$, $h = \sqrt{1 - (y-1)^2}$, $V = \pi^2 \approx 9{,}8696$

**13.** $\frac{32\pi}{3}$ **15.** $\frac{16\pi}{3}$ **17.** $\frac{27\pi}{2}$ **19.** $\frac{8\pi}{3}$

**21.** (a) $\frac{80\pi}{3}$ (b) $16\pi$ (c) $16\pi$ (d) $\frac{16\pi}{3}$

**23.** (a) $\frac{625\pi}{6}$ (b) $\frac{625\pi}{3}$ (c) $\frac{875\pi}{6}$ (d) $\frac{500\pi}{3}$

**25.** (a) 16,723 (b) 12,635 (c) 4,088 (d) 1,496

**27.** (a) $\frac{32\pi}{15}$ (b) $\frac{5\pi}{6}$ (c) $\frac{3\pi}{2}$ (d) $\frac{38\pi}{15}$

**29.** (a) $\frac{5\pi}{6}$ (b) $\frac{64\pi}{15}$ **39.** $\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$

**41.** $\frac{\sqrt{100-30\sqrt{10}}}{10} \approx 0{,}2265$

## Ejercicios de la sección 5.4

**5.** 1,4604; 1,4743 **7.** 3,7242; 3,7900

**9.** $\int_{-1}^{1} \sqrt{1+9x^4}\,dx \approx 3{,}0957$

**11.** $\int_{0}^{2} \sqrt{1+(2-2x)^2}\,dx \approx 2{,}9578$

**13.** $\int_{0}^{3} \sqrt{1+(3x^2+1)^2}\,dx \approx 30{,}3665$

**15.** $\int_{0}^{\pi} \sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}\,dx \approx 3{,}8201$

**17.** $\int_{0}^{\pi} \sqrt{1+(x \operatorname{sen} x)^2}\,dx \approx 4{,}6984$

**19.** 22,364 pies **21.** 5,43 pies

**23.** 60 yardas; 60 yardas; 139,4 yardas; 104,55 pies/s

**31.** $\int_{0}^{1} 2\pi x^2 \sqrt{1+4x^2}\,dx \approx 3{,}8097$

**33.** $\int_{0}^{2} 2\pi (2x-x^2) \sqrt{1+(2-2x)^2}\,dx \approx 10{,}9654$

**35.** $\int_{0}^{1} 2\pi e^x \sqrt{1+e^{2x}}\,dx \approx 22{,}9430$

**37.** $\int_{0}^{\pi/2} 2\pi \cos x \sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}\,dx \approx 7{,}2117$

**39.** 0,9998 **41.** 0,9785 **43.** 0,99995

**45.** 1,672, 1,720, 1,754 $\to 2$ **47.** $4x^3 > 2x$ si $x > \sqrt{\frac{1}{2}}$

**49.** $6\pi$ **51.** $\pi\sqrt{5}+\pi$ **53.** 6

## Ejercicios de la sección 5.5

**5.** $y(0)=80,\ y'(0)=0$ **7.** $y(0)=60,\ y'(0)=10$

**9.** $-8\sqrt{30}$ pies/s **11.** $-37{,}52$ pies/s **13.** $\sqrt{h}$

**15.** 256 pies **17.** $-16t^2+64t$; 64 pies; 4 seg; $-64$ pies/s

**19.** $8\sqrt{\frac{5}{3}}$ pies/s **21.** $\frac{25}{64}$ pies $\approx 4{,}7$ pulgadas

**25.** $10\sqrt{3} \approx 17$ seg, $490\sqrt{3} \approx 849$ m

**27.** $\frac{15}{4}$ seg, $225\sqrt{3} \approx 390$ pies

**29.** el servicio salva la red y entra

**31.** el servicio salva la red, pero no entra

**33.** 2,59 pies **35.** la pelota bota antes ($h \approx -0{,}62$)

**37.** 7,7°, 120 tg (7,7°) $\approx 16{,}2$ pies **39.** $40\sqrt{\frac{5}{\sqrt{3}}} \approx 68$ pies/s

**41.** 400 pies **43.** $\frac{25}{16}\operatorname{sen} 4t - \frac{25}{4}t$

**45.** $\frac{25}{64}\operatorname{sen}\left(8t+\frac{\pi}{4}\right) - \frac{25\sqrt{2}}{16}t - \frac{25\sqrt{2}}{128}$

**47.** $\frac{20\pi}{\sqrt{30}} \approx 11{,}5$ rad/s **51.** ¡Gooool! ($x \approx -0{,}288$ en $y=90$)

**53.** 25 seg **55.** 40,6°, 37,26 m/s

## Ejercicios de la sección 5.6

**5.** $\frac{15}{8}$ pies-libras **7.** 20 pies-libras

**9.** $\frac{1.250}{3}$ pies-libras **11.** 300 pies-libras

**13.** 270.000.000 pies-libras **15.** 704.000 pies-libras

**17.** 8.168.140.899 pies-libras **19.** 816.814 pies-libras

**21.** $J \approx 2{,}133$; 113 pies/s **23.** $J \approx 7.533{,}3$; 37,7 pies/s

**25.** $m = 15$ kg, $\bar{x} = \frac{16}{5}$ m; más pesado a la derecha del centro

**27.** $m = \frac{52}{3}$ kg, $\bar{x} = 0$ m **29.** 0,0614 slugs, 31,5 onzas

**31.** 16,6 pulgadas; igual masa, $\bar{x}$ difiere en 3

**33.** 0,0614 slugs, 31,4 onzas; $\bar{x} = 17{,}8$ pulgadas

**35.** 2, 4, $\frac{1}{2}$; 0,4167, 3, 5,33 **37.** 8.985.600 libras

**39.** 196.035 libras **41.** 12.252 libras **43.** $-16\sqrt{5}$ pies/s

**45.** 10.667 hp **47.** 27,22, 20,54, 24,53 %

**49.** $\frac{1}{4}\rho\pi a^3 b$ **51.** $\frac{\text{media}}{\text{madera}} \approx 1{,}35$; $\frac{\text{grande}}{\text{madera}} \approx 1{,}78$

## Ejercicios de la sección 5.7

**13.** 4 **15.** $\frac{4}{1-e^{-4}}$ **17.** $\frac{\ln 2}{2} \approx 0{,}346$ **19.** 0,157

**21.** $7{,}76 \times 10^{-11}$ **23.** $1-e^{-3/2} \approx 0{,}77687$

**25.** $e^{-6}-e^{-12} \approx 0{,}00247$ **27.** $e^{-2/3}-e^{-4/3} \approx 0{,}2498$

**29.** $1-e^{-4} \approx 0{,}9817$ **31.** 0,594 **33.** 0,9999995

**35.** (a) $\frac{3}{4}$ (b) $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ **37.** (a) $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$ (b) $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$

**39.** (a) 1,23 (b) $-\dfrac{3\ln\frac{2}{3}}{\ln 3} \approx 1{,}11$

**41.** (a) 0,2313 (b) $-\dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{e^{-4}+1}{2}\right) \approx 0{,}1687$

**43.** $c = \dfrac{4}{1-e^{-4b}} \to 4$ **45.** $\dfrac{6}{1-e^{-6b}} \to 6$

**47.** (a) $\frac{93}{256}$ (b) $\frac{93}{256}$ (c) $\frac{1}{128}$ (d) $\frac{1}{2}$

**49.** (a) 0,7101 (b) 0,2899 (c) 0,1552 (d) 0,576

**51.** $\frac{100}{99}$, 0,0024 **53.** $\frac{5}{2}$

### Ejercicios de repaso del capítulo 5

**1.** $\dfrac{\pi^3}{3} + 2\pi - 2$ **3.** $\frac{1}{12}$ **5.** 1,452 **7.** $\frac{5}{6}$

**9.** 10.054 **11.** $\dfrac{98\pi}{3}$ **13.** 4,2

**15.** (a) $\dfrac{256\pi}{5}$ (b) $8\pi$ (c) $\dfrac{128\pi}{3}$ (d) $\dfrac{1.408\pi}{15}$

**17.** (a) $\dfrac{2\pi}{3}$ (b) $2\pi$ (c) $4\pi$ (d) $\dfrac{22\pi}{3}$

**19.** $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1+16x^6}\,dx \approx 3{,}2$

**21.** $\displaystyle\int_{-2}^{2} \sqrt{1+\tfrac{1}{4}e^x}\,dx \approx 4{,}767$

**23.** $\displaystyle\int_{0}^{1} 2\pi(1-x^2)\sqrt{1+4x^2}\,dx \approx 5{,}48$

**25.** −64 pies/s **27.** 1,026 seg, 46,3 pies **29.** no

**31.** $64\sqrt{2}$ pies/s, $-64\sqrt{2}$ pies/s **33.** $\frac{40}{3}$ pies-libras

**35.** $m = \frac{112}{3}$, $\bar{x} = \frac{16}{7}$, es más densa la mitad de la derecha de $x = 2$

**37.** 22.630.400 libras **39.** 32 pies/s **43.** 2

**45.** (a) $1 - e^{-2} \approx 0{,}865$ (b) $e^{-2} - e^{-4} \approx 0{,}117$

**47.** (a) $\frac{11}{15}$ (b) 0,786

## CAPÍTULO 6

### Ejercicios de la sección 6.1

**3.** $\ln 4 = \displaystyle\int_1^4 \frac{1}{t}\,dt$ **5.** $\ln 8{,}2 = \displaystyle\int_1^{8.2} \frac{1}{t}\,dt$ **7.** $\dfrac{1}{x}$

**9.** $-\tan x$ **11.** $\ln x + 1$ **13.** $\dfrac{2x}{x^2+2}$ **15.** $\frac{7}{2}\ln 2$

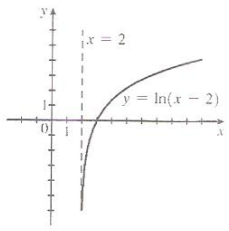
**17.** $\frac{1}{2}\ln 3$ **19.** $\ln(x^2+1) + c$ **21.** $-\ln|\cos x| + c$

**23.** $\frac{1}{2}\ln|x^2+2x-1| + c$ **25.** $\ln|\ln x| + c$

**27.** $\frac{1}{3}(\ln x + 1)^3 + c$ **29.** $\ln 3$ **31.** $\frac{1}{3}\ln\frac{3}{4}$

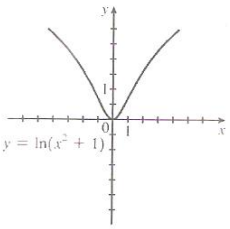
**33.** $\dfrac{x}{x^2+1}$ **35.** $\dfrac{4}{x} - \dfrac{5x^4}{x^5+1}$ **37.** $\frac{1}{2}\ln|\ln|x|| + c$

**39.**



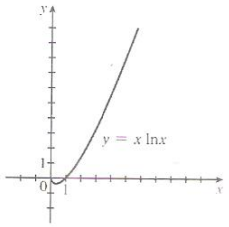

creciente y cóncava hacia abajo en $(2, \infty)$

**41.**




creciente en $(0, \infty)$,
decreciente en $(-\infty, 0)$;
cóncava hacia arriba en $(-1, 1)$,
cóncava hacia abajo en $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

**43.**




decreciente en $\left(0, \frac{1}{e}\right)$, creciente en $\left(\frac{1}{e}, \infty\right)$;
cóncava hacia arriba en $(0, \infty)$

**47.** $e^{-1/2}$

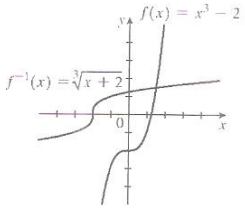
**49.** Al crecer $x$, el número de primos menores que $x$ crece, pero a ritmo decreciente.

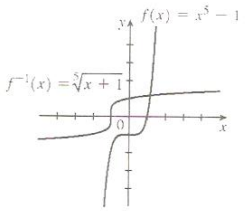
### Ejercicios de la sección 6.2

**5.** sí **7.** no **9.** no **11.** sí

**13.** sí **15.** sí

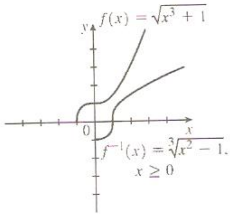
**17.** $\sqrt[3]{x+2}$ **19.** $\sqrt[5]{x+1}$




**21.** no es inyectiva

**23.** $\sqrt[3]{x^2-1}$, $x \geq 0$;




**25.** $\dfrac{1}{f'(0)} = \dfrac{1}{4}$ **27.** $\dfrac{1}{f'(1)} = \dfrac{1}{15}$

**29.** $\dfrac{1}{f'(1)} = \dfrac{4}{5}$ **31.** $y = \frac{1}{4}(x+1)$

**33.** creciente, cóncava hacia abajo

**35.** creciente, cóncava hacia arriba

**37.** 2,5, alta **39.** 2,25, alta

**41.** probablemente no es inyectiva

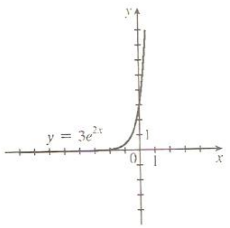
**43.** la inversa existe (antes de que bote)

**45.** no es inyectiva

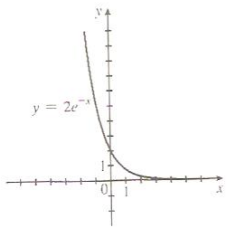
**47.** $k \geq 0$ **49.** $0{,}9(1{,}1)x = 0{,}99x$; $\frac{1}{1{,}1}x$ **51.** 2,575

## Ejercicios de la sección 6.3

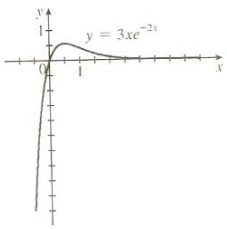
**5.**



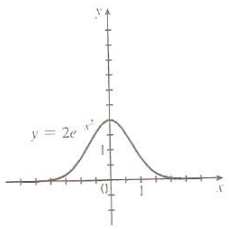

**7.**




**9.**




**11.**




**13.** $12e^{3x}$ **15.** $3e^{-2x} - 6xe^{-2x}$ **17.** $-4xe^{-x^2}$

**19.** $2xe^{-x} - x^2e^{-x}$ **21.** $2(3x^2-3)e^{x^3-3x}$ **23.** $e^x$

**25.** $-\operatorname{sen} x\, e^{\cos x}$ **27.** $\frac{1}{3}e^{3x} + c$ **29.** $\frac{1}{2}e^{x^2} + c$

**31.** $-e^{\cos x} + c$ **33.** $-e^{1/x} + c$ **35.** $x + 2e^x + \frac{1}{2}e^{2x} + c$

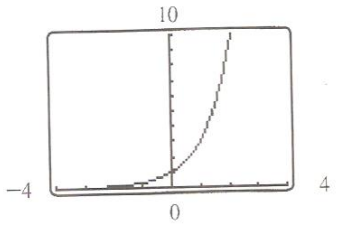
**37.** $-2e^{-2x} + c$ **39.** $\frac{1}{3}x^3 + c$ **41.** $\frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{3}$ **43.** 0

**45.** máx. en $x = \frac{1}{2}$, punto de inflexión en $x = 1$

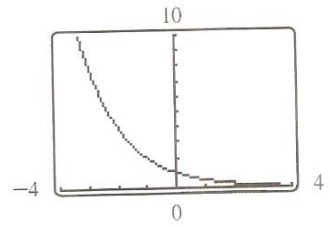
**47.** mín. en $x = 0$, máx. local en $x = 1$,

puntos de inflexión en $x = 1 \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

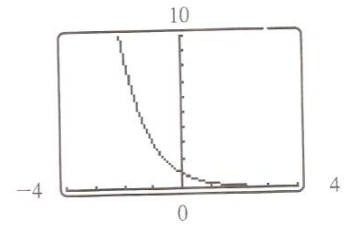
**51.**



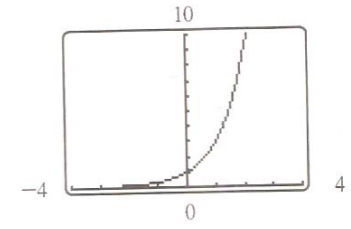

**53.**




**55.**




**57.**



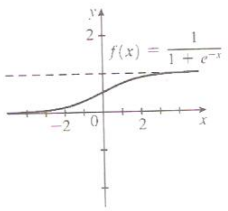

**59.** creciente, cóncava hacia arriba; decreciente, cóncava hacia arriba

**61.** $(\ln 2)2^x$ **63.** $2(\ln 3)3^{2x}$ **65.** $2x(\ln 3)3^{x^2}$

**67.** $\dfrac{1}{x \ln 3}$ **69.** $\dfrac{2}{x \ln 4}$ **71.** $\dfrac{1}{\ln 2}2^x + c$

**73.** $\dfrac{1}{2 \ln 2}2^{x^2} + c$ **75.** $\dfrac{1}{3 \ln 4}4^{3x} + c$

**77.** 1; 0; $x = 0$; $\dfrac{1}{1 + e^{-(x-4)}}$




**79.** $k = \frac{1}{3}\ln 2$; $2^{2/3} - 2^{1/3} \approx 0{,}327$

## Ejercicios de la sección 6.4

**5.** $2e^{4x}$ **7.** $5e^{-3x}$ **9.** $2e^{2(x-1)}$ **11.** $-3x+3$

**13.** $100e^{(\ln 2/4)t}$, 23,6 horas **15.** $400e^{(\ln 2)t}$, 409.600

**17.** $\dfrac{\ln 2}{0{,}44} \approx 1{,}575$ horas **19.** $20\,\dfrac{\ln 10}{\ln 2} \approx 66{,}4$ minutos

**23.** $\dfrac{\ln 2}{1{,}3863} \approx 0{,}5$ días **25.** $0{,}4e^{-(\ln 2/3)t}$, 15,97 horas

**27.** 29 % **29.** 13.305 años **31.** $\dfrac{\ln\left(\frac{5}{13}\right)}{\ln\left(\frac{11}{13}\right)} \approx 5{,}72$ minutos

**33.** $70 - 20e^{kt}$, $k = \dfrac{\ln 0{,}7}{2}$ **35.** 9:46 **37.** 182,6°

**39.** 1.080 euros, 1.083 euros, 1.083,28 euros, 1.083,29 euros

**41.** $A$ = 110.231,76 euros, $B$ = 66.402,34 euros

**43.** $34e^{kt}$, $k = \frac{1}{10}\ln\left(\frac{9.800}{34}\right)$, 2.824.705,88 euros

**45.** 7.300 euros; 7.860 euros vs. 7.665 euros **47.** exponencial, lineal

**49.** $P(x) \approx e^{1.468x+0.182}$ **51.** $P(x) \approx e^{0.397x-2.303}$

## Ejercicios de la sección 6.5

**5.** sí **7.** no **9.** sí **11.** no **13.** $ce^{x+x^3/3}$

**15.** $-\dfrac{1}{\frac{2}{3}x^3 + c}$ **17.** $y = \pm\sqrt{4\ln|1+x^3| + c}$ **19.** $\sqrt[3]{4x^3 + c}$

**21.** $\dfrac{1}{1+ce^x}$ **23.** $c\sqrt{1+x^2}$

**25.** $y = \pm\sqrt[4]{-16\cos x + c}$

**27.** $e^{-1}e^{(x+1)^3}$ **29.** $\sqrt{\frac{8}{3}x^3 + 4}$ **31.** $(x+3)^4$

**33.** $\operatorname{sen} y = 2x^2$ **35.** $\dfrac{2e^{6t}}{1+e^{6t}}$ **37.** $\dfrac{20e^{10t}}{1+4e^{10t}}$

**39.** $\dfrac{3e^t}{1+3e^t}$ **41.** $\dfrac{(8\times 10^7)e^{0{,}71t}}{3+e^{0{,}71t}}$ **43.** $\dfrac{AMe^{kMt}}{Ae^{kMt}-1}$

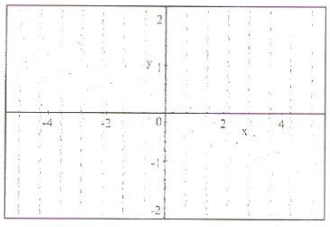
**45.** 0, 2 **47.** 0, −2, 2 **49.** 1

**51.** (a) $y = 0$ (b) $y = 2$ **53.** $\sqrt{80}$ pies/s

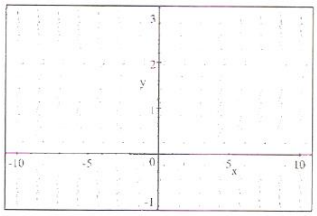
**55.** $\dfrac{10e^{2rt} - 10}{e^{2rt} - \frac{5}{6}}$

## Ejercicios de la sección 6.6

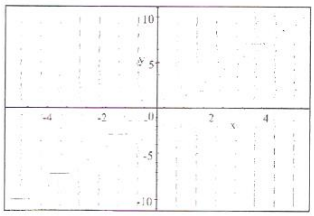
**5.**



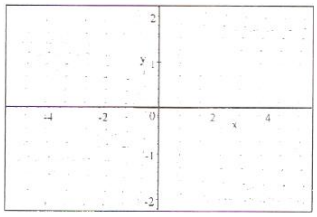
**7.**



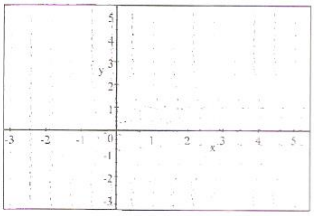
**9.**



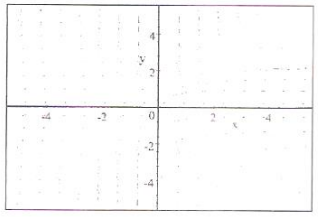
**11.**



**13.**



**15.**



**17.** $h = 0{,}1$; $y_1 = 1$, $y_2 = 1{,}02$,
$y(1) \approx 2{,}3346$, $y(2) \approx 29{,}4986$
$h = 0{,}05$; $y_1 = 1$, $y_2 = 1{,}005$,
$y(1) \approx 2{,}5106$, $y(2) \approx 39{,}0930$

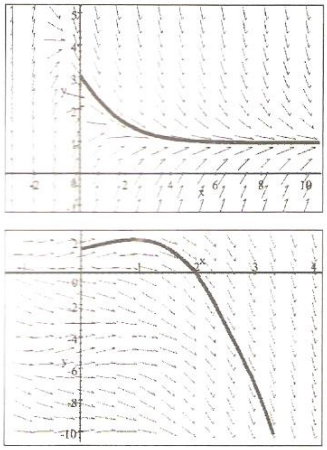
**19.** $h = 0{,}1$; $y_1 = 1{,}3$, $y_2 = 1{,}651$,
$y(1) \approx 3{,}8478$, $y(2) \approx 3{,}9990$
$h = 0{,}05$; $y_1 = 1{,}15$, $y_2 = 1{,}3139$,
$y(1) \approx 3{,}8188$, $y(2) \approx 3{,}9978$

**21.** $h = 0{,}1$; $y_1 = 2{,}9$, $y_2 = 2{,}8005$,
$y(1) \approx 2{,}0943$, $y(2) \approx 1{,}5275$
$h = 0{,}05$; $y_1 = 2{,}95$, $y_2 = 2{,}9001$,
$y(1) \approx 2{,}0990$, $y(2) \approx 1{,}5346$

**23.** $h = 0{,}1$; $y_1 = 1{,}1$, $y_2 = 1{,}2095$,
$y(1) \approx 2{,}3960$, $y(2) \approx 4{,}5688$
$h = 0{,}05$; $y_1 = 1{,}05$, $y_2 = 1{,}1024$,
$y(1) \approx 2{,}4210$, $y(2) \approx 4{,}6203$

**25.** $y(1) = e \approx 2{,}7183$, $y(2) = e^4 \approx 54{,}5982$;
$y(1) = \sqrt{5} \approx 2{,}236068$, $y(2) = \sqrt{8} \approx 2{,}828427$

**27.**



**29.** $y = 0$ (inestable), $y = 2$ (estable)

**31.** $y = 0$ (inestable), $y = -1$ (inestable), $y = 1$ (estable)

**33.** $y = 1$ (estable) **35.** $y = 0$ e $y = b$ son estables

**37.** Las estimaciones dan 31,64, 218,12, error de *overflow*

**39.** $x = \dfrac{\ln 2}{2}$

## Ejercicios de la sección 6.7

**5.** 0 **7.** $\dfrac{\pi}{4}$ **9.** $-\dfrac{\pi}{2}$ **11.** 0 **13.** $-\dfrac{\pi}{4}$

**15.** $\dfrac{\pi}{3}$ **17.** $-\dfrac{\pi}{6}$ **19.** $\sqrt{1-x^2}, -1 \le x \le 1$

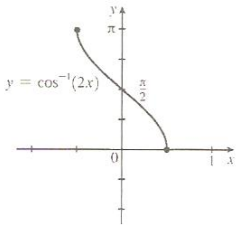
**21.** $\begin{cases} 0 & \text{si } x = n\pi \ (n \text{ par}) \\ \pi & \text{si } x = n\pi \ (n \text{ impar}) \end{cases}$

**23.** $\sqrt{x^2-1}, x \ge 1$ o $-\sqrt{x^2-1}, x \le -1$

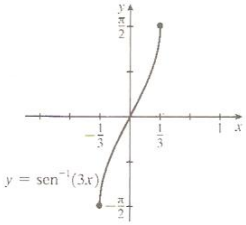
**25.** $x, x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ **27.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **29.** $\frac{4}{3}$ **31.** $\dfrac{\pi}{8}$

**33.** $\frac{2}{9}x\sqrt{9-x^2}, |x| \le 3$

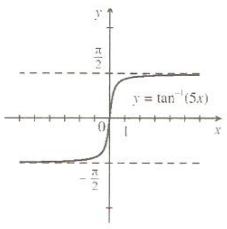
**35.**




**37.**




**39.**




**41.** $\dfrac{n\pi}{4}$, impar $n$ **43.** $\dfrac{n\pi}{3}$ **45.** $\dfrac{\pi}{20} + \dfrac{n\pi}{5}$

**47.** $\dfrac{\pi}{18} + \dfrac{2\pi n}{3}, \dfrac{5\pi}{18} + \dfrac{2\pi n}{3}$ **49.** $\pm\dfrac{\pi}{6} + \pi n$

**53.** $\tan^{-1}\left(\dfrac{5}{3x}\right)$

## Ejercicios de la sección 6.8

**3.** $\dfrac{6x}{\sqrt{1-9x^4}}$ **5.** $\dfrac{-3x^2}{\sqrt{1-x^6}}$ **7.** $\dfrac{2x}{1+x^4}$

**9.** $\dfrac{2}{x\sqrt{x^4-1}}$ **11.** $\cos^{-1} 2x - \dfrac{2x}{\sqrt{1-4x^2}}$

**13.** $\dfrac{-\cos x}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}} = \pm 1$ **15.** $\dfrac{\sec x \operatorname{tg} x}{1+\sec^2 x}$

**17.** $6\tan^{-1} x + c$ **19.** $4\operatorname{sen}^{-1} x + c$ **21.** $\tan^{-1} x^2 + c$

**23.** $2\operatorname{sen}^{-1} x^2 + c$ **25.** $\sec^{-1} x^2 + c$

**27.** $\tan^{-1}\left(\dfrac{x}{2}\right) + c$ **29.** $\operatorname{sen}^{-1}(e^x) + c$

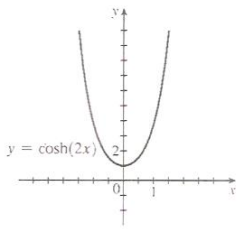
**31.** $\dfrac{1}{2}\tan^{-1}\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{2}\right) + c$ **33.** $\dfrac{3\pi}{4}$

**35.** $\dfrac{\pi}{3}$ **37.** $\dfrac{\pi}{4}$

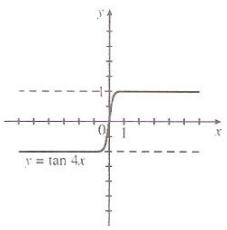
**43.** $\sqrt{\frac{248}{3}} \approx 9{,}09$ pies **45.** $\sqrt{3} \approx 1{,}73$ pies

## Ejercicios de la sección 6.9

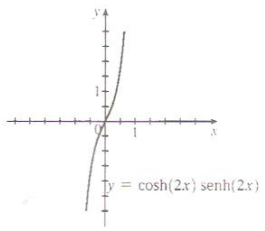
**5.**



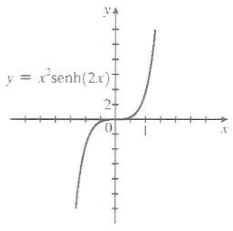

**7.**




**9.**




**11.**




**13.** $4\operatorname{senh} 4x$ **15.** $2\cosh 2x$ **17.** $4\operatorname{sech}^2 4x$

**19.** $\dfrac{2}{\sqrt{4x^2-1}}$ **21.** $2x\operatorname{senh} 2x + 2x^2\cosh 2x$

**23.** $\dfrac{4}{1-16x^2}$ **25.** $\frac{1}{6}\operatorname{senh} 6x + c$

**27.** $\frac{1}{3}\ln(\cosh 3x) + c$ **29.** $\frac{1}{4}\cosh 4 - \frac{1}{4}$

**31.** $2\,\text{senh}^{-1} x + c$ **33.** $\cosh(\text{sen}\, x) + c$ **35.** $e^{\text{senh}\,1} - 1$

**41.** $f'(x) < 0$ para $x < 0$, $f'(x) > 0$ para $x > 0$, $f''(x) > 0$ para todo $x$

**43.** $\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ **45.** 27,62 **47.** 26,13

**57.** −80 m/s, 19,41 m, 75,45 m; −40 m/s, 18,86 m, 68,35 m

**59.** 9,8 m/s$^2$

### Ejercicios de repaso del capítulo 6

**1.** $\frac{3x^2}{x^3+5}$ **3.** $\frac{4x^3+1}{2(x^4+x)}$ **5.** $-2xe^{-x^2}$

**7.** $(3x^2 \ln 4)4^{x^3}$ **9.** $\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$ **11.** $\frac{-2\,\text{sen}\,2x}{1+\cos^2 2x}$

**13.** $\frac{1}{2}x^{-1/2}\,\text{senh}\sqrt{x}$ **15.** $\frac{3}{\sqrt{9x^2+1}}$

**17.** $\frac{1}{3}\ln|x^3+4| + c$ **19.** $\frac{1}{2}\ln 2$ **21.** $-\cos(\ln x) + c$

**23.** $-\frac{1}{4}e^{-4x} + c$ **25.** $2e^{\sqrt{x}} + c$ **27.** $\frac{1}{3}e^6 - \frac{1}{3}$

**29.** $\frac{1}{4\ln 3}3^{4x} + c$ **31.** $\frac{3}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + c$

**33.** $\frac{1}{3}\,\text{sen}^{-1}(x^3) + c$ **35.** $\frac{9}{2}\sec^{-1} x^2 + c$

**37.** $4\,\text{senh}^{-1} x + c$ **39.** $\frac{1}{4}\,\text{senh}\,4x + c$

**41.** sí, $\sqrt[3]{x+1}$ **43.** no **45.** $\frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{11}$

**47.** $\frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{2}$ **49.** $3e^{2x}$ **51.** $\sqrt{2x^2+4}$

**53.** $\left(\frac{1}{3}x^{3/2} + \frac{5}{3}\right)^2$ **55.** $10^4 e^{(\ln 2/2)t}$; $\frac{2\ln 100}{\ln 2} \approx 13{,}29$ horas

**57.** $2e^{-(\ln 2/2)t}$; $\frac{-2\ln 0{,}5}{\ln 2} \approx 8{,}64$ horas

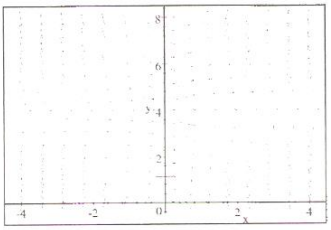
**59.** $\frac{\ln 2}{0{,}08} \approx 8{,}66$ años

**61.** $112e^{(\ln 108/112)t} + 68$; 21,10 minutos **63.** $ce^{1/2x^4}$

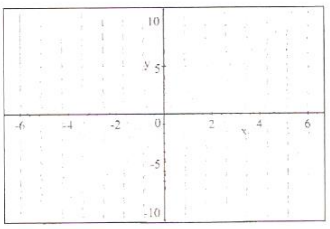
**65.** $\frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}y^2 = 4\,\text{tg}^{-1} x + c$

**67.** $y = 0$ (inestable), $y = 2$ (estable) **69.** $y = 0$ (estable)

**71.**



**73.**

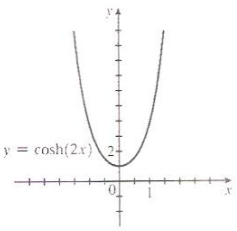


**75.** $h = 0{,}1$: $y_1 = 2{,}7$, $y_2 = 2{,}45$;
$y(1) \approx 1{,}7434$, $y(2) \approx 2{,}6079$
$h = 0{,}05$: $y_1 = 2{,}85$, $y_2 = 2{,}7125$;
$y(1) \approx 1{,}7924$, $y(2) \approx 2{,}6426$

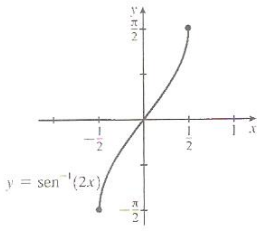
**77.** $\frac{\pi}{2}$ **79.** $-\frac{\pi}{4}$ **81.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

**83.** $\frac{\pi}{4}$ **85.** $\frac{\pi}{4} + \pi n$

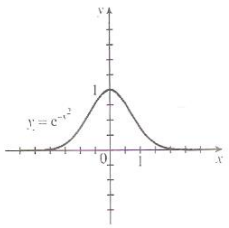
**87.**




**89.**




**91.**




**93.** 17,77

## CAPÍTULO 7

### Ejercicios de la sección 7.1

**3.** $-\frac{1}{6}\cos 6x + c$ **5.** $\frac{1}{2}\sec 2x + c$ **7.** $-\frac{1}{2}e^{3-2x} + c$

**9.** $-2\cos\sqrt{x} + c$ **11.** 0 **13.** $1 - \sqrt{2}$

**15.** $\frac{3}{4}\tan^{-1}\left(\frac{x}{4}\right) + c$ **17.** $\frac{1}{3}\tan^{-1} x^3 + c$

**19.** $\text{sen}^{-1}\frac{x}{2} + c$ **21.** $\frac{1}{2}\,\text{sen}^{-1} x^2 + c$

**23.** $2\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + c$

**25.** $2\ln|x^2+2x+5| - 2\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + c$

**27.** $\frac{1}{5}x^5 + \frac{8}{3}x^3 + 16x + c$ **29.** $\text{sen}^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + c$

**31.** $2\,\text{sen}^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right) + c$ **33.** $\frac{10}{3}$ **35.** $\frac{12}{5}$

**37.** $\tan^{-1}(e^2) - \frac{1}{4}\pi$ **39.** $\frac{72}{5}$ **41.** $\frac{1}{2}\cosh 2x + c$

**43.** $\frac{1}{3}\ln(\cosh 3x) + c$ **45.** $\frac{1}{2}\operatorname{senh} x^2 + c$

**47.** $3\cosh^{-1} x + c$ **49.** $\frac{3}{2}\sec^{-1} x^2 + c$

**51.** $\frac{5}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + c$ **53.** $\frac{1}{4}(\ln x)^2 + c$

**55.** $-\frac{1}{2}e^{-x^2} + c$ **57.** $1 + \frac{1}{2}\ln 2 - \tan^{-1}(2) + \frac{1}{4}\pi$

## Ejercicios de la sección 7.2

**3.** $x \operatorname{sen} x + \cos x + c$ **5.** $\frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + c$

**7.** $\frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + c$

**9.** $-\frac{1}{3}x^2e^{-3x} - \frac{2}{9}xe^{-3x} - \frac{2}{27}e^{-3x} + c$

**11.** $\frac{1}{2}x^2 \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{2}x\cos 2x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + c$

**13.** $\frac{1}{17}e^x \operatorname{sen} 4x - \frac{4}{17}e^x \cos 4x + c$

**15.** $\frac{2}{3}\operatorname{sen} 2x \cos x - \frac{1}{3}\cos 2x \operatorname{sen} x + c$

**17.** $x\tan x + \ln|\cos x| + c$ **19.** $x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + c$

**21.** $\operatorname{sen} x \ln(\operatorname{sen} x) - \operatorname{sen} x + c$

**23.** $\frac{1}{2}x\operatorname{senh} 2x - \frac{1}{4}\cosh 2x + c$ **25.** $\frac{1}{4}\operatorname{sen} 2 - \frac{1}{2}\cos 2$

**27.** $-\frac{2}{\pi^2}$ **29.** $\frac{1}{\pi}$ **31.** $10\ln 10 - 9$

**33.** $x\cos^{-1} x - \sqrt{1-x^2} + c$

**35.** $-2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + 2\operatorname{sen}\sqrt{x} + c$ **37.** $n$ veces

**41.** $e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + c$

**43.** $\frac{1}{3}\cos^2 x \operatorname{sen} x + \frac{2}{3}\operatorname{sen} x + c$ **45.** $9e - 24$ **47.** $\frac{8}{15}$

**49.** $m$ par: $\dfrac{(m-1)(m-3)\cdots 1}{m(m-2)\cdots 2}\cdot\dfrac{\pi}{2}$

$m$ impar: $\dfrac{(m-1)(m-3)\cdots 2}{m(m-2)\cdots 3}$

**51.** primera columna: derivadas; segunda columna: primitivas

**53.** $x^4 \operatorname{sen} x + 4x^3\cos x - 12x^2 \operatorname{sen} x - 24x\cos x + 24\operatorname{sen} x + c$

**55.** $\left(\frac{1}{2}x^4 - x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}\right)e^{2x} + c$

**57.** $-\frac{1}{3}x^3e^{-3x} - \frac{1}{3}x^2e^{-3x} - \frac{2}{9}xe^{-3x} - \frac{2}{27}e^{-3x} + c$

## Ejercicios de la sección 7.3

**3.** $\frac{1}{5}\operatorname{sen}^5 x + c$ **5.** $\frac{1}{16}$ **7.** $-\frac{1}{3}\cos^3 x + c$

**9.** $\frac{1}{2}$ **11.** $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + c$ **13.** $\frac{1}{3}\sec^3 x + c$

**15.** $\frac{12}{35}$ **17.** $\frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\operatorname{sen} 4x + c$

**19.** $-\frac{1}{5}\operatorname{cosec}^5 x + \frac{1}{3}\operatorname{cosec}^3 x + c$ **21.** $-\frac{8}{21} + \frac{25\sqrt{2}}{168}$

**23.** $-\frac{1}{5}\cot^5 x - \frac{1}{3}\cot^3 x + c$ **25.** $\operatorname{sen}(x) + c$

**27.** $-\frac{1}{9}\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x} + c$ **29.** $\pi$

**31.** $\frac{3x}{2}\sqrt{\left(\frac{x}{3}\right)^2 - 1} + \frac{9}{2}\ln\left|\frac{x}{3} + \sqrt{\left(\frac{x}{3}\right)^2 - 1}\right| + c$

**33.** $2\cosh^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + c$

**35.** $\frac{3x}{2}\sqrt{\left(\frac{x}{3}\right)^2 + 1} - \frac{9}{2}\ln\left|\frac{x}{3} + \sqrt{\left(\frac{x}{3}\right)^2 + 1}\right| + c$

**37.** $\frac{1}{2}x\sqrt{16+x^2} + 8\ln\left|\frac{1}{4}\sqrt{16+x^2} + \frac{x}{4}\right| + c$

**39.** $9 - \dfrac{16\sqrt{2}}{3}$

**41.** $\frac{1}{4}\tan 4x + \frac{1}{2}\tan^2 x + c$; $\frac{1}{4}\sec^4 x + c$ **45.** $\frac{1}{2}RI^2$

## Ejercicios de la sección 7.4

**3.** $\dfrac{3}{x+1} - \dfrac{2}{x-1}$; $3\ln|x+1| - 2\ln|x-1| + c$

**5.** $\dfrac{2}{x+1} + \dfrac{4}{x-2}$; $2\ln|x+1| + 4\ln|x-2| + c$

**7.** $\dfrac{\frac{1}{5}}{x+2} + \dfrac{\frac{4}{5}}{x-3}$; $\frac{1}{5}\ln|x+2| + \frac{4}{5}\ln|x-3| + c$

**9.** $\dfrac{2}{x+1} + \dfrac{\frac{1}{2}}{x-2} - \dfrac{\frac{5}{2}}{x}$; $2\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x-2| - \frac{5}{2}\ln|x| + c$

**11.** $\dfrac{11}{x+4} + \dfrac{2}{x-2} + x - 2$;

$11\ln|x+4| + 2\ln|x-2| + \frac{1}{2}x^2 - 2x + c$

**13.** $\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{2}{x-1} + \dfrac{1}{x}$; $\ln|x+1| - 2\ln|x-1| + \ln|x| + c$

**15.** $\dfrac{2}{x+2} - \dfrac{1}{(x+2)^2}$; $2\ln|x+2| + (x+2)^{-1} + c$

**17.** $\dfrac{\frac{1}{4}}{x+2} + \dfrac{\frac{3}{2}}{(x+2)^2} - \dfrac{\frac{1}{4}}{x}$;

$\frac{1}{4}\ln|x+2| - \frac{3}{2}(x+2)^{-1} - \frac{1}{4}\ln|x| + c$

**19.** $\dfrac{1}{x+2} - \dfrac{3}{x+1} + \dfrac{2}{x}$; $\ln|x+2| - 3\ln|x+1| + 2\ln|x| + c$

**21.** $\dfrac{-2x+1}{x^2+1} + \dfrac{2}{x}$; $-\ln(x^2+1) + \tan^{-1} x + 2\ln|x| + c$

**23.** $\dfrac{\frac{3}{2}}{x+1} + \dfrac{\frac{1}{2}}{x-1} + \dfrac{-2x+1}{x^2+1}$;

$\frac{3}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x-1| - \ln(x^2+1) + \tan^{-1} x + c$

**25.** $3+\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x-2}$; $3x+\ln|x+1|+2\ln|x-2|+c$

**27.** $\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{1}{(x+1)^2}$; $2\ln|x+1|-(x+1)^{-1}+c$

**29.** $\dfrac{2}{x^2+1}+\dfrac{1}{x}$; $2\tan^{-1}x+\ln|x|+c$

**31.** $\dfrac{3}{x}+\dfrac{x-3}{x^2+x+1}$;

$3\ln|x|+\frac{1}{2}\ln|x^2+x+1|-\dfrac{7}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+c$

**33.** $3+\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{x-2}{x^2+1}$;

$3x+2\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-2\tan^{-1}x+c$

**35.** $\dfrac{4}{x^2+1}-\dfrac{2}{(x^2+1)^2}$ **37.** $\dfrac{2}{x^2+4}-\dfrac{4}{(x^2+4)^2}$

**39.** $\dfrac{4}{x^2+x+1}-\dfrac{4x+1}{(x^2+x+1)^2}$

**41.** $\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{1-y}$, $y=\dfrac{ce^{at}}{1+ce^{at}}$

## Ejercicios de la sección 7.5

**1.** $\dfrac{1}{8(2+4x)}+\dfrac{1}{16}\ln|2+4x|+c$

**3.** $\frac{2}{15}(3e^x-2)(1+e^x)^{3/2}+c$

**5.** $\frac{1}{8}x\sqrt{1+4x^2}-\frac{1}{16}\ln(2x+\sqrt{1+4x^2})+c$

**7.** $-\dfrac{\sqrt{3}}{12}+\dfrac{\pi}{9}$

**9.** $\ln(2+\sqrt{8})-\ln(1+\sqrt{5})$

**11.** $\dfrac{-1}{x-3}\sqrt{9-(x-3)^2}-\operatorname{sen}^{-1}\left(\dfrac{x-3}{3}\right)+c$

**13.** $\frac{1}{5}\tan^5x-\frac{1}{3}\tan^3x+\tan x-x+c$

**15.** $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\sqrt{4+\operatorname{sen}x}-2}{\sqrt{4+\operatorname{sen}x}+2}\right|+c$

**17.** $\frac{1}{2}\cos x^2+\frac{1}{2}x^2\operatorname{sen}x^2+c$

**19.** $-\frac{2}{3}(\cos x-2)\sqrt{1+\cos x}+c$

**21.** $\frac{1}{2}\operatorname{sen}x\sqrt{4+\operatorname{sen}^2x}-2\ln(\operatorname{sen}x+\sqrt{4+\operatorname{sen}^2x})+c$

**23.** $\frac{1}{4}e^{-2/x^2}+c$ **25.** $-\sqrt{4x-x^2}+2\cos^{-1}\left(\dfrac{2-x}{2}\right)+c$

**27.** $e^x\operatorname{tg}^{-1}(e^x)-\frac{1}{2}\ln(1+e^{2x})+c$

## Ejercicios de la sección 7.6

**3.** $-\frac{1}{4}$ **5.** 1 **7.** 3 **9.** 0 **11.** 1 **13.** $-\frac{1}{6}$

**15.** $\frac{1}{2}$ **17.** 0 **19.** 1 **21.** $-\pi$ **23.** 0 **25.** 0

**27.** $-2$ **29.** 0 **31.** 0 **33.** 0 **35.** $e$ **37.** $\infty$

**39.** 1 **41.** $e^x$ **43.** no es indeterminada **45.** $k$

**47.** (a) $\dfrac{(x+1)(2+\operatorname{sen}x)}{x(2+\cos x)}$ (b) $\dfrac{x}{e^x}$ (c) $\dfrac{3x+1}{x-7}$ (d) $\dfrac{3-8x}{1+2x}$

## Ejercicios de la sección 7.7

**3.** impropia **5.** no **7.** impropia **9.** impropia

**11.** $\frac{3}{2}$ **13.** diverge **15.** diverge **17.** 3

**19.** $2\sqrt{2}$ **21.** $-1$ **23.** diverge **25.** diverge

**27.** $-1$ **29.** diverge **31.** diverge **33.** $\pi$

**35.** diverge **37.** diverge **39.** $\pi$ **41.** diverge

**43.** 2 **45.** diverge **47.** $r=1$ **49.** $c<0$; $c>0$

**51.** $\dfrac{x}{1+x^3}<\dfrac{1}{x^2}$, converge **53.** $\dfrac{x}{x^{3/2}-1}>\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, diverge

**55.** $\dfrac{3}{x+e^x}<\dfrac{3}{e^x}$, converge **57.** $\dfrac{\operatorname{sen}^2x}{1+e^x}<\dfrac{1}{e^x}$, converge

**59.** $\dfrac{x^2e^x}{\ln x}>e^x$, diverge **61.** $\frac{1}{2}\ln 4-\frac{1}{4}$

**67.** (a) 2 (b) 4 (c) $r$ **69.** $\dfrac{1}{r}$ **71.** $e^{-1}\approx 3{,}7$

## Ejercicios de repaso del capítulo 7

**1.** $2e^{\sqrt{x}}+c$ **3.** $\frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1}x-\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+c$

**5.** $-\frac{1}{3}x^2e^{-3x}-\frac{2}{9}xe^{-3x}-\frac{2}{27}e^{-3x}+c$ **7.** $\frac{1}{2}\tan^{-1}x^2+c$

**9.** $\frac{1}{4}\ln(4+x^4)+c$ **11.** $\frac{1}{3}x^3+c$

**13.** $\frac{1}{9}\operatorname{sen}3-\frac{1}{3}\cos 3$ **15.** $\dfrac{3\pi}{16}$ **17.** $\dfrac{2}{\pi}$

**19.** $4\ln 2-\frac{15}{16}$ **21.** $\frac{1}{3}\operatorname{sen}^3x+c$

**23.** $\frac{1}{4}\operatorname{sen}^4x-\frac{1}{6}\operatorname{sen}^6x+c$ **25.** $\frac{1}{5}\tan^5x+\frac{1}{3}\tan^3x+c$

**27.** $\frac{2}{3}(\operatorname{sen}x)^{3/2}-\frac{2}{7}(\operatorname{sen}x)^{7/2}+c$ **29.** $\tan^{-1}\left(\dfrac{x+2}{2}\right)+c$

**31.** $-\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{2x}+c$ **33.** $-\dfrac{x^2}{3}\sqrt{9-x^2}-6\sqrt{9-x^2}+c$

**35.** $\dfrac{x^2}{3}\sqrt{x^2+9}-6\sqrt{x^2+9}+c$

**37.** $3\ln|x+1|-2\ln|x+2|+c$

**39.** $3\ln|x|+2\ln|x-2|-\ln|x+2|+c$

**41.** $\frac{1}{5}e^x\cos 2x+\frac{2}{5}e^x \operatorname{sen} 2x+c$

**43.** $\frac{1}{3}(x^2+1)^{3/2}+c$ **45.** $\frac{\frac{4}{5}}{x-4}-\frac{\frac{4}{5}}{x+1}$

**47.** $\frac{3}{x}-\frac{1}{x+2}-\frac{2}{x-1}$ **49.** $\frac{1}{x+2}-\frac{4}{(x+2)^2}$

**51.** $\frac{1}{8}e^x(4+2e^{2x})\sqrt{4+e^{2x}}-2\ln(e^x+\sqrt{4+e^{2x}})+c$

**53.** $\frac{1}{3}\tan x\sec^2 x+\frac{2}{3}\tan x+c$

**55.** $\frac{4}{3(3-x)}-\frac{4}{9}\ln\left|\frac{3-x}{x}\right|+c$

**57.** $-\frac{\sqrt{9+4x^2}}{x}+2\ln\left(x+\sqrt{\frac{9}{4}+x^2}\right)+c$

**59.** $\sqrt{4-x^2}-2\ln\left|\frac{2+\sqrt{4-x^2}}{x}\right|+c$ **61.** $\frac{3}{2}$ **63.** $\infty$

**65.** $e^3$ **67.** 1 **69.** diverge **71.** 3 **73.** $\pi$

**75.** diverge

## CAPÍTULO 8

### Ejercicios de la sección 8.1

**5.** $1, \frac{3}{4}, \frac{5}{9}, \frac{7}{16}, \frac{9}{25}, \frac{11}{36}$ **7.** $4, 2, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{30}, \frac{1}{180}$

**9.** converge a 0 **11.** converge a 1

**13.** converge a 0 **15.** converge a $\frac{3}{2}$ **17.** diverge

**19.** converge a $\frac{1}{3}$ **21.** diverge **23.** converge a 0

**25.** diverge **27.** converge a 0 **29.** converge a 0

**31.** diverge **33.** converge a 0 **39.** decreciente

**41.** creciente **43.** decreciente

**45.** decreciente, para $n>9$ **47.** $|a_n|<3$ **49.** $|a_n|<\frac{1}{2}$

**51.** $a_{1.000}\approx 2{,}716924$; $e\approx 2{,}718282$

**55.** $a_n=144-36\pi\approx 30{,}9$

**57.** 3,096, 3,144, 3,194; $3{,}594<3{,}721$; $4{,}376<4{,}473$; $5{,}589>5{,}33$; $4{,}131\times 10^{53}$ miles de millones

**61.** converge a 1 **63.** $\sqrt{c}$

### Ejercicios de la sección 8.2

**5.** converge a $\frac{15}{4}$ **7.** converge a $\frac{3}{8}$

**9.** diverge **11.** converge a 3

**13.** diverge **15.** diverge **17.** converge a 1

**19.** converge a $\frac{3}{2}$ **21.** diverge **23.** converge a 5

**25.** converge a 2 **27.** diverge **29.** converge

**31.** converge **33.** diverge **39.** 64; 256; $4^{m-1}$

**41.** $\frac{0{,}9}{1-0{,}1}=1$ **43.** $1{,}3589L$ **45.** 1,002004008…

**47.** $\frac{p^2}{1-2p(1-p)}>p$ si $p>\frac{1}{2}$; 0,692

**49.** $30+15+\frac{15}{2}+\cdots=60$ millas **51.** 400.000 euros

**53.** $2(1-e^{-0.1})\approx 0{,}19$ **55.** $\frac{ce^{-r}}{1-e^{-r}}$

### Ejercicios de la sección 8.3

**5.** diverge **7.** converge **9.** diverge

**11.** diverge **13.** diverge **15.** converge

**17.** converge **19.** converge **21.** diverge

**23.** diverge **25.** diverge **27.** converge

**29.** diverge **31.** converge **33.** diverge

**35.** diverge **37.** diverge **39.** converge

**45.** $p>1$ **47.** $p>1$ **49.** $\frac{1}{3\cdot 100^3}$ **51.** $\frac{6}{7\cdot 50^7}$

**53.** $6{,}73\times 10^{-696}$ **55.** 101 **57.** 4

**59.** (a) no se puede decidir (b) converge (c) converge (d) no se puede decidir

**63.** la serie converge para $x>1$ **65.** 1,0823, $x=4$

**67.** 1,0041, $x=8$

### Ejercicios de la sección 8.4

**5.** convergente **7.** convergente **9.** divergente

**11.** convergente **13.** convergente **15.** divergente

**17.** divergente **19.** convergente **21.** convergente

**23.** divergente **25.** convergente **27.** divergente

**29.** convergente **31.** 3,61 **33.** −0,23 **35.** 1,10

**37.** 3,78 **39.** 20.000 **41.** 11 **43.** 11

**45.** $f'(k)<0$ para $k\geq 2$

**47.** la parte positiva diverge, la negativa converge

**49.** $\frac{\frac{3}{4}}{1+\frac{3}{4}}=\frac{3}{7}$ **51.** 0,69314668

### Ejercicios de la sección 8.5

**5.** absolutamente convergente **7.** divergente

**9.** condicionalmente convergente

**11.** absolutamente convergente **13.** divergente

**15.** absolutamente convergente

**17.** absolutamente convergente **19.** divergente

**21.** condicionalmente convergente

**23.** absolutamente convergente

**25.** absolutamente convergente

**27.** absolutamente convergente

**29.** condicionalmente convergente

**31.** condicionalmente convergente
**33.** absolutamente convergente
**35.** absolutamente convergente **37.** divergente
**39.** absolutamente convergente
**41.** absolutamente convergente

### Ejercicios de la sección 8.6

**5.** $\sum_{k=0}^{\infty} 2x^k$, $r = 1$, $(-1, 1)$

**7.** $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 3x^{2k}$, $r = 1$, $(-1, 1)$

**9.** $\sum_{k=0}^{\infty} 2x^{3k+1}$, $r = 1$, $(-1, 1)$

**11.** $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 4^{k+1} x^k$, $r = \frac{1}{4}$, $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$

**13.** $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2^{2k+1}} x^k$, $r = 4$, $(-4, 4)$

**15.** $(-3, -1)$, $\frac{-1}{1+x}$

**17.** $(0, 1)$ $\frac{1}{2-2x}$ **19.** $(-2, 2)$, $\frac{2}{2+x}$

**21.** $\infty$, $(-\infty, \infty)$ **23.** 4, $(-4, 4)$

**25.** 3, $(-2, 4]$ **27.** 0, $\{x = -1\}$

**29.** 1, $[0, 2)$ **31.** 1, $(2, 4)$ **33.** $\infty$, $(-\infty, \infty)$

**35.** $\frac{1}{2}$, $\left[-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right]$ **37.** $\frac{1}{4}$, $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$

**39.** $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{3}{2k+1} x^{2k+1}$, $r = 1$

**41.** $\sum_{k=1}^{\infty} 2kx^{2k-1}$, $r = 1$ **43.** $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1} x^{2k+2}$, $r = 1$

**45.** $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} 4^{k-1} k x^{k-1}$, $r = \frac{1}{4}$ **47.** $(-\infty, \infty)$, $\{x = 0\}$

**49.** $(-\infty, 0)$, $(-\infty, 0)$ **51.** $(a - b, a + b)$, $r = b$

**53.** $r$ **55.** $r = 1$, 1,003005007...

**57.** esas dos series no tienen ningún punto de convergencia en común

### Ejercicios de la sección 8.7

**7.** $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$, $(-\infty, \infty)$

**9.** $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$, $(-\infty, \infty)$

**11.** $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}$, $(-1, 1]$

**13.** $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k+1) x^k$, $(-1, 1)$

**15.** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-1)^k}{k!}$, $(-\infty, \infty)$

**17.** $1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{e^{-k}}{k} (x - e)^k$, $(0, 2e]$

**19.** $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (x-1)^k$, $(0, 2)$

**21.** $1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + \frac{1}{40.320}x^8$

**23.** $1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3 - \frac{5}{128}(x-1)^4 + \frac{7}{256}(x-1)^5 - \frac{21}{1.024}(x-1)^6$

**25.** $e^2\left[1 + (x-2) + \frac{1}{2}(x-2)^2 + \frac{1}{6}(x-2)^3 + \frac{1}{24}(x-2)^4 + \frac{1}{120}(x-2)^5 + \frac{1}{720}(x-2)^6\right]$

**27.** $\frac{1}{2} - \frac{1}{16}(x-4) + \frac{3}{256}(x-4)^2 - \frac{5}{2.048}(x-4)^3 + \frac{35}{65.536}(x-4)^4$

**29.** $|R_n(x)| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$

**31.** $|R_n(x)| = \frac{1}{n+1}\left|\frac{x-1}{z}\right|^{n+1} \to 0$

**33.** (a) 0,04879 (b) $\frac{0{,}05^5}{5}$ (c) 7

**35.** (a) 1,0488 (b) $\frac{7(0{,}1)^5}{256}$ (c) 8

**37.** (a) 1,10517 (b) $\frac{1{,}5 \cdot (0{,}1)^5}{5!}$ (c) 6

**39.** $e^x$ con $x = 2$ **41.** sen $x$ con $x = \pi$

**43.** $\text{tg}^{-1} x$ con $x = 1$

**45.** $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2x)^k}{k!}$; $r = \infty$ **47.** $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{k!}$; $r = \infty$

**49.** $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{4k+2}}{(2k+1)!}$; $r = \infty$

**51.** $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{9^k x^{2k}}{(2k)!}$; $r = \infty$ **55.** $\frac{98}{3}$ millas

**57.** $e^c \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-c)^k}{k!}$

**61.** $1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2} - k + 1\right)}{k!} x^k$

### Ejercicios de la sección 8.8

**5.** 0,999231634426433 **7.** 0,94275466553403

**9.** 0,818730753079365 **11.** $-\frac{1}{2}$ **13.** $-\frac{1}{2}$ **15.** 1

**17.** $\frac{1.703}{900}$ **19.** $\frac{5.651}{3.780}$ **21.** $\frac{11}{30}$ **23.** $\infty$ **25.** 12

**27.** $\sqrt{0{,}2c} \approx 83.000$ millas/s **29.** $\frac{R}{20}$ **31.** no

**33.** demasiado grande

### Ejercicios de la sección 8.9

**5.** $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2}{k}$ sen $kx$

**7.** $\pi - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{(2k-1)^2\pi} \cos[(2k-1)x]$

**9.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{-4}{\pi(2k-1)} \operatorname{sen}[(2k-1)x]$ **11.** $3 \operatorname{sen} 2x$

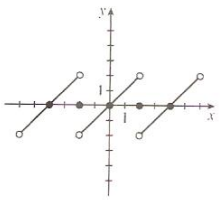
**13.** $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2}{k\pi} \operatorname{sen} k\pi x$

**15.** $\frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4}{k^2\pi^2} \cos k\pi x$

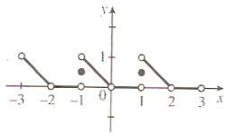
**17.** $\frac{1}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-2}{(2k-1)^2\pi^2} \cos(2k-1)\pi x +$

$+ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k\pi} \operatorname{sen} k\pi x$

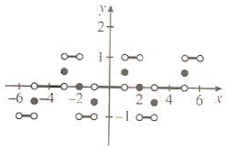
**19.**



**21.**



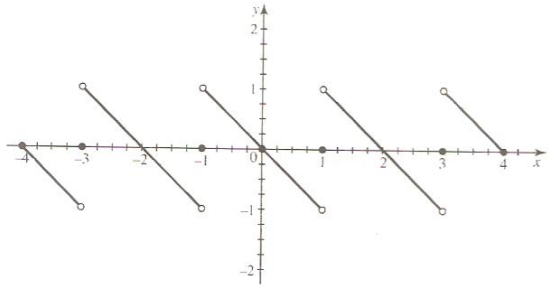
**23.**

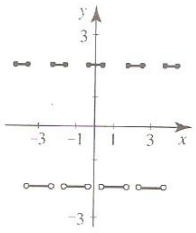


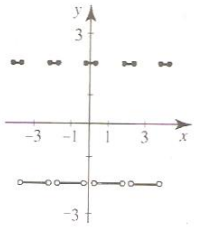
**33.** impar **37.** seno

**39.** ambos **41.** ambos

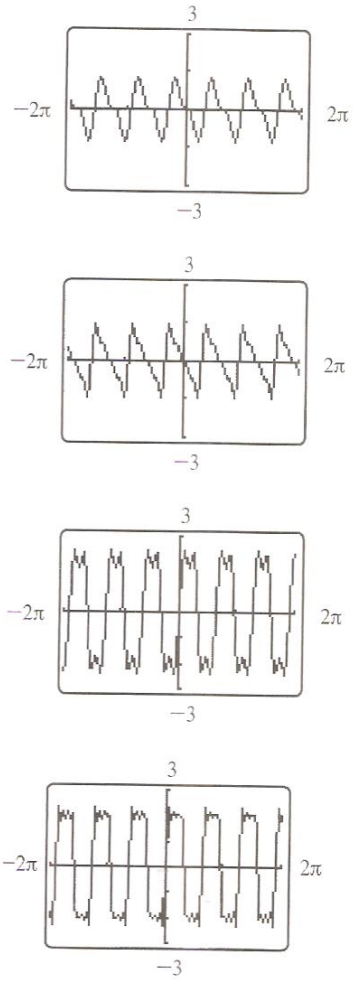
**45.**







**47.**



**51.** $A = -1, B = 4\pi; A = 1, B = 2\pi$

## Ejercicios de repaso del capítulo 8

**1.** converge a 0 **3.** converge a 0 **5.** converge a 0

**7.** diverge **9.** diverge **11.** no se puede decidir

**13.** diverge **15.** converge **17.** converge

**19.** 8 **21.** $\frac{4}{3}$ **23.** $-0{,}40$ **25.** diverge

**27.** converge **29.** diverge **31.** converge

**33.** converge **35.** converge **37.** converge

**39.** diverge **41.** converge **43.** converge

**45.** converge condicionalmente **47.** converge absolutamente

**49.** $p > 1$ **51.** 1.732 **53.** $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{4^{k+1}}, r = 4$

**55.** $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{3^k}, r = \sqrt{3}$

**57.** $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{(k+1)4^{k+1}} + \ln 4, r = 4$ **59.** $(-1, 1)$

**61.** $(-1, 1]$ **63.** $(-\infty, \infty)$ **65.** $\left(\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right)$

**67.** $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

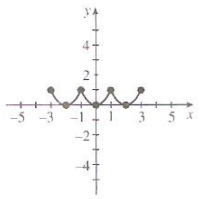
**69.** $(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4$

**71.** 0,1822666, 10

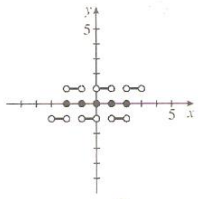
**73.** $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{3^k x^{2k}}{k!}, r = \infty$ **75.** $\frac{1.117}{2.520}$

**77.** $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{4}{k\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{2} x\right)$

**79.**




**81.**




**83.** $\frac{2}{3}$ **85.** $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

**87.** 2, 1,5, 1,67, 1,6, 1,625 → 1,618...

# BIBLIOGRAFÍA

Esta sección es en parte bibliografía y en parte agradecimientos, con su centro de atención puesto en las aplicaciones más que en los propios aspectos teóricos del cálculo. No intentamos dar una lista exhaustiva de libros cuya lectura es aconsejable, sino dar cuenta de las fuentes en las que nos hemos inspirado. Incluso así, esta lista es incompleta. Sería imposible dar la lista completa de libros y de cuantos profesores y estudiantes hemos aprendido Matemáticas. Hemos organizado la lista por capítulos y por temas.

## Capítulo 0

**Sucesión de Fibonacci:** un paseo por Internet descubre sitios interesantes. Dos de los muchos libros con discusiones interesantes de la concha espiral del *Nautilus* son:


[1] Huntley, H. E., *The Divine Proportion,* Dover Publications, 1970. (Subtitulado *A Study in Mathematical Beauty,* con varias conexiones de interés con el arte y la arquitectura.)

[2] Stewart, Ian, *Nature's Numbers,* Basic Books, 1995. (Una colección de ensayos asequibles sobre diversos tópicos de las matemáticas. Stewart es uno de los autores matemáticos más populares.)


**Música y matemáticas:** una conexión muy fuerte entre ambas se remonta a Pitágoras. El material desarrollado en el texto está adaptado de [3] y [4].


[3] Pierce, John R., *The Science of Musical Sound,* W. H. Freeman and Company, 1992. (Es una amplia introducción a la ciencia musical, muy técnica, pero con buenas explicaciones y abundantes figuras y diagramas.)

[4] Levenson, Thomas, *Measure to Measure,* Touchstone Books, 1994. (El subtítulo, *A Musical History of Science,* describe el objetivo del autor. Legible y bien escrito.)

[5] Hofstadter, Douglas, *Gödel, Escher, Bach,* Vintage Books, 1980. (Ganador de un premio Pulitzer. Un clásico de *puzzles* y exploraciones en matemáticas, arte y música.)


**Béisbol y estadística:** por desgracia, no ha habido *Baseball Abstract* desde 1988. Cada *Abstract* estaba lleno de observaciones sobre béisbol y análisis matemático de los deportes.


[6] James, Bill, *The Bill James Baseball Abstract 1988,* Ballantine Books, 1988.


**Fisiología:** los dos libros son interesantes indagaciones de cómo (y por qué) el cuerpo humano funciona como lo hace.


[7] Clark, William, *Sex and the Origins of Death,* Oxford University Press, 1996.

[8] Arking, Robert, *The Biology of Aging,* Sinauer Associates, 1998.


**Golf:** casi todo lo escrito en este libro proviene de los dos libros siguientes:


[9] Cochran, A. J., y M. R. Farrally, eds., *Science and Golf II,* E & FN Spon, 1994. [Una colección de artículos de investigación (del 1994 World Scientific Congress of Golf) sobre asuntos relacionados con el golf y de muy distinta complejidad.]

[10] Jorgensen, Theodore, *The Physics of Golf,* AIP Press, 1994. (Una investigación técnica, pero práctica, de los golpes de golf.)

**Calculadoras gráficas:** los manuales que las acompañan son muy útiles. Incluyen ejemplos e instrucciones básicas sobre el teclado. ¡Guarde el manual y úselo!

**Velocidad terminal:** este y otros muchos aspectos de deportes están presentes en el excelente libro de Brancazio. Muchos libros de física también tratan este asunto.

[11] Brancazio, Peter, *Sport Science,* Simon and Schuster, 1984. (Brancazio usa con entusiasmo los deportes con el fin de ilustrar los conceptos físicos y la física para explicar técnicas deportivas. Se disfruta con su lectura.)

**Caos:** una de las áreas de investigación que más han crecido en las dos últimas décadas. El libro de Gleick es el más conocido entre los de interés general. Los otros son textos de matemáticas.

[12] Gleick, James, *Chaos: The Making of a New Science,* Penguin Books, 1987. (Muy popular. Da una idea del arranque de la investigación sobre el caos.)
[13] Devaney, Robert, *Chaos, Fractals and Dynamics,* Addison-Wesley, 1990. (Una atractiva introducción a las matemáticas del caos. El subtítulo *Computer Experiments in Mathematics* es descriptivo.)
[14] Gulick, Denny, *Encounters with Chaos,* McGraw-Hill, 1992. (Un buen libro de texto para la teoría del caos. En parte, usa cálculo de nivel avanzado.)
[15] Barnsley, Michael, *Fractals Everywhere,* Academic Press, 1988. (No es un libro sencillo de leer, pero contiene magníficas imágenes relativas al juego del caos. Barnsley fundó una empresa que aplica, con éxito, las matemáticas del caos al procesado de imágenes.)

**Circunferencia de la Tierra:** la serie de vídeo *The Ring of Truth* es excelente, destacando varias exposiciones de cómo se descubren los conocimientos. El libro es un buen complemento de la serie.

[16] Morrison, Philip y Phylis, *The Ring of Truth,* Vintage Books, 1987.

## Capítulo 1

**Tamaño de las pupilas:** una referencia técnica para la ecuación que hemos citado es:

[17] Crawford, B. H., «The Dependence of Pupil Size upon the External Light Stimulus under Static and Variable Condition», *Proceedings of the Royal Society Series B,* **121** (1937).

***Knuckleball,* seguir la pelota con la mirada:** dos tópicos recurrentes a lo largo del libro, cuyas investigaciones originales se presentan de manera muy didáctica en el libro de Watts y Bahill, el mejor sobre la interacción entre física y béisbol.

[18] Watts, Robert, y A. Terry Bahill, *Keep Your Eye on the Ball,* W. H. Freeman, 1990.

**Cocodrilos del Mississippi:** uno de los ejemplos de interacción herencia-entorno propuestos en el libro de Goodwin. Cohen y Stewart dan ejemplos análogos.

[19] Goodwin, Brian, *How the Leopard Changed Its Spots,* Weidenfeld and Nicolson, 1994.
[20] Cohen, Jack, e Ian Stewart, *The Collapse of Chaos,* Viking Penguin, 1994.

**Historia de las matemáticas:** muchas de nuestras notas históricas han sido adaptadas de notas preparadas por el profesor V. Frederick Rickey. Hay varios libros de calidad en este campo. En la página web del Cálculo de Smith y Minton se ofrecen varios accesos recomendables.

[21] Simmons, George F., *Calculus Gems,* McGraw-Hill, 1992.
[22] Smith, David E., *A Source Book in Mathematics,* Dover Publications, 1959.
[23] members.aol.com/jeffs70/mathword.html.
[24] www-history.mcs.st-and.ac.uk/history.

**Efecto mariposa:** el emblema de la teoría del caos (véanse referencias [12]-[15]), cuyo nombre proviene de una analogía utilizada por Edward Lorenz, meteorólogo y pionero de la teoría del caos.

[25] Lorenz, Edward, *The Essence of Chaos,* University of Washington Press, 1993.

## Capítulo 2

**Velocidad de un atleta:** excelente discusión en Brancazio [11]. Véase también:

[26] Griffing, David F., *The Dynamics of Sports,* The Dalog Company, 1982.

**Colisiones:** véanse [11] y [26].

**Espejismos:** esta ilusión óptica se observa con toda su belleza en el vídeo.

[27] Greenler, Robert, «The Mirage, the Discovery of Greenland and the Green Flash», Blue Sky Associates, 1990.

**Probabilidad de extinción:** uno de los asuntos tratados en la sección de genética de un libro que estudia también la vida artificial y la ecología. Si es $x$ la probabilidad de extinción, ésta puede ocurrir de varias maneras: no hay nacimientos (probabilidad $p_0$), un nacimiento seguido de extinción (probabilidad $p_1$ por $x$), dos nacimientos, cada uno de los cuales se extingue (probabilidad $p_2$ por $x$ por $x$), etc. Así, pues, $x = p_0 + p_1x + p_2x^2 + \cdots = F(x)$.

[28] Sigmund, Karl, *Games of Life,* Oxford University Press, 1993.

**Bishop Berkeley, Leibniz:** véanse [21]-[24].

**Descenso por un plano:** adaptado de un problema en este interesante libro de cálculo.

[29] Strang, Gilbert, *Calculus,* Wellesley-Cambridge Press, 1991.

**Richard Feynman:** uno de los científicos más influyentes del siglo XX. Esta historia aparece en la película *Infinity*.

[30] Feynman, Richard, *Surely You're Joking, Mr. Feynman,* Bantam Books, 1986.

**Atrapar una pelota de béisbol al vuelo:** este artículo critica una teoría previa de cómo los jugadores vigilan la pelota en vuelo y propone un nuevo modelo.

[31] McBeath, M. K.; Shaffer, D. M., y Kaiser, M. K., «How Baseball Outfielders Determine Where to Run to Catch Fly Balls», *Science,* 28 abril 1995.

**Cocodrilos del Mississippi:** véase [20].

**Teoría del caos:** véanse [12]-[14] y [25].

**Curvas elípticas:** una introducción elemental a esta difícil, pero importante, área de las matemáticas.

[32] Brown, Ezra, «Three Fermat Trails to Elliptic Curves», *College Mathematics Journal,* mayo 2000.

## Capítulo 3

**Imágenes en medicina:** una explicación breve, muy buena, de este tipo de técnicas y otras formas de procesado digital pueden verse en:

[33] Friedhoff, Richard y William Benzon, *Visualization,* Abrams Publishers, 1989.

**Dominio de atracción:** más detalles y algunas bellas imágenes en color en:

[34] Devaney, Robert, y Linda Keen, eds., *Chaos and Fractals,* American Mathematical Society, 1988.

**Toneles de Kepler:** adaptado de:
[35] Balk, M. B., «The Secret of the Venerable Wine Cooper», *Quantum,* mayo 1990.

**Epidemiología del SIDA:** algunos estudios preliminares sobre esta terrible enfermedad han sido publicados, entre ellos los siguientes:
[36] Brookmeyer, Ron y Mitchell H. Gail, *AIDS Epidemiology: A Quantitative Approach,* Oxford University Press, 1994.
[37] Kirschner, Denise, «Using Mathematics to Understand HIV Immune Dynamics», *Notices of AMS,* febrero 1996.

**Probabilidad de extinción:** véase [28].

**Plagas de árboles:** este problema se discute en los libros:
[38] Murray, J. D., *Mathematical Biology,* Springer-Verlag, 1989. (Abundantes ejemplos en dinámica de poblaciones, epidemiología y esquemas de difusión y neuronales. Muchos modelos usan cálculo, en algunos casos más avanzado.)
[39] Strogatz, Steven, *Nonlinear Dynamics and Chaos,* Addison-Wesley, 1994. (Magnífica introducción al caos con ejemplos muy bien elegidos.)

**Vuelo de aeronaves:**
[40] Renz, Peter, «Thoughts on *Innumeracy:* Mathematics Versus the World?», *The American Mathematics Monthly,* Mathematical Association of America, octubre 1993.
[41] Biddle, Wayne, «Skeleton Alleged in the Stealth Bomber's Closet», *Science,* 12 mayo 1989.

**Ritmos cardíacos:** la teoría del caos ha ejercido profunda influencia sobre la fisiología humana en general y sobre la cardiología en particular. La interconexión entre orden y desorden es fascinante.
[42] Glass, Leon, y Michael Mackey, *From Clocks to Chaos,* Princeton University Press, 1988. (Subtitulado *Rythms of Life,* contiene innumerables gráficas y algo de cálculo y ecuaciones diferenciales que usa para explicar procesos fisiológicos.)
[43] Kaplan, Daniel, y Leon Glass, *Understanding Nonlinear Dynamics,* Springer-Verlag, 1995. (Ejemplos análogos a los del [42], pero más enfocados hacia los aspectos matemáticos.)

**Reacciones autocatalíticas:** una colección de breves modelos matemáticos para diversos procesos biológicos y químicos puede verse en:
[44] Thrall, Robert M., ed., *Some Mathematical Models in Biology,* University of Michigan, 1967.

**Valoración de ácidos:**
[45] Harris, Daniel, *Quantitative Chemical Analysis,* 3.ª edición, W. H. Freeman, 1991.

**Láser:** véase [39].

## Capítulo 4

**Epidemiología HIV:** véanse [36]-[38].

**Aterrizaje de un transbordador espacial:** el movimiento de proyectiles junto con algunas ecuaciones específicas para el transbordador se pueden ver en el artículo:
[46] Long, Lyle y Howard Weiss, «The Velocity Dependence of Aerodynamic Drag: A Primer for Mathematicians», *The American Mathematical Monthly,* Mathematical Association of America, febrero 1999.

**Sincronía de las luciérnagas:** véanse [39] y la serie de vídeos.
[47] *The Trials of Life: Talking to Strangers,* Ambrose Video Publishing.

## Capítulo 5

**Diseño de raquetas de tenis:** breve discusión en [11] y [48]. Más detallada en [49] y [50], dos interesantes colecciones de ensayos sobre deportes.

**[48]** Schrier, Eric, y William Allman, eds., *Newton at the Bat,* Charles Scribner's Sons, 1987. (Una mirada pormenorizada sobre ciertos aspectos del tenis. Numerosas figuras.)

**[49]** Torrey, Lee, *Stretching the Limits,* Dodd, Mead and Company, 1985. (Una mirada pormenorizada sobre ciertos aspectos del tenis. Numerosas figuras.)

**[50]** Brody, Howard, *Tennis Science for Tennis Players,* University of Pennsylvania Press, 1987. (Una mirada pormenorizada sobre ciertos aspectos del tenis. Numerosas figuras.)

**Fuerzas en el béisbol:** el libro de Adair es una exposición muy completa de la física del béisbol. Véase también [18].

**[51]** Adair, Robert, *The Physics of Baseball,* Harper and Row, 1990.

**Tendones y arco del pie:** dos ejemplos sacados de una excelente discusión de los movimientos animales al caminar, reptar, nadar o volar.

**[52]** Alexander, R. McNeill, *Exploring Biomechanics,* Scientific American Library, 1992.

**Movimiento de proyectiles:** muchos de nuestros mejores ejemplos provienen de Brancazio [11] y Alexander [52]. Una discusión general, pero matemáticamente avanzada, puede verse en:

**[53]** deMestre, Neville, *The Mathematics of Projectiles in Sports,* Cambridge University Press, 1990.

**Resistencia del aire:** véanse [46] y el siguiente módulo, muy bien escrito.

**[54]** Donley, H. Edward, «The Drag Force on a Sphere», UMAP Module 712, COMAP, Inc., 1991.

***Knuckleball:*** véase [18].

**Punto dulce:** véanse [11], [18], [49] y [50].

**Estadísticas de alturas:** miles de observaciones sobre nuestro entorno.

**[55]** Brandreth, Gyles, *Your Vital Statistics,* Citadel Press, 1986.

**Modelos para cohetes:** en el diseño de cohetes intervienen sofisticados principios científicos.

**[56]** Stine, G. Harry, *Handbook of Model Rocketry,* 6.ª edición, John Wiley and Sons, 1994.

**Salto con pértiga:** uno de los deportes discutidos en este libro dedicado a los Juegos Olímpicos.

**[57]** Mallette, Vincent, *The Science of the Summer Games,* Charles River Media, 1996.

## Capítulo 6

**Estación espacial internacional:** la página web de la NASA es magnífica.

**Mapa de Mercator:** diversas técnicas para la elaboración de mapas y sus usos (y abusos) en este libro único.

**[58]** Monmonier, Mark, *How to Lie with Maps,* University of Chicago Press, 1991.

**El número *e*:** la larga y apasionante historia de *e* y de la función exponencial.

**[59]** Maor, Eli, *e: The Story of a Number,* Princeton University Press, 1994.

**Funciones sigmoidales:** su papel como modelo en la fisiología humana queda expuesto con detalle en [42].

**Lemmings:** una exploración de los intentos para explicar los cambios en su población es el foco de esta honesta descripción de la ecología de poblaciones. Subtitulado *Beautiful Hypotheses and Ugly Facts.*

**[60]** Chitty, Dennis, *Do Lemmings Commit Suicide?* Oxford University Press, 1996.

**Datación por carbono-14:** un ejemplo común en los textos de cálculo y de ecuaciones diferenciales, pero Braun explica cómo se hace en realidad.

**[61]** Braun, Martin, *Differential Equations and Applications,* Springer-Verlag, 1975.

**Umbral crítico, *Choristoneura fumiferan:*** véanse [38] y [39].

**Resistencia del aire:** véanse [45] y [54].

**Franjas de las cebras:** véanse [38] y [39].

**Béisbol (atrapar una pelota al vuelo):** véase [31].

**Arco Gateway:** excelente la página web del Jefferson National Expansion Memorial. Algunos cálculos interesantes pueden consultarse en el módulo:

**[62]** Thayer, William, «The St. Louis Arch Problem», UMAP Module 638, COMAP, 1984.

## Capítulo 7

**Transformadas de Laplace:** la mayoría de los textos sobre ecuaciones diferenciales le dedican un capítulo (véase [61]).

**Modelos matemáticos:** varios libros aplican ecuaciones diferenciales como modelos de fenómenos físicos.

**[63]** Wan, Frederic, *Mathematical Models and Their Analysis,* Harper and Row, 1989.

**[64]** Giordano, Frank, y Maurice Weir, *A First Course in Mathematical Modeling,* Brooks/Cole, 1985.

**Jaime Escalante:** dramatizada en la película *Stand and Deliver*, la vida de este brillante profesor de matemáticas se narra en:

**[65]** Mathews, Jay, *Escalante,* Henry Holt and Company, 1988.

**Capa de ozono:** uno de los ejemplos químicos del doctor Ben Huddle (Roanoke College).

**Tablas de integrales:** un PCS como Mathematica puede tener tablas mejores que las de estas referencias clásicas:

**[66]** Beyer, W. H., ed., *Standard Mathematical Tables and Formulas,* 29 edición, CRC, 1991.

**[67]** Jeffrey, Alan, ed., *Gradshteyn and Ryzhik's Tables of Integrals, Series and Products,* 4.ª edición, Academic Press, 1995.

**Braquistocrona y tautocrona:** dos problemas matemáticos clásicos. Una de las mejores exposiciones de las matemáticas y de las personalidades involucradas es:

**[68]** Dunham, William, *Journey Through Genius,* John Wiley and Sons, 1990.

## Capítulo 8

**Sintetizadores musicales:** véanse [3] y [4]. Hemos usado el manual del sintetizador Roland Synth-Plus 60.

**Explosión de población:** uno de los modelos de población más extremos.

[69] Forster, Mora y Amiot, «Doomsday, Friday, 13 Nov. A.D. 2026», *Science,* noviembre 1960.

**Sucesión de Fibonacci:** véanse [1] y [2].

**Conjunto de Cantor:** véase [14] para más detalles acerca de este conjunto singular.

**Botes de una pelota:** una colección de modelos de caos interesantes y bien desarrollados, con software incorporado.

[70] Tufillaro, Nicholas, Tyler Abbott y Jeremiah Reilly, *An Experimental Approach to Nonlinear Dynamics and Chaos,* Addison-Wesley, 1992.

**Línea de espera:** segundo volumen de un clásico en teoría de probabilidades.

[71] Feller, William, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications,* volumen 2, John Wiley, 1966.

**Ramanujan:** la vida de este genio autodidacta, tal vez el matemático más interesante de la historia, se narra en el magnífico libro:

[72] Kanigel, Robert, *The Man Who Knew Infinity,* Washington Square Press, 1991.

**Fracciones inusuales:** varias representaciones decimales curiosas y cómo se construyen.

[73] Kreminski, Richard, «Fun Fractions», *Mathematics Teacher,* National Council of Teachers of Mathematics, julio 1998.

**Fenómeno de Gibbs y procesado de imágenes:** véase [33].

**Fracciones continuas:** una visión muy viva, a menudo irreverente, de aspectos matemáticos relativos al número $\pi$.

[74] Beckmann, Petr, *A History of* $\pi$, St. Martin's Press, 1971.

# CRÉDITOS

## CAPÍTULO 0

Opener: Siede Preis/PhotoDisc

## CAPÍTULO 1

81 (top): Stewart Westmorland/Stone; 81 (center & bottom): Roland Minton; 108: Corbisx, PG16418; 126: Corbis, PG16388>3

## CAPÍTULO 2

149 (top): Mike Powell/AllSport USA; 149 (bottom): PhotoDisc, vol. 10; 170: Archive Photos

## CAPÍTULO 3

3.1: Fonar Corporation; 3.2 (a & b): Courtesy of Vicom Systems; 3.3: The Granger Collection; 3.4: The Granger Collection; 3.8: The Granger Collection; 3.89: BSIP Agency/Index Stock Imagery

## CAPÍTULO 4

321 (top): PhotoDisc, vol. 29; 321 (bottom): Center for Disease Control: 322: NASA; 337: Corbis, PL8866>8; 347: The Granger Collection; 389: University of St. Andrews

## CAPÍTULO 5

401 (top): Russell Illig/PhotoDisc, SP003069; 401 (center): Roland Minton; 412: The Granger Collection; 460: Robert Cameron/Stone: 468: Culver Pictures

## CAPÍTULO 6

479 (top): Photo Researchers, Inc.; 479 (bottom): PhotoDisc, vol. 54; 486: Michael Maslan Historic Photographs/Corbis, IH12111; 521: Corbis, BE064928; 543: PhotoDisc, vol. 16

## CAPÍTULO 7

Opener: RDF/Visuals Unlimited; 561: Archive Photos; 608: Corbis, IH015166

## CAPÍTULO 8

621 (top): Leonard Lessin/Photo Researchers, Inc.; 621 (bottom): PhotoDisc, vol. 34; 648: The Granger Collection; 670: The Granger Collection; 705: The Granger Colelction; 8.52: PhtoDisc. vol. 15; 717: Vicom Systems

# ÍNDICE


## A

Abeto balsámico, 215
Abierto, intervalo, 3
  continuidad en un, 89
Absoluta, área, 297
Absoluta, convergencia, 574-576
Absoluto, máximo, 217
Absoluto, mínimo, 217, 230
Absoluto, valor, 5-6
  derivada del logaritmo del, 276
Absolutos, extremos, 217
  aproximados, 223
  de funciones continuas, 218
  en un intervalo cerrado, 222
Aceleración, 150-151
  angular, 314
Ácido-base, constante de disociación, 266
Acotada, sucesión, 542
Actual, valor, 556
Adición, principio de, 395
Afín, transformación, 20
Afinación de un piano, 8, 40, 622
Agua, depósito de, 385-386
  ritmo de cambio y volumen, 312
Aire, resistencia del, 271, 379, 445, 472
Algebraicas, funciones, 42
Alternada, serie armónica, 567-568
Alternadas, criterio para series, 568-569, 580
Alternadas, series, 567-572
  divergentes, 570
  estimación de la suma, 571-572
Altura
  de los humanos, 395-396
  oblicua, 370
  de una torre, 38-39
Ambiente, temperatura, 432
Amplitud (AM), modulación de la, 494
Amplitud, cambio de la, 36
Análisis matemático, 103
Analógicos, cálculos, 132
Angular, aceleración, 314
Angular, velocidad ,134, 314
Ángulo(s)
  agudo, 38
  radianes *vs.* grados, 33
Antiderivación, 196, 269
Anual, porcentaje de rendimiento, 170, 176, 434
Aprendizaje, curva de, 263
Aproximación
  área, por rectángulos, 289
  por bisecciones, 91
  con calculadora, 203
  por diferenciales, 204
  de integrales definidas, 295, 604-606
  lineal, 203-206
  por el método de Euler, 449-452
  método de Newton, 210-214
  Padé, 176
  polinomios de Taylor, 595-596, 602, 604-606
  recta tangente, 203-206
  regla del punto medio, 295, 324-325
  regla de Simpson, 328-330
  regla de los trapecios, 327-328
  sucesivas, 211
  por sumas de Riemann, 291-292
Arandelas, método de las, 353-357
Arco del pie, 347
Arco, longitud de, 61-62, 367-370
Arcocoseno, 455
Arcosecante, 456
Arcoseno, 454
Arcotangente, 456
Área, 287-292. *Véase también* Superficie, área de una
  absoluta, 297
  aproximación por rectángulos, 289
  bajo una curva, 289-292
  entre dos curvas, 340-345
  máxima, 249-250
  con signo, 297
  por el teorema fundamental, 308
Área, función, 310
Armónica, serie, 552-554
Armónico, contenido, 622
Arquímedes, 348
Asincronía perfecta, 337
Asíntota(s)
  horizontales, 97, 99, 240
  oblicuas, 99-100
  verticales, 23-25, 95, 240
  gráficas con dos, 242-243
Asintótica, criterio de comparación (en el límite), 563-565, 580
Asintótico, valor, 264
Astroide, 374
Atractores, 121
Áurea, razón, 374, 625
Autocatalítica, reacción, 259
Automáticas, ventanas gráficas, 21
Autopistas, coste de construcción de, 254-255
Axioma de completitud, 543-544

## B

Bacterias, crecimiento de, 41, 176, 429-431, 436
Bahill, Terry, 379
Bailey, Donovan, 123
Baloncesto
  ángulo del balón, 258
  ruido del público, 51
  tiro libre, 102-103, 382, 403
Base
  de una exponencial, 42, 170
  de logaritmos, 45
Beckmann, Petr, 625
Béisbol
  altura del lanzamiento, 382
  ángulo de la pelota, 32, 200
  bate con corcho, 394
  centro de masa del bate, 389, 390
  impulso del bate, 387
  *knuckleball,* 73, 379-380
  lanzamientos altos, 458
  seguir la pelota con la mirada, 121, 189, 460-461
  velocidad angular de la pelota, 314
  velocidad de la pelota, 32, 73, 161, 393
Beneficios, 266
Bernoulli, Johann, 207
Bessel, función de, 606-607
Bifurcación, punto de una función, 32, 121
Bisección, método de, 32, 91
Boltzmann, integral de, 531
Boyle, ley de, 190
Braquistocrona, 510
Brouncker, vizconde, 625
Brown, Ezra, 190

## C

Caballo de potencia (HP), 392
Cable colgante, 467
Cadena, regla de la, 161, 175, 176-181, 311
Caída, objeto en
  distancia, 311-312
  posición, 278
Calculadoras
  científicas, 202
  gráficas, 20-25, 30-31, 68, 227-228
Cálculo simbólico, programas de (PCS)
  gráficas, 20-25, 68, 114-118
  integración, 506-509
Cambio, ritmo de. *Véase* Ritmo de cambio
Campana, curva en forma de, 294, 398
Campo
  de direcciones (de pendientes), 445-447
  vectorial. *Véase* Vectorial, campo
Cantor, conjunto de, 556
Caos matemático, 121, 403
Caos, juego del, 64
Caos, teoría del, 121
Capas, método de, 360-365
Carbono-14, 431-432
Carga
  axial, 215
  de pandeo, 215
Carga axial, 215
Cartesiano, plano, 6-7
Catenaria, 465, 467
  deducción de la, 469-470
Cauchy, Augustin Louis, 103
Cebras, franjas de las, 453
Censo, 9
Centro de masa, 388-391
Centroide. *Véase* Centro de masa
Cero, multiplicidad de un, 85, 518
Ceros de funciones, 28, 29, 210
  aproximación, 212
  determinación de su número, 193
Cerrado, intervalo, 3
  continuidad en un, 89
1-ciclo, 121
2-ciclo, 121
Ciclo de cuatro, 121
Cilíndricas, capas, volumen calculado por, 360-365
Cilindro(s), 253-254, 348
Cinética, energía, 383

Circuito eléctrico. *Véase* Eléctrico, circuito
Circunferencia
  rectas tangentes a una, 124
Circunferencia de la Tierra, 40
Clark, William, 20
Cociente incremental, 126
Cociente, criterio del, 576-578, 580, 587
Cociente, regla del, 156-158, 179-180
Coeficiente(s)
  de Fourier, 609
  de una función densidad de probabilidad, 399
  en una integral indefinida, 272-273
  de un polinomio, 14
  de restitución, 161, 287, 546
  de una serie de potencias, 583
Cohetes, teoría de los, 392, 393
Colgante, combadura de un cable, 467
Colineales, puntos, 10
Comparación, criterio de
  asintótica (en el límite), 563-565, 580
  para integrales, 527-529
  para series, 561-565, 580
Completar el cuadrado, 57, 58-59
Completitud, axioma de, 543
Composición de funciones, 53
  continuidad, 88-89
Compuesto, interés, 434-435
Concavidad, 232-237
Concentración de un producto químico, 180-181
Concha del *Nautilus*, 1
Condicional, convergencia, 574-575
Conjunto de Cantor, 556
Cono circular recto, 371
Constante(s)
  de integración, 272
  de un muelle, 384
  suma de, 282
Constante, función, 13-14
Continua, distribución, 397
Continua, fracción, 625
Continua, variable, 264
Continuamente, compuesto, 434
Continuidad
  de funciones, 85-86
  de funciones compuestas, 88-89
  de funciones racionales, 86-88
  en un intervalo, 89
  por la izquierda, 94
  a trozos, 301
Contradicción, demostración por, 8
Convergencia
  absoluta, 574-576
  condicional, 574-575
  de integrales impropias, 520-522, 524-525
  intervalos de, 583, 584
  lenta, método de Newton, 213-214
  lineal, 216
  radio de, 583, 584
Coordenadas, ejes de, 6
Corolario, 76
Corriente (intensidad de), 259
  instantánea, 259
  media, 259
Cosecante, función, 35, 36
  derivada, 166
Coseno, función, 33
  cambio de amplitud, período y frecuencia, 36-37
  combinada con el seno, 37-38
  derivada, 165, 166
  gráfica, 34, 246-247
  hiperbólico, 465
  hiperbólico inverso, 468
  integral, 274-275
  inversa, 455
  límites, 163-164
Cosenos, series de Fourier de, 622
Coste
  marginal, 262-263
  medio, 189, 239
  minimización del, 253-255
Coste, función, 239
Cotangente, función, 35
  derivada, 166
Creciente, función, 22, 138, 145, 225-230
Creciente, sucesión, 540-542
Crecimiento logístico, 441-443
Crecimiento, constante de, 429
Crecimiento, problemas de, 429-431
Crítico, umbral, 447-448
Críticos, números, 219, 221
Cuadrada, función raíz, 15
  derivada, 138
Cuadrada, onda, 611-613, 616-618, 622
Cuadrática, desigualdad, 4
Cuadrática, fórmula, 28
Cuadrática, función, 14. *Véase también* Parábola
  derivada, 137
Cuártica, función, 14
Cúbica, función, 14, 22-23, 29-30
  aproximación, 212-213
  aproximación lineal, 120-121
Curva(s)
  área bajo una, 290-291
  área entre, 340-345
  de crecimiento de Gompertz, 225
  elíptica, 190
  estimación de la pendiente, 60-61
  en forma de campana, 294, 398
  longitud, 61-62
  ortogonales, 190
  rectas tangentes, 124-125
Curvas, ajuste de, 49
Cosh, función, 465
*Choristoneura fumiferana*, 215

## D

Decibelio, 51
Decreciente, función, 22, 138, 145, 225-230
Decreciente, sucesión, 541
Déficit, 264
Definida(s), integral(es), 270, 294-304
  aproximación, 295, 604-606
  aproximación por series de Taylor, 604-606
  área, 287
  área de una superficie, 370-372
  cálculo exacto, 308
  con funciones exponenciales, 308
  integración por partes, 484
  con logaritmos, 309
  con límite superior variable, 309-310
  longitud de arco, 367-370
  relación con el área con signo, 298-299
  sustitución, 321
  teorema fundamental, 308
δ (delta), 105
Demanda, función, 206
Demostración
  por contradicción, 8
  por inducción, 84, 285
Densidad
  de una varilla fina, 260
  lineal, 261
  lineal media, 260
  de masa, 260
  de probabilidad, 397
Dependiente, variable, 13
Deportes, 159-160
Derecha, límite lateral por la, 69-70
Derivable, función, 135, 140-141
Derivación, 136
  implícita, 182-188
  numérica, 141-142
  de series de potencias, 586-587
  simplificaciones, 412
Derivada(s), 60, 124, 135-142
  estimación numérica, 141-142
  forma alternativa, 135
  de la función raíz cuadrada, 138-139
  de funciones exponenciales, 170-173, 424-427
  de funciones hiperbólicas, 466
  de funciones logarítmicas, 174-175
  de funciones polinómicas, 137
  de funciones racionales, 137-138
  de funciones trigonométricas, 162-168, 179
  de funciones trigonométricas inversas, 460
  notación, 140
  de orden superior, 149-150
  parciales. *Véase* Parciales, derivadas
  en un punto, 135-136
  regla del cociente, 156-158, 179-180
  regla del producto, 154-156, 166
  reglas, 148-149
  reglas de las potencias, 145-148, 158
  segunda, 149
  tercera, 150
Descomposición en fracciones simples, 442, 490-493
Desierto, espejismo en el, 134
Desigualdad
  polinómica, 4
  triangular, 5
  lineal, 3-4
  valor absoluto, 5-6
Desintegración, constante de, 431
Desintegración, problemas de, 432-434
Desviación típica, 403
Deuda, 264
Diferencia
  pérdida de significado en la, 115-116
Diferencial, 204
Diferencial, operador, 140
Diferenciales, ecuaciones, 271
  campo de direcciones (de pendientes), 445
  por fracciones simples, 500-501
  ley de enfriamiento de Newton, 432-434
  logística, 264
  método de Euler, 449-450
  modelo para el SIDA, 232
  movimiento de una viga, 408
  ordinarias de primer orden, 438
  problemas de crecimiento, 429
  problemas de desintegración, 431
  problemas de valores iniciales, 440
  separables, 438-443
  solución general, 440-441
  soluciones de equilibrio, 442
Dinámica no lineal, 121
Direcciones (pendientes), campo de, 445-447
Discontinuidad, 32, 85-86
  evitable, 86
  no evitable, 87
Discontinuo, integrando, 301-302
  en integrales impropias, 518-522
Discos, método de los, 351-353
Discreta, variable, 264
Discreta, densidad de probabilidad, 397
Distancia
  fórmula de la, 123-127
  entre números reales, 5
  orientada, 128
  entre puntos, 7
Distribución
  continua, 397
  discreta, de probabilidad, 397
  normal, 398
Divergencia
  criterio de, 552
  de una integral impropia, 520-522, 524-525
  de una serie, 548, 551, 562, 570, 578
  de una sucesión, 535, 537, 547
Dominio, 13, 240
Dominio de atracción, 216
Dosificación de fármacos, 419-420
Duplicación, tiempo de, 431

## E

*e*, 42-43, 45
Ecuación (ecuaciones)
  diferenciales. *Véase* Diferenciales, ecuaciones

logística, 264
momento-impulso, 306, 387
de movimiento vertical, 376
pendiente-intersección, 11
punto-pendiente, 11
de rectas, 9-13
de rectas tangentes, 126-127, 149, 155-156, 168
resolución, 28-31
de segundo grado, 437
con seno y coseno, 34-35
de Van der Waals, 161, 183, 186
Einstein, teoría de la relatividad de, 102, 215
Eje(s) de coordenadas, 6
ECG. *Véase* Electrocardiograma
Eléctricos, circuitos
análisis de, 167
modelos de, 259
potencia absorbida, 257
Electrocardiograma (ECG), 261, 414
Elementales, funciones, 280, 324
Elíptica, integral, de segunda clase, 373
Elípticas, curvas, 190
Encaje, teorema del, 81-82, 538-539
Energía
cinética, 383
potencial, 383
Enfriamiento, ley de Newton del, 432-434
Enteros, 2, 147, 537
Entropía, 225
Epidemias, propagación de, 145, 269
Epidemiología, 145, 269
ε (épsilon), 104
Equilibrio
estable, 448
inestable, 448
Equilibrio, soluciones de, 442, 448
Equivalencia, punto de, 266
Eratóstenes, 40
Error(es)
estimación por el criterio integral, 560
función erf, 414, 601
en integración numérica, 330-333
pérdida de significado, 116-118
en series alternadas, 571
Error, cotas de, 571
Escalante, Jaime, 485
*Escherichia coli*, 429
Esfera, 190
Espacial, estación, 407
Espacial, módulo, 270-271, 279, 608
Especiales, funciones, 605
Espectral, análisis, 620
Espúrea, solución, 32
Estable, equilibrio, 448
Estación espacial internacional, 407
Estimación inicial, 211
Estroncio-90, 436
Euler, constante de, 556
Euler, fórmula de, 601
Euler, Leonhard, 43, 445
Euler, método de, 445-452
mejorado, 453
Euler-Fourier, fórmulas de, 611
Evaluación, puntos de, 291
Evitable, discontinuidad, 86
Existencia, teoremas de, 90-91
Explícita, función, 182
Exponencial, ley de crecimiento, 430
Exponencial, ley de decrecimiento, 430
Exponenciales
base, 42
cálculo de valores de, 43
cambio de base, 47
Exponenciales, funciones, 41, 42, 422-427
derivadas, 170-173, 424-427
gráficas, 44
integrales definidas que contienen, 308
regla de la cadena para, 178
Exponente, 42, 115
Exponentes, reglas de los, 42
Extinción, 403
Extrapolación, 12
Extremo(s)
absolutos. *Véase* Absolutos, extremos
relativos. *Véase* Relativos, extremos
Extremo, teorema del valor, 218
Extremos (puntos terminales) de un intervalo, 3


## F


Factor, teorema del, 29
Factorial, 540
Factorización, 28, 78
Familia de soluciones, 439
Fases, plano de, 403
fdp (función densidad de probabilidad), 397-399
Feller, William, 555
Fermat, Pierre de, 220, 397
Fermat, teorema de, 220
Feynman, Richard, 153
Fibonacci (Leonardo de Pisa), 1, 546
Fibonacci, sucesión de, 1, 546, 625
Fija, ventana gráfica, 21
Fijo, punto, 58
Finita, precisión, 115
FM, 248
Fourier, coeficientes de, 609
Fourier, Jean Baptiste Joseph, 610
Fourier, serie de cosenos, 622-623
Fourier, series de, 486, 608-620
Fourier, series de senos, 620, 622-623
Fourier, teorema de convergencia de, 618-619
Fracciones
continuas, 625
desigualdades con, 4
simples, 490-493
Fractales, 63-64
Frecuencia, modulación de (FM), 248
Frecuencia, 36
relativa, 395
Fuerza
gravitatoria, 271, 375
hidrostática, 390-392
de Magnus, 379
resistencia del aire, 271, 379, 383, 445, 472
de rozamiento, 94
Función (funciones), 13
aceleración, 150-151
algebraicas, 42
área, 310
beneficio, 266
de Bessel, 606-607
ceros. *Véase* Ceros de una función
comportamiento global, 23
comportamiento local, 23
composición, 53
concavidad, 232-237
continua, 85-86
por la izquierda, 94
continuas a trozos, 301
coseno. *Véase* Coseno, función
coste, 239
coste medio, 239
creciente, 22, 138, 145, 225-230
cosh, 465
decreciente, 22, 138, 145, 225-230
definidas a trozos, 82
demanda, 206
densidad de probabilidad (fdp), 397-399
derivable, 135, 140-141
derivada, 135, 136-139
discontinua, 85-86
dominio, 13, 240
elementales, 279, 324
entero máximo, 85
error, 414, 601
especiales, 605
exponenciales. *Véase* Exponenciales, funciones
extremos absolutos, 218
extremos relativos (locales), 21
gráfica. *Véase* Gráficas
hiperbólicas, 465-470
impar, 59, 621
implícita, 182
impulso, 337
ingresos, 159
integral definida como, 312-313
integrales indefinidas de, 275-276, 277
inversas. *Véase* Inversas, funciones
inyectiva, 416
iteraciones, 58
lineales, 14
derivada, 137
logarítmicas. *Véase* Logarítmicas, funciones
onda cuadrada, 611-613, 616-618
onda triangular, 613-615
ortogonales, 190
par, 59, 621
periódicas, 33
polinómicas. *Véase* Polinómicas, funciones
potencial, 315
primitivas, 271-272
punto de bifurcación, 32
punto fijo, 58
racionales. *Véase* Racionales, funciones
recorrido, 13
seno. *Véase* Seno, función
senh, 465
sigmoidal, 428
suave, 142
tangente. *Véase* Tangente, función
transformaciones, 52-57
traslación, 54-55
traslación horizontal, 54-55
traslaciones verticales, 54-55
trigonométricas. *Véase* Trigonométricas, funciones
valor medio, 302-304
de Weierstrass, 145
zeta de Riemann, 567
Fundamental, período, 33
Fundamental, teorema, del Cálculo, 195, 307-313
Fútbol, 383


## G


$g$ (aceleración de la gravedad), 271, 374
Gabriel, trompeta de, 374, 531
Galileo, 27
Gases, ley de los
ecuación de Van der Waals, 161, 183, 186
Gateway Arch, 465, 472
Gauss, Carl Friedrich, 283
General, solución, 438, 439
General, término, 534
Geométricas, series, 549, 550, 551
Gibbs, fenómeno de, 620, 622
Gizeh, pirámide de, 358
Global, comportamiento
de funciones, 23
de gráficas, 228
Golf
golpeo, 51, 458
resistencia del aire, 383
ritmo de giro, 20
velocidad de la bola, 161
velocidad del palo, 161, 314
Gompertz, curva de crecimiento de, 225
Grado de un polinomio, 14
Grado se sincronía, 337
Grados, ángulos medidos en, 33
Gráfica(s)
comportamiento global, 228
comportanmiento local, 228
con dos asíntotas verticales, 242-243
esbozo, 239
exploración de la definición rigurosa de límite, 107-109
exponenciales, 44
función cotangente, 35
función cosecante, 35
función coseno, 34, 246-247
función inversa, 417-418
función secante, 35
función seno, 34
función tangente, 35
funciones, 13-14, 20

funciones polinómicas, 240-241
funciones racionales, 236-237, 241-242
rectas tangentes, 127
interpretación, 15-16
intersección. *Véase* Intersección de gráficas
logaritmos, 46
marcar puntos, 6-7
polinomios de Taylor, 591
rectas, 10
semi-log, 49
sumas de polinomios y funciones trigonométricas, 246-247
Gráfica, ventana, 21
automática, 21
fija, 21
Gráficas log-log, 51
Gráficas, calculadoras, 20-25, 30-31, 68-69, 227-228
Gravedad, aceleración de la, 271, 374
Gravitación
teoría de Newton, 215
Guitarra, cuerda, de 182

## H

Hardy, G. H., 578
Hidrostática, fuerza, 390-392
Hiperbólicas, funciones, 465-470
coseno, 465
derivada, 466
integrales que las contienen, 466
inversas, 468-469
seno, 465
Hipótesis de inducción, 285
Histograma, 395
HIV, 232, 269
Honda, lanzamiento con, 124, 190
Hooke, ley de, 384
Horizontal, criterio de la recta, 416
Horizontal, traslación, 54-55
Horizontales, asíntotas, 97-98, 99, 240
Horizontales, rectas, 10
tangentes a, 146
Humanos
altura, 395-396
arco del pie, 347
enfoque, 189
longevidad, 20
rotación mental, 145
sistema arterial, 257
tos, 257
velocidad, 123, 134-135, 153
Huntley, H. E., 625

## I

Impacto, velocidad de, 374
Impares, funciones, 59, 621
Implícita, derivación, 182-188
Implícita, solución, 440-441
Implícitas, funciones, 182
Impropias, integrales, 475, 518-529
con integrando discontinuo, 518-522
con límite infinito de integración, 522-527
convergentes, 520-522, 524-525
criterio de comparación, 527-529
divergentes, 520-522, 524-525
Impulso, 386-387
Impulso, función, 337
Impulso-momento, ecuación, 306, 387
Incremento, 203
Indefinida, integral, 272-276
Independiente, variable, 5
Indeterminada, forma, 98, 511-517
Índice, 62
Índice de suma, 281
Inducción matemática, 84, 285
Inestable, equilibrio, 448
Infinitos, límites, 95-100, 109-112
Infinitos, productos, 556
Inflexión, punto de, 23, 233-234
Información, teoría de la, 531
Ingravidez, 383
Ingresos, 159, 200
Inicial, condición, 440
Inicial, punto, 211
Inicial, velocidad, 377
Iniciales, problema de valores (PVI), 440-441
Instantánea (intensidad de) corriente, 259
Instantánea, rapidez, 123
Instantánea, velocidad, 129-130, 150
Instantáneo, ritmo de cambio, 130-131
Integración, 269-337, 476-477
constante de, 272
de funciones racionales, 490-493
límite inferior de, 295
límite superior, 295
límites infinitos de, 522-527
numérica. *Véase* Numérica, integración
por partes, 480-485
PCS, 506-509
regla de las potencias, 273-274
por sustitución, 316-322
por tablas, 502-505
técnicas trigonométricas, 486-493
variable de, 272
Integral(es)
aproximación por series de Taylor, 604-606
Boltzmann, 531
criterio de comparación, 527-529
definidas. *Véase* Definidas, integrales
dobles. *Véase* Dobles, integrales
elípticas, de segunda clase, 373
estimación, 304
con funciones hiperbólicas, 466
con funciones trigonométricas inversas, 461-463
impropias. *Véase* Impropias, integrales
indefinidas, 272-276
con integrando discontinuo, 301-302
con límites de integración variables, 311
con potencias de funciones trigonométricas, 486-490
rectas tangentes para funciones definidas como, 312-313
tabla de, 502-505
Integral, criterio, 558-561, 580
Integral, teorema del valor medio, 304
Integrando, 272, 295
desarrollo, 477
discontinuo, 301
integrales impropias con, 518-522
con un solo término, 482
Interés compuesto, 434-435
Intermedio, teorema del valor, 90-91
Interpolación lineal, 206, 420
Intersección de gráficas
asíntotas, 247
Intervalo
abierto, 3, 88
cerrado, 3, 88
continuidad en un, 88-89
Intervalo de convergencia, 583, 584
Inversa(s), función(ones), 414-420
del coseno, 455
gráfica, 418-419
recta tangente, 419
hiperbólicas, 468-469
de la secante, 456
del seno, 454
de la tangente, 456
trigonométricas, 454-457, 459-463
Inversión
ritmo de cambio, 172-173
Inverso, problema, 407
Inyectiva, función, 416
Irracionales, números, 2, 8
Iteraciones de funciones, 58
Izquierda, límite lateral por la, 69

## J

Johnson, Michael, 123

## K

Kepler, Johannes, 225
Kepler, leyes de, 225
«Knuckleball» (bola lanzada con efecto de nudillos), 379-380

## L

L'Hôpital, Guillaume de, 207
L'Hôpital, regla de, 206-208, 511-517, 538
Laplace, Pierre Simon, 522
Laplace, transformación de, 475, 531
Laser, 267
Latas, diseño de, 253-254
Laterales, límites, 69, 72-73, 95-97
Leibniz, Gottfried, 140, 160, 307
Leibniz, notación de, 140, 150, 178
Leibniz, regla de, 315
Lema, 162
Lemmings, 437
Lewis, Carl, 124
Límite(s), 60
cálculo, 76-83
con comportamientos inusuales, 114-115
concepto, 68-73
definición formal, 103-112
definición rigurosa, 106-107
exploración gráfica, 107-109
por la derecha, 69-70
para describir la velocidad, 75
estimación, 71-72
infinitos, 95-100, 109-112
por la izquierda, 69
laterales, 69, 72-73, 95-97
rapidez, 74
regla de L'Hôpital, 206-208, 511-517
de una sucesión, 61-62, 537, 548
verificación, 105-106
Límite, proceso, 62
Lineal, aproximación, 203-206
Lineal, densidad, 261
Lineal, desigualdad, 3-4
Lineal, función, 13-14
derivada, 137
Lineal, interpolación, 204-206, 420
Lineal, transformación, 9, 20, 53
Local, comportamiento, de funciones, 23
Local, comportamiento, de gráficas, 228
Local, máximo, 21, 218-219
Local, mínimo, 21, 218-219
Locales (relativos), extremos, 21, 218
aproximados, 230
criterio de la primera derivada, 229
criterio de la segunda derivada, 235
de funciones con exponentes fraccionarios, 230
de polinomios, 220
Logarítmicas, funciones, 45
derivada, 174-175
gráfica, 46
integral, 482
Logaritmos, 45
base, 45
estimación, 48
evaluación, 45
en integrales definidas, 309
intervalo de continuidad, 89
naturales. *Véase* Naturales, logaritmos
propiedades, 46
transformación de expresiones, 482
Logística, ecuación, 264
Logístico, crecimiento, 441-443
Log-log, gráficas, 51
Longitud
de arco. *Véase* Arco, longitud de
de una curva, 61-62
Luciérnagas, sincronía de las, 232
Lunar, módulo, 464
Luz, cantidad de, y tamaño de la pupila, 67-68, 100

## M

Maclaurin, Colin, 558
Maclaurin, series de, 590
Magnus, fuerza de, 379
Malabaristas, 32, 383
Mantisa, 115
Marginal, beneficio, 262
Marginal, coste, 262-263
Mariposa, efecto, 119
Masa
  centro de. *Véase* Centro de masa
Masa, densidad de, 260
Masas puntuales, 388
Matemática, inducción, 84, 285
Matemático, análisis, 103
Matemático, caos, 121
Matemáticos, modelos, 16, 67-68
Máxima, área, 249-250
Máximo entero, función, 85
Máximo, volumen, 250-251
Máximos, valores
  absolutos (globales), 217
  relativos (locales), 22, 218-219
Media, 399-401, 531
  áurea (razón áurea), 374
Media, corriente, 259
Media, densidad lineal, 260
Media, rapidez, 123, 127-128
Media, velocidad, 128-129, 129-130
Mediana, 400-401, 531
Medio, coste, 189, 239
Medio, regla del punto, 295, 324-325, 329-330
Medio, ritmo de cambio, 130-131
Medio, teorema del valor, 191-197
Medio, valor, de una función, 302-304
Mercator, mapa de, 414
Método de bisección, 32, 91
Mínimos, valores
  absolutos (globales), 217, 230
  relativos (locales), 21, 218-219
Modelos matemáticos
  corriente eléctrica en un conductor, 259
  difusión de una epidemia, 145, 269
  dilatación de la pupila, 67-68
  espesor de la nieve, 16
  poblaciones, 264
  ritmo de una reacción química, 259-260
Módulo lunar, 464
Momento, 387
  primer, 387, 388
Moneda, lanzamiento de una, 395
Monótona, sucesión, 541
Morfina, 436
Morrison, Philip, 40
Movimiento
  de los planetas, 225
  de proyectiles, 374-380, 405
  segunda ley de Newton, 182, 271, 374, 475
Muelle, constante de un, 384
Muelle-masa, sistema, 162, 167, 173
Multiplicador, efecto, 556
Multiplicidad de un cero, 85, 216, 518
Música
  análisis, 8
  timbre, 620
Música, sintetizadores de, 533, 619-620, 622

## N

NASA, entrenamiento de ingravidez, 383
Naturales, logaritmos, 45, 408-413
  derivada, 174-175
  gráfica, 46
  integral, 409-410
*Nautilus*, concha del, 1
Newton, Isaac, 112-113, 211, 307
Newton, ley de enfriamiento, 432-434
Newton, método de, 210-214
Newton, segunda ley del movimiento, 182, 271, 374, 475
Newton, teoría de la gravitación, 215
Newton-Raphson, método de. *Véase* Newton, método de
Nicotina, 473
No evitable, discontinuidad, 87
No lineal, dinámica, 121
Normal, distribución, 398
Norman, ventana de, 257
Numérica, derivación, 141-142
Numérica, integración, 324-333
  cotas de error, 330-333
  regla de los trapecios, 327-328, 329-330
  regla de Simpson, 328-330
  regla del punto medio, 324-325, 329-330
Número(s)
  críticos, 219, 221-222
  enteros, 2
  irracionales, 2, 8
  racionales, 2, 8
  reales, 2-6

## O

Oblicua, altura, 370
Oblicua, asíntota, 99-100
Octava, 8
Ondas, 33
  contenido armónico, 622
  cuadrada, 611-613, 616-618, 622
  dientes de sierra, 622
  pulso, 622
  de sonido, 36
  triangular, 613-615
Optimización, 249-255
Orden de una singularidad, 51
Orden superior, derivadas de, 149-150
Ordenado, par, 6
Origen, 6
Ortogonales, curvas, 190

## P

Padé, aproximación de, 176
Pandeo, carga de, 215
Pappus, teorema de, 360
Parábola, 20, 22
  intersección con una recta, 30
  punto más próximo a una, 251-252
Paracaidista
  aceleración, 151
  fuerzas primarias, 472
  velocidad terminal, 102, 472, 608
Paralelas, rectas, 12
Paramétricas, ecuaciones, 27, 510
Parciales, sumas, 547, 548-549
  estimación del error, 560
Pares, funciones, 59, 621
Partes, integración por, 480-485
Partición
  regular, 288, 449
Pascal, Blaise, 397
Paso (incremento), 449
PCS. *Véase* Cálculo simbólico, programas de
Pendiente, 9-10
  cálculo, 9
    implícito, 184-185
  de una curva, 60
  determinación por puntos colineales, 10
  de rectas secantes, 59-60
Pendiente-intersección, ecuación, 11
Pendientes, campo de. *Véase* Direcciones, campo de
Pérdida de cifras significativas, error por, 116-118
Perfecta, asincronía, 337
Perfecta, sincronía, 337
Periódica, función, 33-34
Período, 33
  cambio del, 36
  fundamental, 33
Permanente (asintótico), valor, 264
Perpendiculares, rectas, 12
Perpendiculatres, vectores. *Véase* Ortogonales, vectores
Peso suspendido, velocidad de un, 173, 178
Pesas, levantador de, 385
Petróleo, consumo de, 314-315, 346
Petróleo, mancha de, 187
pH, 51, 266
Piano, afinación de un, 8, 40, 622
Pie, arco del, 347
Pirámide, 358
Piscina, 347
Pitágoras, *comma* de, 8
Pitágoras, teorema de, 7, 34
Píxeles, 21
Planck, ley de, 210
Planetas, movimiento de los, 225
Población, estimación de una por rectas, 12-13
Poblaciones, crecimiento de
  bacterias, 41, 429-431, 436
  en su país, 1-2, 9, 49, 436
  estudio de, 1
  explosión, 545
  lemmings, 437
  modelo de, 264
  con umbral crítico, 447-448
Polinómica, desigualdad, 4
Polinómicas, funciones, 14-15, 22-23, 29-30
  derivadas, 137
  gráficas, 240-241
  límites, 77, 78, 79
Polinomios
  extremos locales, 220
  de Taylor, 170, 591, 602, 603-604
Potencia, 315
Potencial, energía, 383
Potencial, función, 315
Potencias, regla de las
  para derivadas, 145-149, 158
  para integrales, 273-274
Potencias, series de, 582-587
Predicción, 74
Presa, fuerza del agua sobre una, 391-392
Primer momento, 387, 388
Primer orden, ecuación diferencial ordinaria de, 438
Primera derivada, criterio de la, 229
Primitiva(s), 270-278
  de la función tangente, 320
  incorrectas dadas por un PCS, 506-507
  por prueba y error, 316
Probabilidad, 395-401
  desviación típica, 403
  distribución normal, 398
  de extinción, 239, 403
  histograma, 395
  media, 399, 400-401, 531
  mediana, 400-401, 531
  razón áurea, 374
Probabilidad, función densidad de, 398
Producto(s)
  de dos polinomios, 4
  infinitos, 556
  de una reacción química, 264
Proyectil, movimiento de un, 374-380, 405
*p*-series, 559
Pulso de ondas, 622
Punto(s)
  de bifurcación, 32, 121
  colineales, 9, 10
  derivada en un, 135-136
  distancia entre, 7
  evaluación en un, 291
  fijo, 58
  de inflexión, 23, 233-234
«Punto dulce» de un bate, 390
Punto-pendiente, ecuación, 11
Puntos, gráfico de, 6-7
Pupila, dilatación de la, 67-68, 100
PVI. *Véase* Problema de valores iniciales

## Q

Química, reacción
  autocatalítica, 259
  modelo de una, 259-260
  de segundo orden, 264
Quinta, 8

## R


Racionales, funciones, 15, 23-25
  continuidad, 86-89
  derivada, 137-138
  gráficas, 236-237, 241-242
    recta tangente, 127
  integración, 490-493
  límites, 77
Racionales, números, 2, 8
  representación en calculadora, 115
Radar, 420
Radiactiva, desintegración, 432
Radianes, medida de ángulos en, 33
Radio de convergencia, 583, 584
Raíz de la media del cuadrado del voltaje, 40, 323
Raíz de una ecuación, 28, 210
Raíz, criterio de la, 579, 580
Ramanujan, Srinivasa, 578, 581
Rapidez
  angular, 134, 314
  de una bola de golf, 161
  como valor absoluto de la velocidad, 129-130
  de los humanos, 123, 134-135
  instantánea, 123
  media, 123, 127-128
  de una pelota de béisbol, 73, 393
Razón áurea, 625
Reactantes, 264
Real, recta, 2
Reales, números, 2-6
  representación en calculadora, 115-118
  sucesiones, 534-544
Recorrido, 13
Recta numérica, 2
Recta(s)
  cálculo de la pendiente, 9
  ecuaciones, 9-13
  estimación de la población, 12-13
  forma pendiente-intersección, 11
  forma punto-pendiente, 11
  horizontales, 10
  intersecciones con una parábola, 30
  paralelas, 12
  perpendiculares, 12
  representación gráfica, 10
  secantes, 59-60, 125-126
  tangente. *Véase* Tangente, recta
  verticales, 9
Rectángulos
  como aproximación de áreas, 289
  de área máxima, 249-250
Redondear *vs.* truncar, 9
Reducción, fórmulas de, 483, 485, 503-504, 504-505
Refresco, diseño de una lata de, 253-254
Regla del producto, 154-156, 166
Regulares, particiones, 288, 449
Relación entre escalas, 40
Relacionados, ritmos, 187-188
Relativa, frecuencia, 395
Relatividad, teoría de la, 102, 215
Relativo, máximo. *Véase* Local, máximo
Relativo, mínimo. *Véase* Local, mínimo
Resistencia del aire, 271, 379, 445, 472
Resonancia, 622
Resonancia magnética de imágenes (IRM), 201
Restitución, coeficiente de, 161, 287, 546
Resto, 559
Resto de una serie de Taylor, 592
Revolución, sólidos de, 350-357, 365
Richter, escala de, 51
Riemann, Bernhard, 291
Riemann, función zeta de, 567
Riemann, sumas de, 296-297
  para el área de superficies, 372
  para el área entre curvas, 340
  para el primer momento, 389
  para el trabajo, 384
  para el valor medio, 303
  para el volumen, 349
  para integrales definidas, 297
  para integrales simples, 291-292
  para la longitud de arco, 368
  para la masa, 388, 389
  para la media, 400
Ritmo cardíaco, 262
Ritmo de reacción, 259-260
Ritmo(s) de cambio, 130-131
  aplicaciones relacionadas con, 258-263
  instantáneo, 130-131
  medio, 130-131
  seguir con la mirada una pelota, 460-461
  y volumen, 312
Ritmos relacionados, 187-188
RMI. *Véase* Resonancia magnética de imágenes
Rolle, Michel, 192
Rolle, teorema de, 191-193
Rozamiento, fuerza de, 94
Ruido, 51
Rumor, difusión de un, 265


## S


Saltador, velocidad de impacto de un, 375-376
Secante, función, 35, 36
  derivada, 166
  inversa, 456
Secante, recta, 59-60, 124, 125
Segunda derivada, 149
Segunda derivada, criterio de la, 235
Segundo orden, ecuaciones de, 437
Segundo orden, reacción química de, 264
Semi-log, gráficas, 49
Semivida, 431, 436, 473
Seno, funciones, 33
  aproximación lineal, 204-205
  cambio de amplitud y período, 36-37
  combinada con funciones coseno, 37-38
  derivada, 165-166
  gráfica, 34
  hiperbólico, 465
  integral, 275-276
  inversa, 454
  límites, 162-163
Senos, series de Fourier de, 620
Sensibilidad a los fármacos, 265
Separables, ecuaciones diferenciales, 438-443
Serie(s)
  absolutamente convergente, 574-576
  alternadas, 567-572
    divergentes, 570
    estimación de la suma, 571-572
  armónica, 552-554
  armónica alternada, 567-568
  condicionalmente convergente, 575-576
  convergente, 548, 550-551, 562, 579, 583, 619
  criterio de comparación, 561-565, 580
  divergente, 548, 551, 562, 570, 578
  de Fourier, 486, 608-620
    de cosenos, 623
    de senos, 620, 622
  generalidades, 287, 546-554
  geométrica, 549, 550, 551
  de Maclaurin, 590
  de potencias, 582-587
  *p*-series, 559
  de Taylor, 210, 589-599, 601
Series, 287, 546-554
Servicio de renta pública, 89-90
Senh, función, 465
Si/entonces, formulación, 223-224
SIDA, 232, 269
Sierpinski, triángulo de, 63-64
Sierra, onda en forma de dientes de, 622
Sigma, notación, 281-282
Sigmoidal, función, 428
Signo, área con, 297
Signo, distancia con (orientada), 128
Similares, triángulos, 9
Simmons, George, 445
Simples, descomposición en fracciones, 442, 490
Simples, fracciones, 490-493
Simpson, regla de, 328-330
Simpson, Thomas, 328
Sincronía
  grado de, 337
  perfecta, 337
Singularidad, 51
Sintetizadores de música, 533, 619-620, 622
Sólidos de revolución, 350-357, 365
Solución(ones)
  de una ecuación, 28
  de equilibrio, 442, 448
  espúreas, 32
  familia de, 439
  general, 438, 439
  implícita, 440-441
Sonido, ondas de, 36
*Streptococcus*, 430-431
Suave, función, 142
Sucesión(ones)
  acotada, 542
  convergente, 535, 536, 540, 543, 548
  creciente, 540-542
  decreciente, 541
  divergente, 535, 537, 548
  de Fibonacci, 1, 546
  límite de una, 61-62, 537, 548
  monótona, 541
  de números reales, 534-544
  de Ulam, 545
Sucesivas, aproximaciones, 211
Suma
  error por pérdida de cifras significativas, 118
  fórmulas para el seno y el coseno, 37
Suma(s)
  de constantes, 282
  de los cuadrados de los primeros *n* enteros positivos, 282
  integral indefinida de una, 274
  parciales, 547, 548-549
    estimación del error en, 560
  de los primeros *n* enteros positivos, 282
  de Riemann. *Véase* Riemann, sumas de
  de series alternadas, 571-572
  telescópicas, 502, 549
  de valores de una función, 284
Suma, fórmulas de, 282-283
Superficie(s). *Véase también* Hipersuperficie
Superficie, área de una, 370-372
Suspendido, velocidad de un peso, 173, 178
Sustitución (cambio de variables)
  antes de usar la fórmula de reducción, 504-505
  antes de usar la tabla de integrales, 505
  integración por, 316-322
  trigonométricas, 490-493


## T


Tabla de integrales, 502-505
Tablas de impuestos, 89-90
Tangente, bifurcación, 32
Tangente, función, 35
  primitiva, 320
  derivada, 165-166
  inversa, 456
  hiperbólica inversa, 468
Tangentes, rectas
  a una circunferencia, 124, 182
  a una curva, 124-125
  por derivación implícita, 185
  ecuación, 126-127, 149, 155-156, 168
  para funciones definidas por una integral, 312
  a la gráfica de la función inversa 419
  a la gráfica de funciones racionales, 127
  pendiente de, 126, 183

a la recta $y = x$, 146
a una recta horizontal, 146
verticales, 237
Tautocrona, 510
Taylor, Brook, 480
Taylor, polinomios de, 170, 591, 602, 604
Taylor, series de, 210, 589-599, 601
resto, 592
Taylor, teorema de, 599
Telescópicas, sumas, 502, 549
Temperamento igual (música), 8
Temperatura
ambiente, 432
Tenis
energía perdida por la pelota, 345
juego empatado (*deuce*), 556
raqueta, 339-340, 392, 394
servicio (saque), 378-379, 474
Teorema
de convergencia de Fourier, 618-619
del encaje, 81-82, 539
de existencia, 90-91
de factorización, 29
de Fermat, 220
fundamental del Cálculo, 195
integral del valor medio, 304
de Pappus, 360
de Pitágoras, 7, 8, 34
de Rolle, 191-193
de Taylor, 599
del valor extremo, 218
del valor intermedio, 90-91
del valor medio, 191-197
Tercera derivada, 150
Terminal, velocidad, 27, 444, 472
Término(s) de una sucesión, 534-535
general, 534
Terremoto, 51
Tierra, circunferencia de la, 40
Timbre, 620
Típica, desviación, 403
Toro, 360
Torre, altura de una, 38-39
Torrey, Lee, 339
Trabajo, 384
bombeo de agua de un depósito, 385-386
levantador de pesas, 385
sobre un muelle, 384
Transformación
afín, 20
de funciones, 52-57
lineal, 9, 20, 53
Transitorio, valor, 264
Trapecios, regla de los, 327-328, 329-330
Traslación
horizontal, 54-55
vertical, 54, 55
Triangular, desigualdad, 5
Triangular, onda, 613-615
Triángulo(s)
de Sierpinski, 63-64
similares, 9-10
Trigonométricas, funciones, 33-39
derivadas, 162-168, 179
integrales con potencias suyas, 486-490
inversas, 454-457, 459-463
límites, 79-81, 107-108
pérdida de cifras significativas, 117
Trigonométricas, sustituciones, 490-493
Tronco de cono, 371
Trozos, función continua a, 301
Trozos, función definida a, 82
Truncar *vs.* redondear, 9

## U

Ulam, sucesión de, 545
Umbral crítico, 447-448
Uranio, 436

## V

Valor actual, 556
Valoración, 266
Van der Waals, ecuación de, 161, 183, 186
Variable(s)
continua, 264
dependiente, 13
discreta, 264
independiente, 13
de integración, 272
Velocidad, 127-132, 341
angular, 134, 314
estimación numérica, 142
evaluación del límite que la describe, 82-83
de impacto, 374
inicial, 377
instantánea, 129-130, 150
media, 128-129
de un peso suspendido, 173, 178
terminal, 27, 444, 472
Velocidad límite, 74
Velocidad, medidor de, 123
Ventana de Norman, 257
Ventanas de la calculadora, 21
Verhulst, Pierre, 441
Vertical, criterio de la recta, 13-14
Vertical, ecuación del movimiento, 376
Vertical, recta, 9
Vertical, traslación, 54, 55
Verticales, asíntotas, 23-25, 95, 240
gráficas con dos, 242-243
Verticales, rectas tangentes, 237
Vino, toneles de, 225
Voltaje, raíz cuadrada de la media del cuadrado del, 40, 323
Voltímetro, 40
Volumen, 347-357
por capas cilíndricas, 360-365
de una esfera, 190
por discos, 351-353
por arandelas, 353-357
máximo, 250-251
por rebanadas, 348-350
ritmo de cambio del, 185-186, 312

## W

Watts, Robert, 379
Weierstrass, función de, 145
Weierstrass, Karl, 90

## Z

Zoom, 20, 22, 248

FECHA DE VENCIMIENTO

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

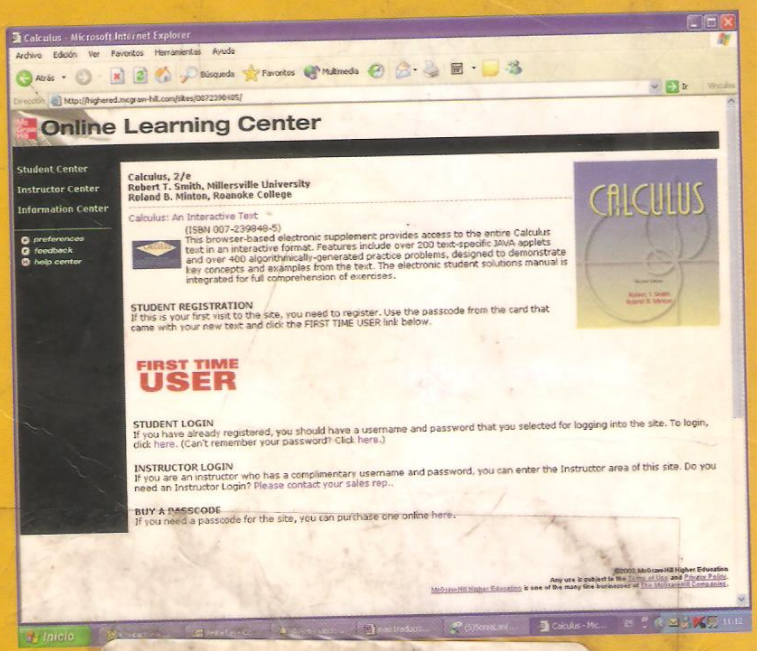
U. C. V. Fac. Biblioteca

Esta obra se terminó de
Imprimir en Febrero de 2005 en
Programas Educativos, S.A. de C.V.
Calz. Chabacano No. 65- A
Col. Asturias, C.P. 06850, Méx. D.F.
Empresa Certificada por el Instituto Mexicano
de Normalización y Certificación A.C., bajo la
Norma ISO-9002: 1994/NMX-CC-004: 1995 con
el núm. de Registro RSC-048 y bajo la Norma
ISO-14001-1996/NMX-SAA-001: 1998 IMNC
con el núm. de Registro RSAA-003

Segunda Edición

# Robert T. Smith
# Roland B. Minton

Accede a la OLC de Cálculo en www.mhhe.com/smithminton




QA303.2 S55 2003 V.1
Biblioteca Alonso Gamero Fac. Ciencias
D043500006396 UCV
N° 0005 http://biblioteca.ciens.ucv.ve

McGraw-Hill Interamericana de España, S. A. U.
A Subsidiary of The McGraw-Hill Companies
http://www.mcgraw-hill.es
ISBN: 970104759-1